Reelle Räume

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Michael Tüxen
aus Oldenburg

Göttingen 1996

D7

Referent:	Prof. Grauert
Korreferent:	Prof. Stuhler
Tag der mündl. Prüfung:	20. Juni 1996

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Man kann Ergebnisse der komplexen Analysis dazu benutzen, um Ergebnisse über reelle Räume zu gewinnen.

Zuerst untersuchte Cartan in [Ca57] reell-analytische Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Das heißt, daß A lokal das Nullstellengebilde von endlich vielen reell-analytischen Funktionen ist. Er zeigte, daß man einer reell-analytischen Menge A genau dann eine Komplexifizierung zuordnen kann, wenn die Garbe ι_A der Keime der auf A verschwindenden reell-analytischen Funktionen kohärent ist. Solche Menge nennt er kohärente analytische Mengen. Er gab auch Beispiele an, daß nicht jede analytische Menge kohärent ist. Dann übertrug er Theorem A und Theorem B von Steinschen Räumen auf kohärente analytische Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^N$.

Anschließend wurden reell-analytische Mannigfaltigkeiten untersucht: So zeigte kurze Zeit später H. Grauert in [Gr58], daß sich jede n-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie reell-analytisch in einen $\mathbb{R}^N$ einbetten läßt. Hierzu wird eine Steinsche Komplexifizierung mit Hilfe der Lösung des Leviproblems konstruiert und ein Einbettungssatz für Steinsche Räume ausgenutzt. Die Existenz einer im allgemeinen nicht Steinschen Komplexifizierung wurde zuerst in [WhBr59] gezeigt. Dies wurde in [Gr58] ausgenutzt.

Später wurden die Begriffe reeller Raum und reelle Varietät eingeführt. Beides sind lokal $\mathbb{R}$-geringte Räume, die sich im Modellraum $(A, \mathcal{O}_A)$ unterscheiden: Im folgenden bezeichnet $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^N}$ die Garbe der Keime von reell-analytischen Funktionen auf dem N-dimensionalen reellen Zahlenraum $\mathbb{R}^N$. Für einen Modellraum eines reellen Raumes ist A die Nullstellenmenge $\mathrm{N}(f_1, \ldots, f_l)$ von endlich vielen reell-analytischen Funktionen $f_\lambda \in \mathcal{O}_B(B)$ für $\lambda = 1, \ldots, l$ in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$, und die Strukturgarbe $\mathcal{O}_A$ ist gleich $(\mathcal{O}_B/(f_1, \ldots, f_l))|_A$. Bei einem Modellraum für eine reelle Varietät ist die Strukturgarbe $\mathcal{O}_A$ gleich $(\mathcal{O}_B/\iota_A)|_A$, wobei ι_A die Garbe der Keime der auf A verschwindenen reell-analytischen Funktionen bezeichnet. Man erkennt, daß die reellen Räume analog zu komplexen Räumen und die reellen Varietäten analog zu reduzierten komplexen Räumen definiert sind. Der Hauptunterschied zwischen der reellen und komplexen Theorie liegt nun darin begründet, daß man im Komplexen einen Reduktionsfunktor hat und im Reellen nicht: Man kann jedem komplexen Raum einen komplexen Raum zuordnen, der reduziert ist, das heißt dessen Strukturgarbe eine Untergarbe der Garbe von Keimen von stetigen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen ist. Dies besagt der tiefe Satz über die Kohärenz der Idealgarbe von H. Cartan (siehe [CAS, Chapter 4]). Ein reeller Raum beziehungsweise eine reelle Varietät heißt reduziert, falls die Strukturgarbe eine Untergarbe der Garbe von Keimen von stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen ist. Reelle Räume sind im allgemeinen nicht reduziert, reelle Varietäten sind stets reduziert. Wie im komplexen Fall kann man jedem reellen Raum als Reduktion eine reelle Varietät zuordnen. Diese ist jedoch kein reeller Raum mehr. Dies bedeutet, daß die Strukturgarbe einer reeller Varietät im allgemeinen nicht kohärent ist.

Man zeigt dann, daß jeder reelle Raum einen im allgemeinen nicht reduzierten komplexen Raum als Komplexifizierung besitzt und eine reelle Varietät genau dann eine Komplexifizierung besitzt, wenn die Strukturgarbe kohärent ist. Dies ist dann ein reduzierter komplexer Raum.

Hat man nun als Ziel, Ergebnisse der komplexen Analysis über reduzierte komplexe Räume auf den reellen Fall zu übertragen, so bilden die reellen Räume keine geeignete Kategorie. Betrachtet man kohärente reelle Varietäten, so hat man stets eine reduzierte Komplexifizierung, aber die Klasse dieser Objekte ist nicht die allgemeinste, die eine Komplexifizierung zuläßt.

In dieser Arbeit wird der Begriff des (reell)-analytischen Raumes eingeführt und untersucht. Ein n-dimensionaler analytischer Raum ist ein lokal $\mathbb{R}$-geringter Raum, der lokal isomorph ist zu einem n-dimensionalen analytischen Modellraum $(A, \mathcal{O}_A)$. Hierbei verlangt man für A nur, daß A abgeschlossen in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ ist. Da die Räume eine reduzierte Komplexifizierung zulassen sollen, muß man als Strukturgarbe $\mathcal{O}_A = (\mathcal{O}_B/\iota_A)|_A$ setzen. Es wird ein Kriterium angegeben, unter welchen Voraussetzungen genau A eine Komplexifizierung besitzt. Hat man eine Menge $A \subseteq B$, die eine Komplexifizieung zuläßt, so stellt sich heraus, daß sie in einer Menge $A' \subseteq B$ enthalten ist, die lokal als Nullstellenmenge von endlich vielen analytischen Funktionen darstellbar ist. A selbst ist dies nicht, sondern erst nach Vereinigung mit einer „Stachelmenge“ $A' \setminus A$. Um zu einer vernünftigen Theorie zu gelangen, wird man fordern, daß dieser Stachel klein ist im Verhältnis zu A. Dies geschieht mittels der Dimensionstheorie für separable metrische Räume. So erhält man die allgemeinsten reellen Objekte, die eine Komplexifizierung zulassen und bei denen man Ergebnisse von der Komplexifizierung auf die Objekte übertragen kann. Alle obigen anderen Begriffe von reellen Objekten, die eine reduzierte Komplexifizierung zulassen, sind Spezialfälle dieses Begriffs des analytischen Raumes. Eine exakte Einführung dieses Begriff des analytischen Raumes findet man im ersten Abschnitt.

Im zweiten Abschnitt dieser Arbeit wird gezeigt, daß jeder n-dimensionale analytische Raum einen rein n-dimensionalen reduzierten Raum als Komplexifizierung besitzt und dieser als Keim entlang des analytischen Raumes eindeutig bestimmt ist. Ferner kann man analytische Abbildungen und kohärente Moduln komplexifizieren.

Im dritten Abschnitt wird dann eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen eines analytischen Raumes in seiner Komplexifizierung konstruiert. Damit kann man Ergebnisse der Theorie der Steinschen Räume auf analytische Räume übertragen. Dies wird beispielhaft durchgeführt anhand von Theorem A, Theorem B und der Einbettungsfrage. Die Übertragung anderer Ergebnisse, wie zum Beispiel das Grauert-Oka Prinzip, sind ebenfalls möglich.

Im vierten Abschnitt wird der Begriff der Normalisierung eines analytischen Raumes eingeführt und Existenz und Eindeutigkeit der Normalisierung gezeigt.

Abschließend wird im fünften Abschnitt das Bild unter einer eigentlichen analytischen Abbildung $f : X_1 \to X_2$ untersucht. Im komplexen Fall besagt ein Ergebnis von Remmert, daß die Bildmenge eine komplex-analytische Menge ist. Im Reellen ist dies falsch. Man muß den Begriff des semianalytischen Raumes einführen. Dies geschieht anders als bei Lojasiewicz in [Lo65]. Durch die komplex-analytischen Untersuchungen wird die hier gegebene Definition nahegelegt. Dann ist aber immer noch nicht das Bild $f(X_1)$ eines analytischen Raumes unter einer eigentlichen Abbildung semianalytisch. Man muß Bedingungen an eine Komplexifizierung $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ der Abbildung stellen: Gibt es eine endliche Komplexifizierung der Abbildung, so ist die Bildmenge $f(X_1)$ semianalytisch. $f(X_1)$ ist auch semianalytisch, falls die Abbildung f fast überall den Rang r hat und eine eigentliche Komplexifizierung $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ besitzt, wobei $\tilde{X}_1$ glatt ist.

Nun sollen noch einige Konventionen, die in der gesamten Arbeit gelten, angegeben werden. Mit $\mathbb{N}$ werden die natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots\}$ bezeichnet, mit $\mathbb{N}_0$ die nicht-negativen ganzen Zahlen. Die reellen und komplexen Zahlen werden wie üblich mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnet. Alle vorkommenden topologischen Räume haben eine abzählbare Basis der Topologie und sind Hausdorffsch. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, so wird der Abschluß von Y in X mit $\overline{Y}^X$ oder auch nur mit $\overline{Y}$ bezeichnet. Ferner sind alle komplexen Räume, die in dieser Arbeit vorkommen, reduziert. Ist $f : X \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, so wird mit $\overline{f}$ diejenige komplexwertige Funktion bezeichnet, die man aus f durch Komposition mit der Konjugation auf $\mathbb{C}$ erhält. Sind $f_1, \dots, f_l$ endlich viele $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-wertige Funktionen auf einer Menge X, so wird die gemeinsame Nullstellenmenge von $f_1, \dots, f_l$ in X mit $\mathrm{N}(f_1, \dots, f_l)$ bezeichnet.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Grauert herzlich bedanken für die sehr interesssante Aufgabenstellung und die anregenden Gespräche während der Betreuung dieser Arbeit.

1 Analytische Räume

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wird der Begriff des analytischen Raumes eingeführt. Dazu muß man im wesentlichen nur analytische Modellräume definieren. Zentral ist in diesem Abschnitt der Begriff der Komplexifizierung. Dieser wird zunächst für beliebige Mengenkeime eingeführt und untersucht. Damit kann man dann Komplexifizierungen von Mengen A definieren, die abgeschlossen in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ sind. Dies sind komplex-analytische Mengen $\tilde{A}$ in Bereichen $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$, die unter anderem A umfassen. Verlangt man nun, daß A im wesentlichen gleich dem reellen Teil der Komplexifizierung ist, so gelangt man zum Begriff des analytischen Modellraums.

Zum Abschluß werden Beispiele für analytische Räume angegeben.

Komplexifizierung reeller Mengenkeime

Zunächst fixiert man die folgenden

1.1. Bezeichnungen. Sei stets $N \in \mathbb{N}$. Fortan wird der $\mathbb{R}^N$ stets als derjenige topologische Unterraum vom $\mathbb{C}^N$ aufgefaßt, der aus den komplexen N-Tupeln besteht, die verschwindenden Imaginärteil haben. Mit $\omega_{\mathbb{C}^N}$ wird die antiholomorphe Involution auf dem $\mathbb{C}^N$ bezeichnet, die man durch komponentenweises Konjugieren erhält. Ferner sei $x \in \mathbb{R}^N$. Wie üblich wird der Ring der reell-analytischen bzw. holomorphen Funktionskeime bei x mit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x}$ bzw. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}$ bezeichnet. Man hat dann die kanonischen Abbildungen

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}.$$

Für $f_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x}$ wird das Bild von f_x in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}$ mit $\tilde{f}_x$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x}$, so ist $\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ein Ideal in $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und das Bild in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}$ wird mit $\tilde{\mathfrak{a}}$ bezeichnet. $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist ein Ideal in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}$. Ist ferner $\mathfrak{a}$ erzeugt von $f_{1,x}, \dots, f_{l,x}$, so ist $\tilde{\mathfrak{a}}$ erzeugt von $\tilde{f}_{1,x}, \dots, \tilde{f}_{l,x}$.

Weiterhin werden neben reell-analytischen Mengenkeimen $A_x \subseteq (\mathbb{R}^N)_x$ und komplex-analytischen Mengenkeimen $\tilde{A}_x \subseteq (\mathbb{C}^N)_x$ auch allgemeine Mengenkeime in $(\mathbb{C}^N)_x$ betrachtet. Ein allgemeiner Mengenkeim $A_x \subseteq (\mathbb{C}^N)_x$ heißt dann reeller Mengenkeim, falls $A_x \subseteq (\mathbb{R}^N)_x$ gilt. Jeder reell-analytische Mengenkeim ist ein reeller Mengenkeim.

Jedem reellen Mengenkeim A_x ordnet man das Ideal $\iota_{A_x} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x}$ der auf A_x verschwindenden reell-analytischen Funktionskeime zu. Ferner bezeichne $\mathcal{O}_{A_x} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x}/\iota_{A_x}$ die $\mathbb{R}$-Stellenalgebra des reellen Keimes A_x. Analog ordnet man einem komplex-analytischen Mengenkeim $\tilde{A}_x$ das reduzierte Ideal $\iota_{\tilde{A}_x}$ und die $\mathbb{C}$-Stellenalgebra $\mathcal{O}_{\tilde{A}_x}$ zu. Diese Zuordnung induziert eine Bijektion zwischen den komplex-analytischen Mengenkeimen bei x und den reduzierten Idealen in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}$.

Der Verband der komplex-analytischen Mengenkeime ist Artinsch. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

1.2. Definition. Sei A_x ein reeller Mengenkeim bei $x \in \mathbb{R}^N$. Dann heißt der kleinste komplex-analytische Mengenkeim, der A_x umfaßt, die *Komplexifizierung* von A_x und wird mit $\tilde{A}_x$ bezeichnet.

Nun zeigt man das elementare

1.3. Lemma. *Sei A_x ein reeller Mengekeim und $\tilde{f}_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $\tilde{f}_x|_{A_x} = 0$.

(2) $\tilde{f}_x \in \widetilde{\iota_{A_x}}$.

Beweis. Man betrachte die Zerlegung $\tilde{f}_x = \tilde{f}'_x + i \cdot \tilde{f}''_x$ mit $f'_x, f''_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x}$.

(1) $\curvearrowright$ (2): Aus $\tilde{f}_x|_{A_x} = 0$ folgt $f'_x|_{A_x} = f''_x|_{A_x} = 0$, also $f'_x, f''_x \in \iota_{A_x}$. Damit ergibt sich $\tilde{f}'_x, \tilde{f}''_x \in \widetilde{\iota_{A_x}}$ und schließlich $\tilde{f}_x \in \widetilde{\iota_{A_x}}$.

(2) $\curvearrowright$ (1): Aus $\tilde{f}_x \in \widetilde{\iota_{A_x}}$ ergibt sich $f'_x, f''_x \in \iota_{A_x}$. Damit folgt $f'_x|_{A_x} = f''_x|_{A_x} = 0$, also $\tilde{f}'_x|_{A_x} = \tilde{f}''_x|_{A_x} = 0$ und damit $\tilde{f}_x|_{A_x}$. □

Hieraus folgt sofort:

1.4. Korollar. *Für jeden reellen Mengekeim A_x ist das Ideal $\widetilde{\iota_{A_x}}$ reduziert.*

Beweis. Sei $\tilde{f}_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,x}$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{f}^l_x \in \widetilde{\iota_{A_x}}$. Dann folgt $\tilde{f}^l_x|_{A_x} = 0$ und damit $\tilde{f}_x|_{A_x} = 0$, also schließlich $\tilde{f}_x \in \widetilde{\iota_{A_x}}$. □

Damit beweist man die

1.5. Proposition. *Sei A_x ein reeller Mengekeim bei $x \in \mathbb{R}^N$ und $\tilde{A}_x$ dessen Komplexifizierung. Dann gelten:*

(1) $\iota_{\tilde{A}_x} = \widetilde{\iota_{A_x}}$, *insbesondere gilt $\mathcal{O}_{A_x} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathcal{O}_{\tilde{A}_x}$ als $\mathbb{C}$-Stellenalgebren.*

(2) $\tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x$ *ist der kleinste reell-analytische Mengenkeim, der A_x umfaßt, und $\tilde{A}_x$ ist dessen Komplexifizierung.*

(3) *Man kann $\tilde{A}_x$ so durch eine in einer im $\mathbb{C}^N$ offenen Umgebung $\tilde{U}$ von x analytischen Menge $\tilde{A}$ repräsentieren, daß $\tilde{U}$ und $\tilde{A}$ invariant sind unter Konjugation.*

Beweis. Zu (1): Man zeigt, daß der durch das nach 1.4 reduzierte Ideal $\widetilde{\iota_{A_x}}$ gegebene komplex-analytische Mengenkeim $\tilde{A}_x$ die Komplexifizierung von A_x ist. Man wähle $f_{1,x}, \ldots, f_{l,x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N,x}$ mit $\iota_{A_x} = (f_{1,x}, \ldots, f_{l,x})$. Dann gilt $\widetilde{\iota_{A_x}} = (\tilde{f}_{1,x}, \ldots, \tilde{f}_{l,x})$. Aus 1.3 folgt dann für $\lambda = 1, \ldots, l$ die Gleichung $\tilde{f}_{\lambda,x}|_{A_x} = 0$ und damit $A_x \subseteq \tilde{A}_x$. Sei ferner $\tilde{A}'_x$ ein komplex-analytischer Mengenkeim bei x mit $A_x \subseteq \tilde{A}'_x$. Aus 1.3 folgt dann $\iota_{\tilde{A}'_x} \subseteq \iota_{\tilde{A}_x}$, also $\tilde{A}_x \subseteq \tilde{A}'_x$. Damit ist $\tilde{A}_x$ die Komplexifizierung von A_x.

Zu (2): Nach Definition gilt $A_x \subseteq \tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x$. Daher folgt $\iota_{\tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x} \subseteq \iota_{A_x}$. Mit 1.3 und (1) ergibt sich auch $\iota_{A_x} \subseteq \iota_{\tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x}$. Damit gilt $\iota_{\tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x} = \iota_{A_x}$. Der durch $\iota_{\tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x}$ gegebene Mengenkeim bei x ist ein reell-analytischer Mengenkeim, der A_x umfaßt und dessen Komplexifizierung nach (1) $\tilde{A}_x$ ist. Sei ferner A'_x ein reell-analytischer Mengenkeim, der A_x umfaßt. Dann gilt $\iota_{A'_x} \subseteq \iota_{A_x} = \iota_{\tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x}$. Damit folgt $\tilde{A}_x \cap (\mathbb{R}^N)_x \subseteq A'_x$.

Zu (3): Man wähle $\tilde{f}_{1,x}, \ldots, \tilde{f}_{l,x}$ wie bei (1) und einen Polyzylinder $\tilde{U}$, so daß die durch $\tilde{f}_{\lambda,x}$ gegebenen Potenzreihen mit reellen Koeffizienten in $\tilde{U}$ konvergieren und holomorphe Funktionen $\tilde{f}_\lambda$ darstellen für $\lambda = 1, \ldots, l$. Dann ist $\tilde{A} = \mathrm{N}(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l)$ eine unter Konjugation invariante komplex-analytische Menge, die $\tilde{A}_x$ induziert. $\square$

Komplexifizierung reeller Mengen

1.6. Definition. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Bereich und $A \subseteq B$ abgeschlossen. Dann heißt eine in einem Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ komplex-analytische Menge $\tilde{A}$ eine *Komplexifizierung* von A, falls für alle $x \in A$ der Keim $\tilde{A}_x$ die Komplexifizierung von A_x ist.

Trivial ist die folgende

1.7. Bemerkung. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Bereich, $A \subseteq B$ abgeschlossen, $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ ein Bereich und $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ eine komplex-analytische Menge, die eine Komplexifizierung von A ist. Ferner sei $\tilde{B}' \subseteq \tilde{B}$ mit $B \cap \tilde{B}' \neq \emptyset$. Für $\tilde{A}' = \tilde{A} \cap \tilde{B}'$, $B' = B \cap \tilde{B}'$ und $A' = A \cap B'$ ist dann $A' \subseteq B'$ im Bereich B' abgeschlossen und $\tilde{A}' \subseteq \tilde{B}'$ eine komplex-analytische Menge, die eine Komplexifizierung von A' ist.

Weiterhin hat man das elementare

1.8. Lemma. *Sei $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossene Menge und $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ eine komplex-analytische Menge in einem Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$, die eine Komplexifizierung von A ist. Dann gilt nach eventueller Verkleinerung von B, $\tilde{B}$ und $\tilde{A}$:*

(1) $B = \tilde{B} \cap \mathbb{R}^N$.

(2) *$\tilde{B}$ und $\tilde{A}$ sind invariant unter $\omega_{\mathbb{C}^N}$.*

Beweis. Nach 1.5 gibt es zu jedem $x \in A$ eine $\omega_{\mathbb{C}^N}$-invariante offene Umgebung $\tilde{U}_x$ von x in $\tilde{B}$, so daß $\tilde{A} \cap \tilde{U}_x$ auch $\omega_{\mathbb{C}^N}$-invariant ist. Setze nun $\tilde{B}' = (\bigcup_{x \in A} \tilde{B}_x) \cap \mathrm{T}_B$, wobei $\mathrm{T}_B = \{z \in \mathbb{C}^N : \operatorname{re} z \in B\}$ bezeichnet. Dann ist $\tilde{B}'$ invariant unter $\omega_{\mathbb{C}^N}$ und $A \subseteq B'$ abgeschlossen mit $B' = \tilde{B}' \cap \mathbb{R}^N$. Ferner ist $\tilde{A}' = \tilde{A} \cap \tilde{B}'$ auch $\omega_{\mathbb{C}^N}$-invariant. Nach 1.7 ist dann $\tilde{A}' \subseteq \tilde{B}'$ eine Komplexifizierung von $A \subseteq B'$. $\square$

Die Komplexifizierung ist als Keim entlang A eindeutig bestimmt. Dies besagt die folgende

1.9. Proposition (Eindeutigkeit der Komplexifizierung). *Sei $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossene Menge. Sind dann $\tilde{A}' \subseteq \tilde{B}'$ und $\tilde{A}'' \subseteq \tilde{B}''$ zwei Komplexifizierungen von A, so gibt es einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \tilde{B}' \cap \tilde{B}''$ mit $A \subseteq \tilde{B}$ und*

$$\tilde{A}' \cap \tilde{B} = \tilde{A}'' \cap \tilde{B}.$$

Beweis. Für $x \in A$ gilt $\tilde{A}'_x = \tilde{A}''_x$. Also gibt es eine offene Umgebung $\tilde{B}_x \subseteq \tilde{B}' \cap \tilde{B}''$ von x mit $\tilde{A}' \cap \tilde{B}_x = \tilde{A}'' \cap \tilde{B}_x$. Dann besitzt $\tilde{B} = \bigcup_{x \in A} \tilde{B}_x \subseteq \tilde{B}' \cap \tilde{B}''$ die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Im folgenden benötigt man die garbentheoretische

1.10. Proposition. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein $\mathbb{R}$-geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind äquivalent:*

(1) *$\mathcal{F}$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*

(2) *$\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-Modul.*

Beweis. (1) $\curvearrowright$ (2): Die Endlichkeit von $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ folgt aus der Endlichkeit von $\mathcal{F}$ durch Tensorieren mit $\mathbb{C}$.

Die Relationenendlichkeit von $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sieht man so: Sei eine exakte Sequenz von $(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_U$-Moduln

$$(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_U^p \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

über einer offenen Menge U in X gegeben. Dann hat man ein kommutatives Diagramm von $\mathcal{O}_U$-Moduln

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \pi \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_U^p \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \pi' \arrow[r] & \mathcal{O}_U^{2p} \arrow[r, "\pi'"] & \mathcal{F}|_U \oplus \mathcal{F}|_U \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Isomorphismen von $\mathcal{O}_U$-Moduln durch den Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ induziert werden. Da $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$ relationenendlich ist, gibt es zu allen $x \in U$ eine offene Umgebung V von x in U und eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_V$-Moduln:

$$\mathcal{O}_V^q \longrightarrow \ker \pi|_V \longrightarrow 0.$$

Diese induziert eine exakte Sequenz von $(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_V$-Moduln:

$$(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_V^q \longrightarrow \ker \pi|_V \longrightarrow 0.$$

Damit ist $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ auch relationenendlich, also kohärent.

(2) $\curvearrowright$ (3): Zuerst zeigt man, daß $\mathcal{F}$ endlich erzeugt ist. Sei dazu $x \in X$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und eine exakte Sequenz

$$(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_U^p \longrightarrow (\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_U \longrightarrow 0$$

von $(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_U$-Moduln. Hieraus erhält man eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X|_U$-Moduln:

$$\mathcal{O}_X|_U^{2p} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \oplus \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0.$$

Mit dem Epimorphismus $\mathcal{F}|_U \oplus \mathcal{F}|_U \to \mathcal{F}_U$ erhält man eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X|_U$-Moduln:

$$\mathcal{O}_X|_U^{2p} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0.$$

Also ist $\mathcal{F}$ endlich erzeugt.

Die Relationenendlichkeit von $\mathcal{F}$ sieht man so: Sei eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X|_U$-Moduln

$$0 \longrightarrow \ker\pi \longrightarrow \mathcal{O}_X|_U^p \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

gegeben. Weil $\mathbb{C}$ eine flache $\mathbb{R}$-Algebra ist, erhält man daraus die exakte Sequenz von $(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_U$-Moduln:

$$0 \longrightarrow \ker\pi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_U^p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Weil $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ relationenendlich ist, gibt es zu $x \in U$ eine offene Umgebung V in U von x und eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X|_V$-Moduln:

$$(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})|_V^q \longrightarrow \ker\pi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Wie oben erhält man hieraus eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X|_V$-Moduln:

$$\mathcal{O}_X|_V^{2p} \longrightarrow \ker\pi \longrightarrow 0.$$

Also ist $\mathcal{F}$ relationenendlich. □

Das Problem der Existenz einer Komplexifizierung wird behandelt durch den folgenden

1.11. Satz. *Sei $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossene Menge. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es gibt eine Komplexifizierung $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ von A.*

(2) *Zu jedem $x \in A$ gibt es eine in $\mathbb{C}^N$ offene Umgebung $\tilde{U}$ und eine in $\tilde{U}$ komplex-analytische Menge $\tilde{A} \subseteq \tilde{U}$, so daß $\tilde{A}_y$ die Komplexifizierung von A_y für alle $y \in \tilde{U} \cap A$ ist.*

(3) *Die Idealgarbe $\iota_A|_A$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_B|_A$-Modul.*

(4) *Es gibt einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ mit $A \subseteq \tilde{B}$ und eine kohärente $\mathcal{O}_{\tilde{B}}$-Idealgarbe $\widetilde{\iota_A}$, so daß der kanonische Isomorphismus $\mathcal{O}_B|_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathcal{O}_{\tilde{B}}|_A$ einen Isomorphismus $\iota_A|_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \widetilde{\iota_A}|_A$ induziert.*

Beweis. (1) $\curvearrowright$ (2): Die Implikation ist klar: Für alle $x \in A$ wähle man $\tilde{B}$ als offene Umgebung und $\tilde{A}$ als komplex-analytische Menge in $\tilde{B}$.

(2) $\curvearrowright$ (3): Es reicht zu zeigen, daß es zu jedem $x \in A$ eine in B offene Umgebung U von x gibt, so daß $\iota_A|_{A\cap U}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_B|_{A\cap U}$-Modul ist. Sei

dazu $x \in A$. Dann wähle man $\tilde{A} \subseteq \tilde{U}$ wie in (2) und setze $U = \tilde{U} \cap B$. Nun ist $\iota_{\tilde{A}}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$-Modul und es gilt nach 1.5

$$\iota_A|_{A\cap U} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \iota_{\tilde{A}}|_{A\cap U}.$$

Damit ist $\iota_{\tilde{A}}|_{A\cap U}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{\tilde{U}}|_{A\cap U} \cong (\mathcal{O}_B|_{A\cap U} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$-Modul. Mit 1.10 ist dann $\iota_A|_{A\cap U}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_B|_{A\cap U}$-Modul.

(3) $\curvearrowright$ (4): Weil $\iota_A|_A$ eine kohärente $\mathcal{O}_B|_A$-Idealgarbe ist, ist $\iota_A|_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ eine kohärente $(\mathcal{O}_B|_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$-Idealgarbe. Wegen $\mathcal{O}_B|_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}|_A$ ist $\iota_A|_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ eine kohärente $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}|_A$-Idealgarbe. Nach 1.10 gibt es einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ mit $A \subseteq \tilde{B}$ und eine kohärente $\mathcal{O}_{\tilde{B}}$-Idealgarbe $\widetilde{\iota_A}$ mit $\iota_A|_A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \widetilde{\iota_A}|_A$.

(4) $\curvearrowright$ (1): Diese Implikation ist auch klar: Man wähle als komplex-analytische Menge die durch die kohärente Idealgarbe $\widetilde{\iota_A}$ induzierte. $\square$

Fortan gilt stets die

1.12. Bemerkung. Sei $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossene Menge. Dann bezeichnet $\mathcal{O}_A$ stets die Garbe $(\mathcal{O}_B/\iota_A)|_A$ von $\mathbb{R}$-Stellenalgebren. Im folgenden wird A stets in dieser Weise als lokal $\mathbb{R}$-geringter Raum aufgefaßt.

Hiermit ergeben sich nun die beiden folgenden Bemerkungen:

1.13. Bemerkung. Sei $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossene Menge. Dann ist $(A, \mathcal{O}_A)$ geometrisch reduziert, das heißt, der kanonische Homomorphismus $\mathcal{O}_A \to \mathcal{C}_A$ ist ein Monomorphismus, wobei $\mathcal{C}_A$ die Garbe der Keime von $\mathbb{R}$-wertigen stetigen Funktionen auf A bezeichnet.

1.14. Bemerkung. Sei $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossene Menge, die eine Komplexifizierung besitzt. Dann ist $\mathcal{O}_A$ eine kohärente Ringgarbe.

Reguläre Punkte und Dimension

1.15. Bezeichnungen. Sei $\mathbb{k}$ ein vollständig bewerteter Körper (im folgenden ist $\mathbb{k}$ immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ist dann $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal $\mathbb{k}$-geringter Raum und $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt im folgenden stets:

$$\operatorname{Reg}_n X = \{x \in X : \mathcal{O}_{X,x} \text{ ist eine reguläre } n\text{-dimensionale } \mathbb{k}\text{-Stellenalgebra}\}.$$

Ferner setze man

$$\operatorname{Reg} X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \operatorname{Reg}_n X \quad \text{und} \quad \operatorname{Sing} X = X \setminus \operatorname{Reg} X.$$

Für eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ analytische Menge $A \subseteq B$ gilt $x \in \operatorname{Reg}_n A$ genau dann, wenn A bei x eine n-dimensionale reell-analytische Mannigfaltigkeit ist. Sei $f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N}(B)$. Dann bezeichnet $\operatorname{Reg}_n(f_1, \ldots, f_l)$ die Menge $\operatorname{Reg}_n(\mathrm{N}(f_1, \ldots, f_l), \mathcal{O}_{\mathbb{R}^N}(B)/(f_1, \ldots, f_l))$.

Weiterhin wird im folgenden stets der topologische Dimensionsbegriff für separable metrische Räume nach [DimThy] benutzt. Damit ist dann insbesondere auch die topologische Dimension eines reellen Mengenkeims und eines komplex-analytischen Mengenkeims definiert. Für einen reell-analytischen Mengenkeim A_x bei $x \in \mathbb{R}^N$ gilt dann nach [Fe66, Satz 2] $\dim A_x = \dim \mathcal{O}_{A_x}$, wobei $\dim A_x$ die topologische Dimension von A_x und $\dim \mathcal{O}_{A_x}$ die Krulldimension der $\mathbb{R}$-Stellenalgebra $\mathcal{O}_{A_x}$ bezeichnet. Für komplex-analytische Mengenkeime $\tilde{A}_x$ bei $x \in \mathbb{C}^N$ gilt entsprechend $\dim \tilde{A}_x = 2 \cdot \dim \mathcal{O}_{\tilde{A}_x}$.

1.16. Proposition. *Ist $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ komplexifizierbare Menge und $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ eine Komplexifizierung. Dann sind für $x \in A$ äquivalent:*

(1) *$x \in \operatorname{Reg}_n A$.*

(2) *$x \in \operatorname{Reg}_n \tilde{A}$.*

Beweis. Es gilt $x \in \operatorname{Reg}_n A$ genau dann, wenn $\tilde{A}_x \cap \mathbb{R}^N_x$ der Keim einer n-dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit ist. Mit [ReAnSp, Proposition III.2.4] ist dies äquivalent dazu, daß $\tilde{A}_x$ der Keim einer komplexen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist. Dies bedeutet aber $x \in \operatorname{Reg}_n \tilde{A}$. □

Damit ergibt sich nun:

1.17. Proposition. *Sei $A \subseteq B$ eine komplexifizierbare Menge in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann ist die Menge $\operatorname{Reg} A$ offen und dicht in A.*

Beweis. Sei $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ eine Komplexifizierung von A. Dann gilt mit 1.16 die Gleichung $\operatorname{Reg} A = A \setminus \operatorname{Sing} \tilde{A}$. Also ist $\operatorname{Reg} A$ offen in A. Angenommen, $\operatorname{Reg} A$ ist nicht dicht in A. Dann gibt es eine in B offene Menge U mit $\emptyset \neq A \cap U \subseteq A \setminus \operatorname{Reg} A$. Mit obiger Proposition folgt dann $A \cap U \subseteq \operatorname{Sing} \tilde{A} \cap U$, also $A_x \subseteq (\operatorname{Sing} \tilde{A})_x \subsetneqq \tilde{A}_x$ im Widerspruch zur Minimalität von $\tilde{A}$. □

Analytische Modellräume

Die für diesen Paragraphen zentrale Definiton lautet:

1.18. Definition. Sei $A \subseteq B$ eine in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ abgeschlossene Menge und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt A eine *n-dimensionale analytische Menge*, falls gilt:

(1) A ist rein n-dimensional.

(2) Es gibt eine Komplexifizierung $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ von A mit $\dim\big((\tilde{A} \cap B) \setminus A\big) < n$.

Der lokal $\mathbb{R}$-geringte Raum $(A, \mathcal{O}_A)$ heißt n-dimensionaler analytischer Modellraum.

Damit folgt sofort die

1.19. Proposition. *Sei $A \subseteq B$ eine n-dimensionale analytische Menge und $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ eine Komplexifizierung von A. Dann gilt:*

(1) *Für alle $x \in \operatorname{Reg} A$ gilt $A_x = (\tilde{A} \cap B)_x$.*

(2) *Es gilt* $\operatorname{Reg} A = \operatorname{Reg}_n A$.

Beweis. Zu (1): Sei $x \in \operatorname{Reg} A$ und $d = \dim_x \tilde{A}$. Angenommen, es gilt

$$A_x \subsetneqq (\tilde{A} \cap B)_x. \qquad (*)$$

Nach 1.15 und 1.16 gibt es eine in B offene Umgebung U von x, so daß $U \cap \tilde{A}$ rein d-dimensional ist. Nun ist $A \cap U \subseteq \tilde{A} \cap U$ eine abgeschlossene Teilmenge. Nach $(*)$ ist die Inklusion echt und damit $\tilde{A} \cap U \setminus A \cap U = \big((\tilde{A} \cap B) \setminus A\big) \cap U$ rein d-dimensional. Also folgt $\dim\big((\tilde{A} \cap B) \setminus A\big) \geq d$. Aus $A \cap U \subseteq \tilde{A} \cap U$ folgt mit der Monotonie der Dimension $n \leq d$. Also folgt $\dim\big((\tilde{A} \cap B) \setminus A\big) \geq n$ im Widerspruch zur Definition.

Zu (2): Sei $x \in \operatorname{Reg}_{n'} A$. Dann gilt $x \in \operatorname{Reg}_{n'} \tilde{A}$. Nach 1.16 gibt es eine in B offene Umgebung U von X, so daß $\tilde{A} \cap U$ rein n'-dimensional ist. Mit (1) folgt die Gleichung $\dim_x A = n'$ und damit ergibt sich $n = n'$. □

Damit kann man nun die folgende Proposition zeigen:

1.20. Proposition. *Sei $A \subseteq B$ eine n-dimensionale analytische Menge. Dann gibt es eine rein n-dimensionale Komplexifizierung von A.*

Beweis. Sei $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ eine Komplexifizierung von A und $\tilde{A} = \bigcup_{i \in I} \tilde{A}_i$ die Zerlegung von $\tilde{A}$ in irreduzible Komponenten. Man setze dann $I_1 = \{i \in I : \tilde{A}_i \cap \operatorname{Reg} A \neq \emptyset\}$, $I_2 = I \setminus I_1$ und $\tilde{A}' = \bigcup_{i \in I_1} \tilde{A}_i$. Dann ist $\tilde{A}' \subseteq \tilde{B}$ komplex-analytisch, und es gilt $\operatorname{Reg} A \subseteq \tilde{A}'$. Da $\operatorname{Reg} A \subseteq A$ dicht ist, folgt $A \subseteq \tilde{A}'$, und wegen $A \subseteq \tilde{A}' \subseteq \tilde{A}$ ist $\tilde{A}'$ eine Komplexifizierung von A. Nun ist $\tilde{A}' = \bigcup_{i \in I_1} \tilde{A}_i$ die Zerlegung von $\tilde{A}'$ in irreduzible Komponenten. Für $i \in I_1$ ist $\operatorname{Reg} A \cap \tilde{A}_i \neq \emptyset$, also wegen 1.19 und 1.16 $\operatorname{Reg}_n \tilde{A} \cap \tilde{A}_i \neq \emptyset$ und damit ist $\tilde{A}_i$ rein n-dimensional. Schließlich ist dann auch $\tilde{A}'$ rein n-dimensional. □

Eine lokale Beschreibung n-dimensionaler analytischer Mengen liefert die

1.21. Proposition. *Sei $A \subseteq B$ eine n-dimensionale analytische Menge in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$, $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ eine Komplexifizierung von A und $x \in A$. Dann gibt es eine in $\tilde{B}$ offene Umgebung $\tilde{U}$ von x und holomorphe Funktionen $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l \in \mathcal{O}_{\tilde{B}}(\tilde{U})$, so daß mit $U = \tilde{U} \cap B$, $f_\lambda = \tilde{f}_\lambda|_U$ für $\lambda = 1, \ldots, l$ gilt:*

(1) $f_\lambda \in \mathcal{O}_B(U)$ *für* $\lambda = 1, \ldots, l$.

(2) $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l) = \iota_{\tilde{A}}|_{\tilde{U}}$.

(3) $(f_1, \ldots, f_l)|_{A \cap U} = \iota_A|_{A \cap U}$.

(4) $A \cap U = \overline{\operatorname{Reg}_n(f_1, \ldots, f_l)}^U$.

Beweis. Sei $x \in A$. Dann gibt es $f_{1x}, \ldots, f_{lx} \in \mathcal{O}_{B,x}$ mit $(f_{1x}, \ldots, f_{lx}) = \iota_{A,x}$. Da $\iota_A|_A$ kohärent ist, gibt es eine in B offene Umgebung U von x und $f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_B(U)$ mit $(f_1, \ldots, f_l)|_{A \cap U} = \iota_A|_{A \cap U}$. Ferner gibt es eine $\omega_{\mathbb{C}^N}$-invariante offene Menge $\tilde{U}$ in $\tilde{B}$ und holomorphe Funktionen $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l \in \mathcal{O}_{\tilde{B}}(\tilde{U})$ mit $\tilde{U} \cap B = U$ und $\tilde{f}_\lambda|_U = f_\lambda$ für $\lambda = 1, \ldots, l$. Nach 1.5 gilt $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l)|_{A \cap U} = \iota_{\tilde{A}}|_{A \cap U}$. Da $\iota_{\tilde{A}}$ hohärent ist, darf man nach eventueller Verkleinerung von U und $\tilde{U}$ annehmen, daß $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l) = \iota_{\tilde{A}}|_{\tilde{U}}$ gilt. Ferner hat man: $\overline{\mathrm{Reg}_n(f_1, \ldots, f_l)}^U = \overline{\mathrm{Reg}_n(A) \cap U}^U = \overline{\mathrm{Reg}(A) \cap U}^U = \overline{\mathrm{Reg}(A) \cap U}^B \cap U = \overline{\mathrm{Reg}(A)}^B \cap U = A \cap U$ □

Die Dichtheit der glatten Punkte reicht nicht aus, um die Kohärenz der Idealgarbe zu erzwingen (man vergleiche [Gr93]).

1.22. Beispiel. Man betrachte die Menge

$$A = \mathrm{N}(x_3 \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 + x_2^2) - x_1^4) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Dann gilt $\mathrm{Reg}\, A \subseteq \{(0, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$, und A ist rein 2-dimensional. Insbesondere gilt $\overline{\mathrm{Reg}\, A}^A = A$. Aber A ist kein 2-dimensionaler analytischer Modellraum, denn

$$\tilde{A} = \mathrm{N}(z_3 \cdot (z_1 + z_2) \cdot (z_1^2 + z_2^2) - z_1^4) \subseteq \mathbb{C}^3$$

induziert die Komplexifizierung von $A_{(0,0,0)}$, aber nicht die Komplexifizierung von $A_{(0,0,x_3)}$ für $x_3 \neq 0$. Siehe dazu [ReAnSp, Bemerkung III.2.12].

Den Zusammenhang mit den klassischen Begriffen (siehe [Lo65]) liefert der folgende

1.23. Satz. *Sei $A \subseteq B$ eine n-dimensionale analytische Menge. Dann ist A eine abgeschlossene semi-analytische Menge in B im Sinne von Lojasiewicz.*

Beweis. Weil $A \subseteq B$ abgeschlossen ist, reicht es zu zeigen, daß es für alle $x \in A$ eine in B offene Umgebung U von x gibt, so daß $A \cap U \subseteq U$ semi-analytisch ist. Sei dazu $x \in A$. Dann wähle man eine in B offene Umgebung U von x und $f_1, \ldots, f_l \in \mathcal{O}_B(U)$ wie in 1.21. Dann ist

$$\mathrm{Sing}\, A \cap U = \{x \in \mathrm{N}(f_1, \ldots, f_l) : \mathrm{rg}(\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_l)(x)) < N - n\}$$

die Nullstellenmenge von $f_1, \ldots, f_l$ und den $(N-n)$-Minoren der Jacobimatrix von $(f_1, \ldots, f_l)$, also semi-analytisch in U. Damit ist auch $\mathrm{Reg}_n(f_1, \ldots, f_l) = \mathrm{N}(f_1, \ldots, f_l) - \mathrm{Sing}\, A \cap U$ semi-analytisch in U. Da $U \subseteq B$ offen ist, gilt $\overline{\mathrm{Reg}\, A}^B \cap U = \overline{\mathrm{Reg}\, A \cap U}^B \cap U$. Somit ist auch

$$\overline{\mathrm{Reg}_n(f_1, \ldots, f_l)}^U = \overline{\mathrm{Reg}\, A \cap U}^U = \overline{\mathrm{Reg}\, A \cap U}^B \cap U = \overline{\mathrm{Reg}\, A}^B \cap U = A \cap U$$

semi-analytisch in U. Damit ist $A \subseteq B$ semi-analytisch in U. □

Analytische Räume

Damit kann man schließlich definieren:

1.24. Definition. Ein lokal $\mathbb{R}$-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt n-dimensionaler analytischer Raum, falls gilt:

(1) X ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.

(2) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x, einen n-dimensionalen analytischen Modellraum $(A, \mathcal{O}_A)$ und einen Isomorphismus

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (A, \mathcal{O}_A)$$

von lokal $\mathbb{R}$-geringten Räumen.

Ein Morphismus von lokal-geringten Räumen zwischen zwei analytischen Räumen heißt analytische Abbildung.

1.25. Bemerkung. Die analytischen Räume mit den analytischen Abbildungen als Morphismen bilden eine Kategorie, die Kategorie der analytischen Räume. Die Kategorie der analytischen Räume ist eine volle Unterkategorie der Kategorie der lokal-geringten Räume.

1.26. Bemerkung. Wegen 1.13 ist ein analytischer Raum stets reduziert. Daher ist eine analytische Abbildung durch die stetige Abbildung bestimmt. Der Garbenmorphismus ist das Zurückliften von analytischen Funktionen.

Die elementaren Eigenschaften von analytischen Räumen beschreibt die

1.27. Proposition. *Für einen n-dimensionalen analytischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ gilt:*

(1) *Die Menge* $\operatorname{Reg} X$ *ist offen und dicht in X. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann regulär, wenn es eine offene Umgebung U von x gibt, die bianalytisch abbildbar ist auf einen Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(2) *Die Menge* $\operatorname{Sing} X$ *ist abgeschlossen und nirgends dicht in X sowie höchstens $(n-1)$-dimensional. Ferner wird* $\operatorname{Sing} X$ *in X lokal durch endlich viele Gleichungen gegeben.*

(3) *Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ ist kohärent.*

Beweis. Man darf annehmen, daß $(X, \mathcal{O}_X)$ ein analytischer Modellraum $(A, \mathcal{O}_A)$ ist.

Zu (1): Dies ist 1.17 mit 1.15.

Zu (2): Aus (1) folgt, daß $\operatorname{Sing} A$ abgeschlossen und nirgends dicht ist. Für $x \in A$ wähle man $\tilde{U} \subset \mathbb{C}^N$, $f_1, \ldots, f_l$ und $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l$ wie in 1.21. Dann gilt:

$$\operatorname{Sing} A \cap U = \{x \in \mathrm{N}(f_1, \ldots, f_l) : \operatorname{rg}(\operatorname{Jac}(f_1, \ldots, f_l)(x)) < N - n\}.$$

Also ist $\operatorname{Sing} A$ lokal durch endlich viele Gleichungen gegeben. Nach 1.20 gibt es eine rein n-dimensionale Komplexifizierung $\tilde{A} \subseteq \mathbb{C}^N$ von A. Mit $\dim \operatorname{Sing} \tilde{A} < n$ folgt dann $\dim \operatorname{Sing} A < n$.

Zu (3): Dies ist 1.14. □

Zum Abschluß dieses Paragraphen sollen noch einige Beispiele analytischer Räume gegeben werden.

1.28. Beispiel. Jede n-dimensionale reell-analytische Mannigfaltigkeit ist ein n-dimensionaler analytischer Raum.

1.29. Beispiel. Jede im Sinne von [Ca57] rein n-dimensionale kohärente analytische Menge $A \subseteq B$ in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$ ist ein n-dimensionaler analytischer Modellraum. Allgemeiner ist jede rein n-dimensionale kohärente analytische Varietät im Sinne von [ReAnSp] ein n-dimensionaler Raum.

1.30. Beispiel. Sei X ein rein n-dimensionaler reduzierter komplexer Raum. Dann kann man X genau dann in natürlicher Weise als $(2 \cdot n)$-dimensionalen analytischen Raum auffassen, wenn für jeden Punkt $x \in X$ jeder Primkeim von X_x in einer Umgebung von x irreduzibel bleibt. Siehe dazu [ReAnSp, Proposition III.2.15]. Insbesondere kann man damit jeden rein n-dimensionalen lokal-irreduziblen komplexen Raum als $(2 \cdot n)$-dimensionalen analytischen Raum auffassen.

Bei den obigen analytischen Räumen sind die den Modellräumen zugrunde liegenden Mengen stets analytische Mengen in Bereichen des $\mathbb{R}^N$. Ein Beispiel bei dem das nicht der Fall ist, ist das abschließende

1.31. Beispiel. Man betrachte $\mathrm{N}(x_1^2 - x_2^2 \cdot x_3) \subseteq \mathbb{R}^3$. Dies ist der reelle Teil von Whitneys umbrella. $\iota_{\mathrm{N}(x_1^2 - x_2^2 \cdot x_3)}$ ist nicht kohärent bei $(0,0,0)$. Aber $A = \mathrm{N}(x_1^2 - x_2^2 \cdot x_3) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$ ist ein 2-dimensionaler analytischer Modellraum mit Komplexifizierung $\tilde{A} = \mathrm{N}(z_1^2 - z_2^2 \cdot z_3) \subseteq \mathbb{C}^3$. Es gilt $\tilde{A} \cap \mathbb{R}^3 \setminus A = \{(0,0,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 < 0\}$. Dieser „Stachel“ ist 1-dimensional.

2 Komplexifizierung

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt werden zuerst Komplexifizierungen von analytischen Räumen und analytischen Abbildungen definiert. Dann wird die Existenz der Komplexifizierung von analytischen Abbildung gezeigt. Die Eindeutigkeit der Komplexifizierung einer analytischen Abbildung erhält man als Keim entlang des Definitonsraumes. Hieraus folgt dann auch die Eindeutigkeit der Komplexifizierung eines analytischen Raumes als Keim entlang des analytischen Raumes.

Um die Existenz der Komplexifizierung eines analytischen Raumes zu zeigen, benutzt man den Beweis von [WhBr59, Theorem 1] für Mannigfaltigkeiten. Er überträgt sich auf den allgemeinen Fall.

Zum Abschluß wird noch die Komplexifizierung von kohärenten Moduln eingeführt und deren Existenz gezeigt.

Der Begriff der Komplexifizierung

Zunächst braucht man die

2.1. Definition. Sei $\tilde{X}$ ein reduzierter komplexer Raum. Dann heißt eine stetige Abbildung $\omega_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ eine *Konjugation*, falls gilt

(1) $\omega_{\tilde{X}}$ ist eine Involution, das heißt, es gilt $\omega_{\tilde{X}}^2 = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$.

(2) Für alle offenen Mengen $\tilde{U}$ in $\tilde{X}$ gilt $\overline{\tilde{f} \circ \omega_{\tilde{X}}} \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\omega_{\tilde{X}}(\tilde{U}))$ für alle $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{U})$.

Sind $\tilde{X}_1$ und $\tilde{X}_2$ komplexe Räume mit Konjugationen $\omega_{\tilde{X}_1}$ und $\omega_{\tilde{X}_2}$, so heißt eine holomorphe Abbildung $\tilde{F} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ eine *Abbildung von komplexen Räumen mit Konjugation*, falls das Diagramm topologischer Räume

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{X}_2 \\ {\scriptstyle \omega_{\tilde{X}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{\tilde{X}_2}} \\ \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{X}_2 \end{array}$$

kommutiert.

2.2. Bemerkung. Die komplexen Räume mit Konjugation bilden zusammmen mit den Abbildungen von komplexen Räumen mit Konjugation eine Kategorie, die Kategorie der komplexen Räume mit Konjugation.

Man fixiert nun noch die

2.3. Bezeichnungen. Im folgenden bezeichnet $\omega_{\mathbb{C}^N}$ stets die Konjugation auf dem $\mathbb{C}^N$, die man durch komponentenweises konjugieren erhält. Ist $\tilde{X}$ ein komplexer Raum mit Konjugation $\omega_{\tilde{X}}$ und $\tilde{A} \subseteq \tilde{X}$ ein $\omega_{\tilde{X}}$-invarianter komplexer Unterraum, so bezeichnet $\omega_{\tilde{A}}$ die durch Einschränkung gegebene Konjugation auf $\tilde{A}$. Ferner bezeichnet $\mathrm{Fix}\,\omega_{\tilde{X}}$ die Fixpunktmenge von $\omega_{\tilde{X}}$.

Damit kann man die für diesen Paragraphen zentrale Definition geben:

2.4. Definition. Sei X ein n-dimensionaler analytischer Raum. Ein komplexer Raum $\tilde{X}$ mit Konjugation $\omega_{\tilde{X}}$ heißt eine Komplexifizierung von X, falls gilt:

(1) $X \subseteq \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}}$ ist abgeschlossen und $\dim(\operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}} \setminus X) < n$.

(2) Für alle $x \in X$ gibt es eine offene $\omega_{\tilde{X}}$-invariante Umgebung $\tilde{U}$ von x, eine in einem $\omega_{\mathbb{C}^N}$-invarianten Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ $\omega_{\mathbb{C}^N}$-invariante komplex-analytische Menge $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ und einen Isomorphismus $\tilde{\iota} : \tilde{U} \to \tilde{A}$ von komplexen Räumen mit Konjugation, so daß $A = \tilde{\iota}(\tilde{U} \cap X) \subseteq B = \operatorname{Fix} \tilde{B}$ ein n-dimensionaler analytischer Modellraum und $\tilde{A}$ die Komplexifizierung von A ist.

Die Verträglichkeit mit dem schon eingeführten Begriff der Komplexifizierung einer reellen Menge liefert das folgende

2.5. Beispiel. Sei $A \subseteq B$ eine n-dimensionale analytische Menge in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann ist eine komplex-analytische Menge $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ in einem Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$, die eine Komplexifizierung im Sinne von 1.6 ist, auch eine Komplexifizierung im Sinne von 2.4.

Ferner definiert man noch

2.6. Definition. Sei $F : X_1 \to X_2$ eine Abbildung analytischer Räume. Dann heißt eine Abbildung $\tilde{F} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ von komplexen Räumen mit Konjugation eine *Komplexifizierung von F*, falls gilt:

(1) $\tilde{X}_\nu$ ist für $\nu = 1, 2$ eine Komplexifizierung von X_ν.

(2) $\tilde{F}|_{X_1} = F$.

Komplexifizierung von analytischen Abbildungen

Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Komplexifizierung von analytischen Abbildungen behandelt der

2.7. Satz. *Sei $F : X_1 \to X_2$ eine Abbildung analytischer Räume und sei $\tilde{X}_\nu$ für $\nu = 1, 2$ eine Komplexifizierung von X_ν. Dann gilt:*

(1) *Seien $\tilde{U}_1'$ und $\tilde{U}_1''$ zwei offene $\omega_{\tilde{X}_1}$-invariante Umgebungen von X_1 in $\tilde{X}_1$ und $\tilde{F}' : \tilde{U}_1' \to \tilde{X}_2$ sowie $\tilde{F}'' : \tilde{U}_1'' \to \tilde{X}_2$ zwei Komplexifizierungen von F, so gibt es eine offene $\omega_{\tilde{X}_1}$ invariante Umgebung $\tilde{U}_1$ von X_1 in $\tilde{X}_1$ mit $\tilde{U}_1 \subseteq \tilde{U}_1' \cap \tilde{U}_1''$ und*

$$\tilde{F}'|_{\tilde{U}_1} = \tilde{F}''|_{\tilde{U}_1}$$

(2) *Es gibt eine offene $\omega_{\tilde{X}_1}$-invariante Umgebung $\tilde{U}_1$ von X_1 in $\tilde{X}_1$ und eine Komplexifizierung $\tilde{F} : \tilde{U}_1 \to \tilde{X}_2$ von F.*

(3) *Ist F bianalytisch, so gibt es für $\nu = 1, 2$ offene $\omega_{\tilde{X}_\nu}$-invariante Umgebungen $\tilde{U}_\nu$ von X_ν in $\tilde{X}_\nu$ und eine biholomorphe Abbildung $\tilde{F} : \tilde{U}_1 \to \tilde{U}_2$, die eine Komplexifizierung von F ist.*

Beweis. Sei $\tilde{X}_\nu$ eine Komplexifizierung von X_ν für $\nu = 1, 2$.

Zu (1): Ohne Einschränkung darf man $\tilde{U}_1' = \tilde{U}_1''$ annehmen. Sei $x_1 \in X_1$ und $x_2 = F(x_1)$. Dann wähle man eine offene Umgebung $\tilde{U}_2^{(x_1)}$ von x_2, einen Bereich $\tilde{B}_2^{(x_1)} \subseteq \mathbb{C}^{N_2^{(x_1)}}$ und eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota}_2^{(x_1)} : \tilde{U}_2^{(x_1)} \to \tilde{B}_2^{(x_1)}$. Ferner wähle man eine offene Umgebung $\tilde{U}_1^{(x_1)}$ von x_1 mit $\tilde{U}_1^{(x_1)} \subseteq \tilde{U}_1' \cap \tilde{F}'^{-1}(\tilde{U}_2^{(x_1)}) \cap \tilde{F}''^{-1}(\tilde{U}_2^{(x_1)})$, einen Bereich $\tilde{B}_1^{(x_1)} \subseteq \mathbb{C}^{N_1^{(x_1)}}$ und eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota}_1^{(x_1)} : \tilde{U}_1^{(x_1)} \to \tilde{B}_1^{(x_1)}$, so daß $\tilde{A}_1^{(x_1)} = \tilde{\iota}_1^{(x_1)}(\tilde{U}_1^{(x_1)})$ eine Komplexifizierung von $A_1^{(x_1)} = \tilde{\iota}_1^{(x_1)}(\tilde{U}_1^{(x_1)} \cap X_1)$ ist. Nach eventuellem Verkleinern von $\tilde{U}_1^{(x_1)}$ und $\tilde{B}_1^{(x_1)}$ darf man annehmen, daß es holomorphe Abbildungen

$$\tilde{F}'^{(x_1)}, \tilde{F}''^{(x_1)} : \tilde{B}_1^{(x_1)} \to \tilde{B}_2^{(x_1)}$$

gibt mit

$$\tilde{F}'^{(x_1)}|_{\tilde{A}_1^{(x_1)}} = \tilde{\iota}_2^{(x_1)} \circ \tilde{F}' \circ (\tilde{\iota}_1^{(x_1)})^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{F}''^{(x_1)}|_{\tilde{A}_1^{(x_1)}} = \tilde{\iota}_2^{(x_1)} \circ \tilde{F}'' \circ (\tilde{\iota}_1^{(x_1)})^{-1}.$$

Nun ist $\tilde{A}_1'^{(x_1)} = \{z \in \tilde{B}_1^{(x_1)} : \tilde{F}'^{(x_1)}(z) = \tilde{F}''^{(x_1)}(z)\}$ eine komplex-analytische Menge in $\tilde{B}_1^{(x_1)}$, die $A_1^{(x_1)}$ umfaßt. Daher kann man nach eventuellem Verkeinern von $\tilde{U}_1^{(x_1)}$ und $\tilde{B}_1^{(x_1)}$ erreichen, daß $\tilde{A}_1^{(x_1)} \subseteq \tilde{A}_1'^{(x_1)}$ gilt. Schließlich ist

$$\tilde{U}_1 = \bigcup_{x_1 \in X_1} \tilde{U}_1^{(x_1)}$$

eine offene Umgebung von X_1 mit $\tilde{F}'|_{\tilde{U}_1} = \tilde{F}''|_{\tilde{U}_1}$. Die Menge $\tilde{U}_1 \cap \omega_{\tilde{X}_1}(\tilde{U}_1)$ ist dann auch noch $\omega_{\tilde{X}_1}$-invariant.

Zu (2): Sei $x_1 \in X_1$ und $x_2 = F(x_1)$. Nach Definition der Komplexifizierung wähle man eine offene Umgebung $\tilde{U}_2^{(x_1)}$ von x_2, einen Bereich $\tilde{B}_2^{(x_1)} \subseteq \mathbb{C}^{N_2^{(x_1)}}$ und eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota}_2^{(x_1)} : \tilde{U}_2^{(x_1)} \to \tilde{B}_2^{(x_1)}$, so daß $\tilde{A}_2^{(x_1)} = \tilde{\iota}_2^{(x_1)}(\tilde{U}_2^{(x_1)})$ eine Komplexifizierung von $A_2^{(x_1)} = \tilde{\iota}_2^{(x_1)}(\tilde{U}_2^{(x_1)} \cap X_2)$ ist. Dann wähle man eine offene Umgebung $\tilde{U}_1^{(x_1)}$ von x_1 mit $\tilde{U}_1^{(x_1)} \cap X_1 \subseteq F^{-1}(\tilde{U}_2^{(x_1)} \cap X_2)$, einen Bereich $\tilde{B}_1^{(x_1)} \subseteq \mathbb{C}^{N_1^{(x_1)}}$ und eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota}_1^{(x_1)} : \tilde{U}_1^{(x_1)} \to \tilde{B}_1^{(x_1)}$, so daß $\tilde{A}_1^{(x_1)} = \tilde{\iota}_1^{(x_1)}(\tilde{U}_1^{(x_1)})$ eine Komplexifizierung von $A_1^{(x_1)} = \tilde{\iota}_1^{(x_1)}(\tilde{U}_1^{(x_1)} \cap X_1)$ ist. Nach eventuellem Verkleinern von $\tilde{U}_1^{(x_1)}$ und $\tilde{B}_1^{(x_1)}$ darf man annehmen, daß es eine mit den Konjugationen verträgliche holomorphe Abbildung

$$\tilde{F}_{x_1}' : \tilde{B}_1^{(x_1)} \to \tilde{B}_2^{(x_1)}$$

gibt mit

$$\tilde{F}_{x_1}'|_{A_1^{(x_1)}} = \iota_2^{(x_1)} \circ F \circ (\iota_1^{(x_1)})^{-1}.$$

Analog zu (1), darf man nach weiterem Verkleinern von $\tilde{U}_1^{(x_1)}$ und $\tilde{B}_1^{(x_1)}$ annehmen, daß

$$\tilde{F}'_{x_1}(\tilde{A}_1^{(x_1)}) \subseteq \tilde{A}_2^{(x_1)}$$

gilt. Man setze nun $\tilde{F}_{x_1} = (\tilde{\iota}_2^{(x_1)})^{-1} \circ \tilde{F}'_{x_1} \circ \tilde{\iota}_1^{(x_1)}$. Dann ist $\tilde{F}_{x_1} : \tilde{U}_1^{(x_1)} \to \tilde{X}_2$ eine holomorphe Abbildung mit $\tilde{F}_{x_1}|_{\tilde{U}_1^{(x_1)} \cap X_1} = F|_{\tilde{U}_1^{(x_1)} \cap X_1}$.

Damit gibt es eine Familie $(\tilde{U}_1^{(\iota)})_{\iota \in I}$ von offenen $\omega_{\tilde{X}_1}$-invarianten Teilmengen von $\tilde{X}_1$ mit holomorphen Abbildungen $\tilde{F}_\iota : \tilde{U}_1^{(\iota)} \to \tilde{X}_2$, die mit den Konjugationen verträglich sind und für die $\tilde{F}_\iota|_{\tilde{U}_1^{(\iota)} \cap X_1} = F|_{\tilde{U}_1^{(\iota)} \cap X_1}$ gilt. Ferner darf man annehmen, daß es zu jedem Punkt $x_1 \in X_1$ eine offene Umgebung $\tilde{U}_1^{(x_1)}$ gibt, die nur endlich viele $\tilde{U}_1^{(\iota)}$ trifft. Nach eventuellem Verkleinern darf man wegen (1) annehmen, daß auf diesen sich die Abbildungen $\tilde{F}_\iota$ verkleben. Damit erhält man eine Komplexifizierung $\tilde{F}$ von F auf $\tilde{U}_1 = \bigcup_{x_1 \in X_1} \tilde{U}_1^{(x_1)}$. Ersetzt man $\tilde{U}_1$ durch $\tilde{U}_1 \cap \omega_{\tilde{X}_1}(\tilde{U}_1)$, so ist $\tilde{U}_1$ auch $\omega_{\tilde{X}_1}$-invariant.

Zu (3): Es bezeichne G die reell-analytische Abbildung $F^{-1} : X_2 \to X_1$. Nach (2) gibt es eine in $\tilde{X}_1$ offene $\omega_{\tilde{X}_1}$-invarinate Umgebung $\tilde{U}_1''$ von X_1 und eine Abbildung $\tilde{F} : \tilde{U}_1'' \to \tilde{X}_2$ von komplexen Räumen mit Konjugation, so daß $\tilde{F}|_{X_1} = F$ gilt. Analog gibt es die Komplexifizierung $\tilde{G} : \tilde{U}_2'' \to \tilde{X}_1$ von G. Nun ist $\tilde{U}_1'' \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_2'')$ eine in $\tilde{X}_1$ offene Umgebung von X_1 und die Einschränkung der holomorphen Abbildung $\tilde{G} \circ \tilde{F}|_{\tilde{U}_1'' \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_2'')} : \tilde{U}_1'' \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_2'') \to \tilde{X}_1$ auf X_1 ist gleich id_{X_1}. Also gibt es nach (1) eine in $\tilde{X}_1$ offene $\omega_{\tilde{X}_1}$-invariante offene Umgebung $\tilde{U}_1'$ von X_1 mit $\tilde{U}_1' \subseteq \tilde{U}_1'' \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_2'')$, so daß gilt:

$$\tilde{G} \circ \tilde{F}|_{\tilde{U}_1'} = \mathrm{id}_{\tilde{U}_1'} \tag{$*$}$$

Entsprechend gibt es eine in $\tilde{X}_2$ offene $\omega_{\tilde{X}_2}$-invariante Umgebung $\tilde{U}_2'$ von X_2 mit $\tilde{U}_2' \subseteq \tilde{U}_2'' \cap \tilde{G}^{-1}(\tilde{U}_1'')$ und

$$\tilde{F} \circ \tilde{G}|_{\tilde{U}_2'} = \mathrm{id}_{\tilde{U}_2'} \tag{$**$}$$

Man setze $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_1' \cap \tilde{F}^{-1}(\tilde{U}_2')$ und $\tilde{U}_2 = \tilde{U}_2' \cap \tilde{G}^{-1}(\tilde{U}_1')$. Dann sind $\tilde{U}_\nu$ für $\nu = 1, 2$ offene $\omega_{\tilde{X}_\nu}$ Umgebungen von X_ν in $\tilde{X}_\nu$. Ferner gilt $\tilde{F}(\tilde{U}_1) \subseteq \tilde{U}_2$ und $\tilde{G}(\tilde{U}_2) \subseteq \tilde{U}_1$. Bezeichnet man die Einschränkungen von $\tilde{F}$ und $\tilde{G}$ auf $\tilde{U}_1$ beziehungsweise $\tilde{U}_2$ wieder mit $\tilde{F}$ und $\tilde{G}$, so hat man holomorphe Abbildungen

$$\tilde{F} : \tilde{U}_1 \to \tilde{U}_2 \quad \text{und} \quad \tilde{G} : \tilde{U}_2 \to \tilde{U}_1$$

mit

$$\tilde{F}|_{X_1} = F \quad \text{und} \quad \tilde{G}|_{X_2} = G.$$

Aus ($*$) und ($**$) folgt dann

$$\tilde{G} \circ \tilde{F} = \mathrm{id}_{\tilde{U}_1} \quad \text{und} \quad \tilde{F} \circ \tilde{G} = \mathrm{id}_{\tilde{U}_2}.$$

Also ist $\tilde{F} : \tilde{U}_1 \to \tilde{U}_2$ biholomorph mit $\tilde{F}|_{X_1}$. □

Komplexifizierung von analytischen Räumen

Zunächst zeigt man die Eindeutigkeit der Komplexifizierung als Raumkeim entlang X.

2.8. Satz. *Sei X ein analytischer Raum und $\tilde{X}_1$ und $\tilde{X}_2$ zwei Komplexifizierungen von X. Dann gibt es für $\nu = 1, 2$ offene $\omega_{\tilde{X}_\nu}$-invariante Umgebungen $\tilde{U}_\nu$ von X in $\tilde{X}_\nu$ und einen Isomorphismus $\tilde{U}_1 \cong \tilde{U}_2$ von komplexen Räumen mit Konjugation.*

Beweis. Man betrachte die analytische Abbildung id_X. Mit 2.7 folgt die Behauptung. □

Ferner hat man den wichtigen

2.9. Satz. *Jeder n-dimensionale analytische Raum X besitzt eine Komplexifizierung $\tilde{X}$.*

Beweis. X ist lokal-kompakt und hat eine abzählbare Basis der Topologie. Daher ist X parakompakt.

Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x, einen Bereich $\tilde{B}_x \subseteq \mathbb{C}^{N_x}$, eine komplex-analytische Menge $\tilde{A}_x \subseteq \tilde{B}_x$ und eine reell-analytische Abbildung $\iota_x : U_x \to B_x$ mit $B_x = \tilde{B}_x \cap \mathbb{R}^{N_x}$, die einen Isomorphismus auf den n-dimensionalen analytischen Modellraum $A_x = \iota_x(U_x)$ induziert und $\tilde{A}_x$ eine Komplexifizierung von A ist mit $\dim(\tilde{A} \cap B \setminus A) < n$.

Man wird nun versuchen, eine Komplexifizierung von X durch geeignetes Verkleben der $\tilde{A}_x$ zu konstruieren. Für reelle Mannigfaltigkeiten ist dies in [WhBr59, Theorem 1] durchgeführt. Der Beweis überträgt sich direkt auf analytische Räume, da nur Aussagen aus 2.7 und die Tatsache, daß offene Unterräume von analytischen Modellräumen analytische Modellräume sind, benutzt werden. Es werden im wesenlichen nur topologische Schlüsse durgeführt. In [Fe66, Satz 6] ist der gleiche Beweis nocheinmal aufgeschrieben worden für kohärente analytische Räume im Sinne von [Fe66], das sind analytische Räume im Sinne dieser Arbeit bei denen bei den Modellräumen der Stachel die leere Menge ist. □

2.10. Bemerkung. Wie im Beweis von 1.20 zeigt man, daß jeder n-dimensionale analytische Raum eine rein n-dimensionale Komplexifizierung besitzt.

Komplexifizierung von kohärenten Garben

2.11. Definition. Sei X ein n-dimensionaler Raum und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann heißt ein kohärenter $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-Modul $\tilde{\mathcal{F}}$ eine *Komplexifizierung von $\mathcal{F}$*, falls gilt:

(1) $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ ist eine Komplexifizierung von X.

(2) $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \tilde{\mathcal{F}}|_X$ als $(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$-Moduln.

Für den Beweis der Existenz der Komplexifizierung braucht man die

2.12. Proposition. *Sei* $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ *ein komplexer Raum und* $X \subseteq \tilde{X}$ *ein abgeschlossener topologischer Unterraum. Für einen* $\mathcal{O}_{\tilde{X}}|_X$*-Modul* $\mathcal{F}$ *sind dann äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ *ist ein kohärenter* $\mathcal{O}_{\tilde{X}}|_X$*-Modul.*

(2) *Es gibt eine offene Umgebung* $\tilde{U}$ *von* X *in* $\tilde{X}$ *und einen kohärenten* $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$*-Modul* $\tilde{\mathcal{F}}$ *mit* $\mathcal{F} \cong \tilde{\mathcal{F}}|_X$.

Beweis. [ReAnSp, Proposition I.2.8] □

Damit zeigt man:

2.13. Satz. *Sei* X *ein analytischer Raum. Dann besitzt jeder kohärente* $\mathcal{O}_X$*-Modul* $\mathcal{F}$ *eine Komplexifizierung* $\tilde{\mathcal{F}}$.

Beweis. Sei $\tilde{X}$ eine Komplexifizierung von $\tilde{X}$. Nach 1.10 ist der $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-Modul $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ kohärent. Mit 2.12 gibt es dann eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von X in $\tilde{X}$ und einen kohärenten $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$-Modul $\tilde{\mathcal{F}}$ mit $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \tilde{\mathcal{F}}|_X$. Also ist $\tilde{\mathcal{F}}$ eine Komplexifizierung von $\mathcal{F}$. □

3 Steinsche Schläuche

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe von differenzierbaren streng plurisubharmonischen Funktionen gezeigt, daß jeder analytische Raum in seiner Komplexifizierung eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen besitzt. Dazu wird der analytische Raum als Nullstellenmenge einer nicht-negativen streng plurisubharmonischen Funktion in einer Umgebung von sich in seiner Komplexifizierung geschrieben.

Zum Abschluß werden Steinsche Schläuche benutzt, um einige Ergebnisse von Steinschen Räumen auf analytische Räume zu übertragen.

Zu Beginn werden die benötigten Tatsachen über differenzierbare und streng plurisubharmonische Funktionen auf komplexen Räumen bereitgestellt. Dabei verallgemeinert man den klassischen Begriff der Differenzierbarkeit, wie er in [Diff2] eingeführt wird, auf komplexe Räume.

Differenzierbare Funktionen auf komplexen Räumen

Zunächst definiert man wie üblich:

3.1. Definition. Sei $\tilde{X}$ ein komplexer Raum und $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Dann heißt eine reelle Funktion $f : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ *r-mal differenzierbar*, falls es zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$, eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\imath} : \tilde{U} \to \tilde{B}$ in einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ und eine im klassischen Sinne r-mal differenzierbare Funktion $F : \tilde{B} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f|_{\tilde{U}} = F \circ \tilde{\imath}.$$

3.2. Bemerkung. Man überlegt sich leicht, daß die folgenden Aussagen richtig sind:

(1) Ist $\tilde{X}$ ein Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$, so stimmt der Begriff der r-mal differenzierbaren Funktion im Sinne von 3.1 mit dem klassischen Begriff überein.

(2) Sei $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ holomorph und $f : \tilde{X}_2 \to \mathbb{R}$ ein r-differenzierbare Funktion. Dann ist $f \circ \tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \mathbb{R}$ auch r-mal differenzierbar.

(3) Daß f differenzierbar ist, ist unabhängig von der Einbettung. Dies bedeutet: Ist $f : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ r-mal differenzierbar, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $\tilde{\imath} : \tilde{U} \to \tilde{B}$ eine abgeschlossene Einbettung einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$ in einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{R}^N$, so gibt es eine im klassischen Sinne r-mal differenzierbare Funktion $F : \tilde{B} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{\tilde{U}} = F \circ \tilde{\imath}$.

3.3. Bezeichnung. Sei $\tilde{X}$ ein komplexer Raum und $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Jede offene Menge $\tilde{U}$ faßt man als offenen komplexen Unterraum auf. Die Menge der r-mal differenzierbaren Funktionen auf $\tilde{U}$ werde mit $\mathcal{C}^r_{\tilde{X}}(\tilde{U})$ bezeichnet. Ist $\tilde{U}' \subseteq \tilde{U}$ offen, so ist die offene Einbettung $\tilde{\imath} : \tilde{U}' \to \tilde{U}$ holomorph. Ist nun $f \in \mathcal{C}^r_{\tilde{X}}(\tilde{U})$, so ist $f \circ \tilde{\imath} \in \mathcal{C}^r_{\tilde{X}}(\tilde{U}')$. Die dadurch gegebenen Restriktionsabbildungen werden mit $\rho^{\tilde{U}}_{\tilde{U}'} : \mathcal{C}^r_{\tilde{X}}(\tilde{U}) \to \mathcal{C}^r_{\tilde{X}}(\tilde{U}')$ bezeichnet. Es ist klar, daß das Paar von Familien $(\mathcal{C}^r_{\tilde{X}}(\tilde{U}), \rho^{\tilde{U}}_{\tilde{U}'})$ eine Garbe definiert, die im folgenden mit $\mathcal{C}^r_{\tilde{X}}$ bezeichnet wird und die Garbe von Keimen von r-mal differenzierbaren reellen Funtionen heißt.

Nun sollen zwei klassische Resultate über differenzierbare Funktionen über dem $\mathbb{R}^N$ zitiert werden, die man im folgenden braucht.

3.4. Satz. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene Menge. Dann gibt es eine Funktion $F \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^N}(\mathbb{R}^N)$ mit $A = \mathrm{N}(F)$.*

Beweis. Dies ist [AnFu, Proposition 2.3.4]. □

3.5. Satz. *Sei K eine kompakte und A eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$. Sind dann K und A disjunkt, so gibt es eine Funktion $F \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^N}(\mathbb{R}^N)$ mit:*

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^N$.

(2) $F|_K = 1$.

(3) $F|_A = 0$.

Beweis. Dies ist [Diff2, Satz III.7.2]. □

Hiermit zeigt man das folgende

3.6. Lemma. *Zu jedem Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eines komplexen Raumes $\tilde{X}$ gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$, so daß gilt: Zu je zwei disjunkten und in $\tilde{X}$ abgeschlossenen Teilengen $\tilde{A}_1$ und $\tilde{A}_2$ von $\tilde{U}$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty_{\tilde{X}}(\tilde{U})$ mit:*

(1) $0 \leq f(\tilde{x}) \leq 1$ *für alle* $\tilde{x} \in \tilde{U}$.

(2) $f|_{\tilde{A}_1} = 1$.

(3) $f|_{\tilde{A}_2} = 0$.

Beweis. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U}'$ von $\tilde{x}$ und eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\imath} : \tilde{U}' \to \tilde{B}$ in einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$. Da $\tilde{X}$ lokalkompakt ist, gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$ mit $\tilde{U} \subset\subset \tilde{U}'$. Seien nun $\tilde{A}_1$ und $\tilde{A}_2$ zwei disjunkte und in $\tilde{X}$ abgeschlossene Teilmengen von $\tilde{U}$. Dann sind sie auch kompakt. Damit sind $\tilde{\imath}(\tilde{A}_1)$ und $\tilde{\imath}(\tilde{A}_2)$ kompakte und disjunkte Teilmengen des $\mathbb{C}^N$. Man wähle nun F wie in 3.5. Dann hat $f = F \circ \tilde{\imath}$ die gewünschten Eigenschaften. □

Damit folgt nun:

3.7. Satz. *Sei $\tilde{X}$ ein komplexer Raum. Dann ist $(\tilde{X}, \mathcal{C}^r_{\tilde{X}})$ für $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ein lokal $\mathbb{R}$-geringter Raum. Ferner ist jeder $\mathcal{C}^r_{\tilde{X}}$-Modul weich.*

Beweis. Es ist klar, daß $\mathcal{C}^r_{\tilde{X}}$ eine Garbe von $\mathbb{R}$-Stellenalgebren ist. Mit [TF, Théorème II.3.7.1] folgt aus 3.6 die Weichheit von $\mathcal{C}^r_{\tilde{X}}$. Nach [TF, Théorème II.3.7.1] folgt auch die Weichheit jeder $\mathcal{C}^r_{\tilde{X}}$-Modulgarbe. □

Als leichte Folgerung ergibt sich:

3.8. Korollar. *Sei $\tilde{\mathfrak{U}}$ eine offene Überdeckung des komplexen Raumes $\tilde{X}$. Dann gibt es eine $\tilde{\mathfrak{U}}$ untergeordnete Teilung der $1 \in \mathcal{C}^\infty_{\tilde{X}}(\tilde{X})$.*

Beweis. Nach 3.7 ist $\mathcal{C}^\infty_{\tilde{X}}$ weich. Aus [TF, Théorème II.3.6.1] folgt dann die Aussage. □

Plurisubharmonische Funktionen auf komplexen Räumen

Man braucht für die Ergebnisse in diesem Abschnitt nur differenzierbare reellwertige plurisubharmonische Funktionen. Daher betrachtet man:

3.9. Definition. Sei $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ ein Bereich und $P \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}^{2\cdot N}}(\tilde{B})$. Dann bezeichne

$$\mathrm{Levi}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{z}_1 \partial z_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{z}_N \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{z}_N \partial z_N} \end{pmatrix}$$

die *Leviform von P*. P heißt *plurisubharmonisch*, falls die hermitesche Matrix $\mathrm{Levi}(P)(z)$ positiv-semidefinit ist für alle $z \in \tilde{B}$. Ist sie sogar positiv-definit für alle $z \in \tilde{B}$, so heißt P *streng plurisubharmonisch*.

Man rechnet leicht die folgenden Rechenregeln nach:

3.10. Lemma (Produktregel). *Für einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ und Funktionen $P_1, P_2 \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}^{2\cdot N}}(\tilde{B})$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{Levi}(P_1 \cdot P_2) = P_1 \cdot \mathrm{Levi}(P_2) &+ P_2 \cdot \mathrm{Levi}(P_1) \\ &+ (\operatorname{grad} P_1) \cdot \left(\overline{\operatorname{grad} P_2}^{\mathrm{T}}\right) + (\operatorname{grad} P_2) \cdot \left(\overline{\operatorname{grad} P_1}^{\mathrm{T}}\right) \end{aligned}$$

mit

$$\operatorname{grad} P_\nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_\nu}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial P_\nu}{\partial z_N} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Beweis. Anwendung der Produktregel für Wirtingerableitungen. □

3.11. Lemma (Transformationsformel). *Seien $\tilde{B}_\nu \subseteq \mathbb{C}^{N_\nu}$ für $\nu = 1, 2$ Bereiche, $\tilde{F} : \tilde{B}_1 \to \tilde{B}_2$ holomorph und $P \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}^{2\cdot N_2}}(\tilde{B}_2)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Levi}(P \circ \tilde{F}) = \overline{\mathrm{J}_{\tilde{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Levi}(P) \circ \tilde{F} \cdot \mathrm{J}_{\tilde{F}},$$

wobei $\mathrm{J}_{\tilde{F}}$ die holomorphe Funktionalmatrix bezeichnet.

Beweis. Anwendung der Rechenregeln für Wirtingerableitungen. □

Nun überträgt man den Begriff der plurisubharmonischen Funktion auf komplexe Räume.

3.12. Definition. Eine reelle Funktion $p : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ heißt *(streng) plurisubharmonisch*, wenn es zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$, eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota} : \tilde{U} \to \tilde{B}$ in einen Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ und eine (streng) plurisubharmonische Funktion $P : \tilde{B} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$p|_{\tilde{U}} = P \circ \tilde{\iota}.$$

3.13. Bemerkung. Die plurisubharmonischen beziehungsweise streng plurisubharmonischen Funktionen auf einem komplexen Raum bilden jeweils einen reellen Kegel. Ferner ist die Summe einer plurisubharmonischen und einer streng plurisubharmonischen Funktion eine streng plurisubharmonische Funktion.

Ein Kriterium für 1-Vollständigkeit

3.14. Definition. Ein komplexer Raum $\tilde{X}$ heißt *1-vollständig*, falls es eine streng plurisubharmonische Funktion $p : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$(\tilde{X})_r = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : p(\tilde{x}) < r\}$$

für alle $r \in \mathbb{R}$ relativ-kompakt ist. p heißt dann Ausschöpfungsfunktion.

Für das folgende Kriterium braucht man noch die

3.15. Bezeichnungen. Sei $\tilde{X}$ ein komplexer Raum, $p : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative streng plurisubharmonische Funktion und $X = \mathrm{N}(p)$. Dann bezeichnet $\mathfrak{E}_p$ die Menge der $\epsilon \in \mathcal{C}^\infty_{\tilde{X}}(\tilde{X})$ mit

(1) $\epsilon > 0$.

(2) ϵ verschwindet im Unendlichen.

(3) $(p - \epsilon)$ ist streng plurisubharmonisch.

Ferner gelten für $\epsilon \in \mathfrak{E}_p$ die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \tilde{U}_p &= \{\tilde{x} \in \tilde{X} : (p - \epsilon)(\tilde{x}) < 0\}, \\ p_\epsilon &= \frac{1}{-(p - \epsilon)} : \tilde{U}_p \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit gilt nun der folgende

3.16. Satz. *Sei $\tilde{X}$ ein komplexer Raum, $p : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative streng plurisubharmonische Funktion und $X = \mathrm{N}(p)$. Dann gilt*

(1) *$\{\tilde{U}_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathfrak{E}_p}$ ist eine Umgebungsbasis von X in $\tilde{X}$.*

(2) *Für alle $\epsilon \in \mathfrak{E}_p$ ist $\tilde{U}_\epsilon$ 1-vollständig und $p_\epsilon : \tilde{U}_\epsilon \to \mathbb{R}$ eine Ausschöpfungsfunktion.*

Beweis. Für den Fall, das $\tilde{X}$ eine Mannigfaltigkeit ist, ist die Aussage [HaWe72, Satz]. Der gleiche Beweis geht auch für komplexe Räume durch. ∎

Ein klassisches Resultat für Steinsche Räume ist die Lösung des Leviproblems:

3.17. Satz. *Für einen komplexen Raum sind äquivalent:*

(1) $\tilde{X}$ *ist Steinsch.*

(2) $\tilde{X}$ *ist 1-vollständig.*

Beweis. Dies ist [Na61, Satz 4]. □

Damit folgt sofort:

3.18. Satz. *Sei* $\tilde{X}$ *ein komplexer Raum,* $p : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ *eine nicht-negative streng plurisubharmonische Funktion und* $X = \mathrm{N}(p)$*. Dann hat* X *eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen.*

Beweis. Nach 3.16 gibt es eine offene Umgebungsbasis aus 1-vollständigen Mengen. Diese sind mit 3.17 Steinsch. □

Existenz Steinscher Schläuche

Für analytische Räume gilt die

3.19. Proposition. *Sei* X *ein analytischer Raum und* $\tilde{X}$ *eine Komplexifizierung von* X*. Dann gibt es eine offene Umgebung* $\tilde{U}$ *von* X *in* $\tilde{X}$ *und eine nirgends negative streng-plurisubharmonische Funktion* $p : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ *mit* $X = \mathrm{N}(p)$*.*

Beweis. Sei $\tilde{\mathfrak{U}} = (\tilde{U}_j)_{j\in J}$ eine Koordinatenüberdeckung und gemäß 3.8 $(g_j)_{j\in J}$ eine differenzierbare Teilung der 1, die $\tilde{\mathfrak{U}}$ untergeordnet ist. Es gibt also für jedes $j \in J$ eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota}_j : \tilde{U}_j \to \tilde{B}_j$ in einen Bereich $\tilde{B}_j \subseteq \mathbb{C}^{N_j}$, so daß $\tilde{\iota}_j(\tilde{U}_j) = \tilde{A}_j$ eine in $\tilde{B}_j$ komplex-analytische Menge, $\tilde{\iota}_j(\tilde{U}_j \cap X) = A_j$ eine in $B_j = \tilde{B}_j \cap \mathbb{R}^{N_j}$ analytische Menge und $\tilde{A}_j$ eine Komplexifizierung von A_j ist. Ferner wähle man $G_j \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^{2\cdot N_j}}(\tilde{B}_j)$ mit $g_j|_{\tilde{U}_j} = G_j \circ \tilde{\iota}_j$.

Zu jedem $j \in J$ gibt es nach 3.4 eine Funktion $F_j \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^{N_j}}(\mathbb{R}^{N_j})$ mit $\mathrm{N}(F_j) = \overline{A_j}^{\mathbb{R}^{N_j}}$. Sei nun $P'_j : \tilde{B}_j \to \mathbb{R}$ die durch

$$(z_1, \ldots, z_{N_j}) \mapsto \sum_{\nu=1}^{N_j} y_\nu^2 + F_j^2(x_1, \ldots, x_{N_j})$$

gegebene Funktion. Hierbei ist $z_\nu = x_\nu + i \cdot y_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, N_j$ die Zerlegung von z_ν in Real- und Imaginärteil. Dann gilt $P'_j \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^{2\cdot N_j}}(\tilde{B}_j)$, P'_j ist nicht negativ, es gilt $\mathrm{N}(P'_j) = A_j$, und P'_j verschwindet mit allen partiellen Ableitungen erster Ordnung auf A_j. Nun berechnet man:

$$\mathrm{Levi}(P_j) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{E}_{N_j} + \operatorname{grad} F \cdot (\operatorname{grad} F)^{\mathrm{T}} + F \cdot \operatorname{Hess} F\right)$$

mit

$$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_{N_j}} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Hess} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_{N_j}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_{N_j} \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{N_j} \partial x_{N_j}} \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnet dabei E_{N_j} die N_j-dimensionale Einheitsmatrix. Also ist die Leviform von P'_j auf A_j streng positiv-definit.

Nun setze man $P_j = G_j \cdot P'_j \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^{2\cdot N_j}}(\tilde{B}_j)$. Dann ist auch $P_j|_{\tilde{A}_j}$ nicht-negativ. Wegen 3.10 ist $\mathrm{Levi}(P_j)$ auf A_j positiv-semidefinit und in allen Punkten $x \in A_j$ mit $G_j(x) > 0$ sogar positiv-definit. Schließlich bezeichne p_j die triviale Fortsetzung von $P_j \circ \tilde{\iota}_j$ durch Null. Dann gilt $p_j \in \mathcal{C}^\infty_{\tilde{X}}(\tilde{X})$ und p_j ist nicht negativ. Setze nun $p = (\sum_{j\in J} p_j) \in \mathcal{C}^\infty_{\tilde{X}}(\tilde{X})$. Damit ist p nicht negativ und es gilt $\mathrm{N}(p) = X$. Ist nun $\tilde{x} \in X$. Dann gibt es ein $j \in J$ mit $g(\tilde{x}) > 0$ und eine Funktion $P_{\tilde{x}} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^{2\cdot N_j}}(\tilde{B}_j)$ mit $p|_{\tilde{U}_j} = P_{\tilde{x}} \circ \tilde{\iota}_j$. Mit 3.11 ist die Leviform $\mathrm{Levi}(P_{\tilde{x}})$ im Punkt $\tilde{\iota}(\tilde{x})$ positiv-definit. Daher gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von X in $\tilde{X}$, so daß $p|_{\tilde{U}}$ streng-plurisubharmonisch ist. Damit ist $p|_{\tilde{U}}$ die gesuchte Funktion. □

Damit erhält man den

3.20. Satz. *Sei X ein analytischer Raum und $\tilde{X}$ eine Komplexifizierung von X. Dann gibt es eine Umgebungsbasis von X in $\tilde{X}$ aus offenen Steinschen Mengen.*

Beweis. Dies folgt aus 3.18 mit 3.19. □

Anwendungen

Zunächst braucht man den folgenden

3.21. Satz. *Sei $\tilde{X}$ ein parakompakter topologischer Raum, $X \subseteq \tilde{X}$ abgeschlossen und $\tilde{\mathcal{F}}$ eine Garbe von abelschen Gruppen über $\tilde{X}$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der kanonische Morphismus*

$$\varinjlim_{\substack{\tilde{U}\supseteq X\\ \tilde{U}\ \textit{offen}}} \mathrm{H}^n(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}) \to \mathrm{H}^n(X, \tilde{\mathcal{F}})$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Dies ist [TF, Théorème II.4.11.1]. □

Nun kann man Sätze über Steinsche Räume auf analytische Räume übertragen. Als Beispiel dafür mögen die folgenden Sätze gelten.

3.22. Satz (Theorem B). *Sei X ein analytischer Raum und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung*

$$\mathrm{H}^n(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Beweis. Nach 2.13 gibt es eine Komplexifizierung $\tilde{X}$ von X und eine kohärente $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-Modulgarbe $\tilde{\mathcal{F}}$ mit

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \tilde{\mathcal{F}}|_X.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Da das System der Steinschen offenen Mengen kofinal in der Menge der offenen Umgebungen von X bezüglich Inklusion ist, folgt

$$\varinjlim_{\substack{\tilde{U}\supseteq X\\ \tilde{U}\ \text{offen}}} \mathrm{H}^n(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}) = \varinjlim_{\substack{\tilde{U}\supseteq X\\ \tilde{U}\ \text{offen, Steinsch}}} \mathrm{H}^n(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}).$$

Mit Theorem B für Steinsche Räume ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$:

$$\varinjlim_{\substack{\tilde{U} \supseteq X \\ \tilde{U} \text{ offen}}} \mathrm{H}^n(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}) = 0.$$

Aus 3.21 folgt damit

$$0 = \mathrm{H}^n(X, \tilde{\mathcal{F}}) = \mathrm{H}^n(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathrm{H}^n(X, \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}) = \mathrm{H}^n(X, \mathcal{F}) \oplus \mathrm{H}^n(X, \mathcal{F})$$

und hieraus die Behauptung. □

3.23. Satz (Theorem A). *Sei X ein analytischer Raum und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist für alle $x \in X$ der $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul $\mathcal{F}_x$ durch globale Schnitte erzeugt.*

Beweis. Dies folgt aus Theorem B analog zu [TSR, Satz IV.1.2]. Analog zum Beweis von 3.22 kann man diesen Satz auch aus Theorem A für Steinsche Räume durch Übergang zur Komplexifizierung gewinnen. □

Zur Formulierung des nächsten Satzes braucht man die

3.24. Bezeichnungen. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal $\mathbb{k}$-geringter Raum, dessen lokale Ringe alle noethersch sind. Dann bezeichnet für $x \in X$

$$\operatorname{embdim}_x X = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)$$

die Einbettungsdimension von X in x, wobei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Ferner heißt X vom Typ $N \in \mathbb{N}_0$, falls $\operatorname{embdim}_x X \leq N$ für alle $x \in X$ gilt.

Damit kann man nun zitieren:

3.25. Satz. *Sei $\tilde{X}$ ein n-dimensionaler Steinscher Raum vom Typ $N > n$. Dann gibt es eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{X} \to \mathbb{C}^{n+N}$.*

Beweis. Nach [Na60, Theorem 6] ist die Menge der abgeschlossenen Einbettungen dicht in $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{X})^{n+N}$, also insbesondere nicht leer. □

Daraus folgt:

3.26. Satz. *Sei X ein n-dimensionaler analytischer Raum vom Typ $N > n$. Dann gibt es eine analytische injektive abgeschlossene Abbildung $X \to \mathbb{R}^{2\cdot(n+N)}$.*

Beweis. Nach 2.9 gibt es eine n-dimensionale Komplexifizierung $\tilde{X}$ von X. Für die Einbettungsdimension von $\tilde{X}$ in einen Punkt $\tilde{x} \in X$ gilt wegen $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}} = \mathcal{O}_{X,\tilde{x}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die Gleichung

$$\operatorname{embdim}_{\tilde{x}} \tilde{X} = \operatorname{embdim}_{\tilde{x}} X.$$

Damit gilt

$$\operatorname{embdim}_{\tilde{x}} \tilde{X} \leq N \qquad \text{für alle } \tilde{x} \in X.$$

Aufgrund der Halbstetigkeit der Einbettungsdimension $\operatorname{embdim} : \tilde{X} \to \mathbb{N}_0$ gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U}' \subseteq \tilde{X}$ von X vom Typ N. Nach 3.20 gibt es dann eine Steinsche offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq \tilde{U}'$ vom Typ N. Mit 3.25 gibt es dann eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{U} \to \mathbb{C}^{n+N}$. Schränkt man diese Abbildung auf X ein, so erhält man eine injektive abgeschlossene analytische Abbildung $X \to \mathbb{R}^{2\cdot(n+N)}$. □

4 Normalisierung analytischer Räume

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wird der Begriff des normalen analytischen Raumes und der Normalisierung eingeführt. Beide Begriffe führt man mittels Komplexifizierung auf den komplexen Fall zurück. Man zeigt dann, daß jeder analytische Raum eine Normalisierung besitzt.

Normale analytische Räume

Zunächst trifft man die folgende

4.1. Definition. Ein analytischer Raum X heißt *normal*, falls es eine Komplexifizierung $\tilde{X}$ von X gibt, die ein normaler komplexer Raum ist.

Nun gilt aber das folgende

4.2. Lemma. *Sei $x \in \mathbb{R}^N$ und A_x ein reeller Mengenkeim bei x. Dann sind äquivalent:*

(1) *$\mathcal{O}_{A_x}$ ist eine normale $\mathbb{R}$-Stellenalgebra.*

(2) *$\mathcal{O}_{\tilde{A}_x}$ ist eine normale $\mathbb{C}$-Stellenalgebra.*

Beweis. Sei ι_{A_x} das A_x zugeordnete Ideal und A'_x der ι_{A_x} zugeordnete reell-analytische Mengenkeim. Dann gelten mit 1.5 die Gleichungen $\tilde{A}'_x = \tilde{A}_x$ und $\mathcal{O}_{A'_x} = \mathcal{O}_{A_x}$. Nun folgt die behauptete Äquivalenz aus [ReAnSp, Lemma IV.3.7], angewendet auf den reell-analytischen Mengenkeim A'_x. □

Damit erhält man nun leicht die

4.3. Proposition. *Sei X ein analytischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) *X ist ein normaler analytischer Raum.*

(2) *Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{O}_{X,x}$ eine normale $\mathbb{R}$-Stellenalgebra.*

Beweis. Sei $\tilde{X}$ eine Komplexifizierung von X.

(1) $\curvearrowright$ (2): Man darf annehmen, daß $\tilde{X}$ normal ist. Dann ist für alle $X \in X$ die $\mathbb{C}$-Stellenalgebra normal. Mit 4.2 folgt dann (2).

(2) $\curvearrowright$ (1): Mit 4.2 ergibt sich, daß für alle $\tilde{x} \in X$ die $\mathbb{C}$-Stellenalgebra $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ normal ist. Da die Menge $\mathrm{N}(\tilde{X})$ der nicht-normalen Punkte von $\tilde{X}$ analytisch ist, ist $\tilde{U} = \tilde{X} \setminus \mathrm{N}(\tilde{X})$ eine offene Umgebung von X. Nach Verkeinern von U, darf man $\tilde{U}$ als $\omega_{\tilde{X}}$ invariant annehmen. Damit ist $\tilde{U}$ eine normale Komplexifizierung von X. □

Normalisierung analytischer Räume

4.4. Definition. Sei X ein analytischer Raum. Eine analytische Abbildung $\nu : \hat{X} \to X$ heißt *Normalisierung*, falls es eine Komplexifizierung $\tilde{\nu} : \tilde{\hat{X}} \to \tilde{X}$ von ν gibt, so daß $\tilde{\nu}$ eine Normalisierung von $\tilde{X}$ ist.

Im folgenden braucht man die

4.5. Proposition. *Sei $\tilde{X}$ ein komplexer Raum mit Konjugation und $\tilde{\nu} : \hat{\tilde{X}} \to \tilde{X}$ die Normalisierung von $\tilde{X}$. Dann gibt es auf $\hat{\tilde{X}}$ genau eine Konjugation $\omega_{\hat{\tilde{X}}}$, so daß das Diagramm von topologischen Räumen*

$$\begin{array}{ccc} \hat{\tilde{X}} & \xrightarrow{\omega_{\hat{\tilde{X}}}} & \hat{\tilde{X}} \\ {\scriptstyle \tilde{\nu}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\nu}} \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\omega_{\tilde{X}}} & \tilde{X} \end{array}$$

kommutativ ist, das heißt $\tilde{\nu}$ ist eine Abbildung von komplexen Räumen mit Konjugation.

Beweis. Dies ist [ReAnSp, Lemma IV.3.10]. □

Damit zeigt man nun die Eindeutigkeit der Normalisierung:

4.6. Proposition. *Sei X ein analytischer Raum und seien $\nu' : \hat{X}' \to X$, $\nu'' : \hat{X}'' \to X$ zwei Normalisierungen von X. Dann gibt es eine bianlytische Abbildung $\hat{F} : \hat{X}' \to \hat{X}''$, so daß das Diagramm von analytischen Räumen*

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}' & \xrightarrow{F} & \hat{X}'' \\ {\scriptstyle \nu'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu''} \\ X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X} & X \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. Seien $\nu' : \hat{X}' \to X$, $\nu'' : \hat{X}'' \to X$ zwei Normalisierungen von X. Dann gibt es zwei Normalisierungen $\tilde{\nu}' : \tilde{\hat{X}}' \to \tilde{X}'$, $\tilde{\nu}'' : \tilde{\hat{X}}'' \to \tilde{X}''$, wobei $\tilde{X}'$ und $\tilde{X}''$ Komplexifizierungen von X sind. Nach 2.8 gibt es eine offene $\omega_{\tilde{X}'}$-invariante Umgebung $\tilde{U}'$ von X in $\tilde{X}'$, eine $\omega_{\tilde{X}''}$-invariante offene Umgebung von X in $\tilde{X}''$ und einen Isomorphismus $\tilde{F} : \tilde{U}' \to \tilde{U}''$ von komplexen Räumen mit Konjugation. Sei $\hat{\tilde{U}}' = \tilde{\nu}'^{-1}(\tilde{U}')$ und $\hat{\tilde{U}}'' = \tilde{\nu}'^{-1}(\tilde{U}'')$. Dann sind $\tilde{\nu}'|_{\hat{\tilde{U}}'} : \hat{\tilde{U}}' \to \tilde{U}'$ und $\tilde{\nu}''|_{\hat{\tilde{U}}''} : \hat{\tilde{U}}' \to \tilde{U}''$ Normalisierungen und wegen der Eindeutigkeit der Normalisierung gibt es eine biholomorphe Abbildung $\hat{\tilde{F}} : \hat{\tilde{U}}' \to \hat{\tilde{U}}''$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\tilde{U}}' & \xrightarrow{\hat{\tilde{F}}} & \hat{\tilde{U}}'' \\ {\scriptstyle \tilde{\nu}'|_{\hat{\tilde{U}}'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\nu}''|_{\hat{\tilde{U}}''}} \\ \tilde{U}' & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{U}'' \end{array}$$

$\hat{\tilde{F}}$ ist mit den Konjugationen verträglich. Daher induziert $\hat{\tilde{F}}$ einen analytischen Isomorphismus $\hat{F} : \hat{X}' \to \hat{X}''$ mit der geforderten Eigenschaft. □

Man braucht nun das leicht zu beweisende

4.7. Lemma. *Sei $\tilde{X}$ ein komplexer Raum mit Konjugation $\omega_{\tilde{X}}$ und $\tilde{x} \in \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}}$. Dann gibt es eine offene $\omega_{\tilde{X}}$-invariante Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$, einen $\omega_{\mathbb{C}^N}$ invarianten Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ und eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota} : \tilde{U} \to \tilde{B}$, die eine Abbildung zwischen komplexen Räumen mit Konjugation ist.*

Beweis. Dies wird im Beweis von [ReAnSp, Lemma II.4.8] bewiesen. □

Schließlich zeigt man damit:

4.8. Satz. *Sei X ein n-dimensionaler analytischer Raum. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine Normalisierung $\nu : \hat{X} \to X$ von X.*

Beweis. Wegen 4.6 braucht man nur die Existenz der Normalisierung zu zeigen. Sei $\tilde{X}$ eine rein n-dimensionale Komplexifizierung von X und $\tilde{\nu} : \hat{\tilde{X}} \to \tilde{X}$ die Normalisierung von $\tilde{X}$. Ferner bezeichne $\omega_{\hat{\tilde{X}}}$ die Konjugation auf $\hat{\tilde{X}}$ gemäß 4.5. Nun setze man

$$\hat{X} = \overline{\tilde{\nu}^{-1}(\operatorname{Reg} X)}.$$

Dann ist $\hat{X} \subseteq \hat{\tilde{X}}$ abgeschlossen und es gilt $\tilde{\nu}(\hat{X}) = X$. Daher induziert $\tilde{\nu}$ eine surjektive endliche Abbildung $\nu : \hat{X} \to X$. Da X rein n-dimensional ist, folgt $\dim \hat{X} \leq n$. Weil $\tilde{\nu}^{-1}(\operatorname{Reg} X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt, ist $\hat{X}$ sogar rein n-dimensional.

Weil $\tilde{X}$ rein n-dimensional gewählt ist, folgt

$$\operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}} \setminus \operatorname{Reg} X = \operatorname{Sing} \tilde{X} \cap \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}}.$$

Hieraus ergibt sich $\dim(\operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}} \setminus \operatorname{Reg} X) < n$. Da $\tilde{\nu}$ eine endliche Abbildung

$$\operatorname{Fix} \omega_{\hat{\tilde{X}}} \setminus \tilde{\nu}^{-1}(\operatorname{Reg} X) \to \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}} \setminus \operatorname{Reg} X.$$

induziert, folgt $\dim(\operatorname{Fix} \omega_{\hat{\tilde{X}}} \setminus \tilde{\nu}^{-1}(\operatorname{Reg} X)) < n$. Hieraus ergibt sich schließlich

$$\dim(\operatorname{Fix} \omega_{\hat{\tilde{X}}} \setminus \hat{X}) < n.$$

Nun definiert man eine Garbe von $\mathbb{R}$-Stellenalgebren auf $\hat{X}$: Für eine offene Menge $\hat{U} \subseteq \hat{X}$ bezeichne $\mathcal{O}_{\hat{X}}(\hat{U})$ die $\mathbb{R}$-Algebra derjenigen reellwertigen Funktionen $f : \hat{U} \to \mathbb{R}$, für die es eine offene $\omega_{\hat{\tilde{X}}}$-invariante Menge $\hat{\tilde{U}}$ mit $\hat{U} = \hat{\tilde{U}} \cap \hat{X}$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{\hat{\tilde{X}}}(\hat{\tilde{X}})$ gibt mit $\tilde{f} = \overline{\tilde{f} \circ \omega_{\hat{\tilde{U}}}}$ und $f = \tilde{f}|_{\hat{U}}$. Hierdurch wird mit den üblichen Restriktionsabbildungen eine Garbe von $\mathbb{R}$-Stellenalgebren auf $\hat{X}$ gegeben.

Sei nun $\hat{x} \in \hat{X}$. Dann gibt es nach 4.7 eine offene $\omega_{\hat{\tilde{X}}}$-invariante Umgebung, einen $\omega_{\mathbb{C}^N}$-invarianten Bereich $\tilde{B} \subseteq \mathbb{C}^N$ und eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\iota}$:

$\hat{\tilde{U}} \to \tilde{B}$, die eine Abbildung von komplexen Räumen mit Kojugation ist. Man setze $\tilde{A} = \tilde{\iota}(\hat{\tilde{U}})$, $A = \tilde{\iota}(\hat{\tilde{U}} \cap \hat{X})$ und $B = \tilde{B} \cap \mathbb{R}^N$. Dann ist A eine rein n-dimensionale abgeschlossene Teilmenge von B, $\tilde{A}$ ist eine normale rein n-dimensionale komplex-analytische Teilmenge von $\tilde{B}$ und es gilt $\dim((\tilde{A} \cap B) \setminus A) < n$. Nun ist $\tilde{A}$ eine Komplexifizierung von A: Wegen $A \subseteq \tilde{A}$ gilt für alle $x \in A$ die Inklusion $A_x \subseteq \tilde{A}_x$. Angenommen, es gibt für ein $x \in A$ einen komplex-analytischen Mengenkeim $\tilde{A}'_x$ mit $A_x \subseteq \tilde{A}'_x \subsetneqq \tilde{A}_x$. Weil $\tilde{A}_x$ irreduzibel ist, folgt $\dim \tilde{A}'_x < n$. Hieraus ergibt sich $\dim A_x < n$, im Widerspruch dazu, daß A rein n-dimensional ist. Also ist $\tilde{A}$ eine Komplexifizierung von A. Damit ist $(A, \mathcal{O}_A)$ ein n-dimensionaler analytischer Modellraum und $\tilde{\iota}$ induziert einen Isomorphismus $\iota : (\hat{X} \cap \hat{\tilde{U}}, \mathcal{O}_{\hat{X}}|_{\hat{X} \cap \hat{\tilde{U}}}) \to (A, \mathcal{O}_A)$ von lokal $\mathbb{R}$-geringten Räumen.

Damit ist $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ ein n-dimensionaler analytischer Raum, $\nu : \hat{X} \to X$ ist analytisch und $\tilde{\nu} : \hat{\tilde{X}} \to \tilde{X}$ ist eine Komplexifizierung von ν. Ferner gilt: $\tilde{\hat{X}} = \hat{\tilde{X}}$. Damit ist ν eine Normalisierung von X. $\square$

Abschließend betrachte man noch das folgende

4.9. Beispiel. Wie in 1.31 sei $A = \mathrm{N}(x_1^2 - x_2^2 \cdot x_3) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$ der 2-dimensionale analytische Modellraum und $\tilde{A} = \mathrm{N}(z_1^2 - z_2^2 \cdot z_3) \subseteq \mathbb{C}^3$ die Komplexifizierung von A. Nun induziert die holomorphe Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, gegeben durch $(w_1, w_2) \mapsto (w_1 \cdot w_2, w_2, w_1^2)$, die Normalisierung $\tilde{\nu} : \mathbb{C}^2 \to \tilde{A}$ von $\tilde{A}$. Damit ist die durch die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben wird durch $(y_1, y_2) \mapsto (y_1 \cdot y_2, y_2, y_1^2)$, induzierte Abbildung $\nu : \mathbb{R}^2 \to A$ die Normalisierung von A.

5 Der Remmertsche Bildsatz

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt werden die Bildmengen von analytischen Abbildungen $f : X_1 \to X_2$ untersucht. Diese sind im allgemeinen keine analytischen Räume. Daher führt man den Begriff des semi-analytischen Raumes ein. Dann wird gezeigt, daß das Bild eines analytischen Raumes unter einer endlichen analytischen Abbildung ein semianalytischer Raum ist. Die gleiche Aussage gilt auch, falls die Abbildung eine eigentliche Komplexifizierung $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ zuläßt, wobei $\tilde{X}_1$ glatt ist und f den Rang r hat auf einer offenen dichten Teilmenge von X_1.

Semianalytische Räume

Im Komplexen gilt der folgende

5.1. Satz (Remmerts Bildsatz). *Sei $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen. Dann ist $\tilde{f}(\tilde{X}_1) \subseteq \tilde{X}_2$ eine komplex-analytische Menge.*

Beweis. Dies ist [CAS, Theorem 10.6.1]. □

Im Reellen gilt ein entsprechender Satz nicht einmal für endliche Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten:

5.2. Beispiel. Sei X_1 die durch $\mathrm{N}(x_2^2 - x_1)$ gegebene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, $X_2 = \mathbb{R}$ und $f : X_1 \to X_2$ die durch die Projektion auf die erste Komponente gegebene analytische Abbildung. f ist endlich und es gilt

$$f(X_1) = \mathbb{R}_0^+.$$

Damit ist das Bild also nicht analytisch. $\mathbb{R}_0^+$ ist aber ein semianalytischer Unterraum von X_2 im Sinne der folgenden Definition.

5.3. Definition. Sei X ein analytischer Raum. Ferner sei $Y' \subseteq X$ eine abgeschlossene, lokal durch endlich viele analytische Gleichungen gegebene Teilmenge. Schließlich sei $T \subseteq Y'$ eine weitere in X abgeschlossene, lokal durch endlich viele analytische Gleichungen gegebene Teilmenge. Sei dann

$$Y' \setminus T = \bigcup_{\iota \in I'} Y_\iota$$

die Zerlegung von $Y' \setminus T$ in Zusammenhangskomponenten. Dann ist für $\emptyset \neq I \subseteq I'$ mit

$$Y = \overline{\bigcup_{\iota \in I} Y_\iota}^{X} \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X / \iota_Y)|_Y$$

der lokal $\mathbb{R}$-geringte Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein *semianalytischer Raum* beziehungsweise ein *semianalytischer Unterraum von X*.

Analytisch endliche Abbildungen

Zunächst trifft man die

5.4. Definition. Eine analytische Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt *analytisch endlich*, falls es eine endliche Komplexifizierung $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ von f gibt.

5.5. Bemerkung. Eine analytisch endliche Abbildung $f : X_1 \to X_2$ ist endlich als stetige Abbildung.

Nun zeigt man den

5.6. Satz. *Sei f $X_1 \to X_2$ eine analytisch endliche Abbildung. Dann ist $f(X_1)$ ein semianalytischer Unterraum von X_2.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine endliche Komplexifizierung $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ von f. Es sei $\tilde{X}_1$ rein n_1-dimensional. Das Bild $\tilde{f}(\tilde{X}_1)$ wird mit 5.1 als reduzierter komplexer Unterraum von $\tilde{X}_2$ aufgefaßt und ist rein n_1-dimensional. Da $\tilde{X}_1$ reduziert ist, gibt es eine Faktorisierung

$$\tilde{X}_1 \xrightarrow{\tilde{f}'} \tilde{f}(\tilde{X}_1) \longrightarrow \tilde{X}_2$$

von $\tilde{f}$. Die Abbildung $\tilde{f}'$ ist eine endliche holomorphe Surjektion. Sei $\tilde{X}_1 = \bigcup_{\iota\in I} \tilde{X}_1^{(\iota)}$ die Zerlegung von $\tilde{X}_1$ in irreduzible Komponenten. Für alle $\iota \in I$ ist dann $\tilde{f}'(\tilde{X}_1^{(\iota)}) \subseteq \tilde{f}(\tilde{X}_1)$ eine n_1-dimensionale irreduzible analytische Menge. Also ist $\tilde{f}'(\tilde{X}_1^{(\iota)})$ sogar eine irreduzible Komponente von $\tilde{f}(\tilde{X}_1)$. Nach [CAS, Theorem 9.3.3] ist $\tilde{f}'$ eine verzweigte Überlagerung.

Damit gibt es eine dünne Menge $\tilde{T}_2 \subset \tilde{f}(\tilde{X}_1)$, so daß gilt:

(1) $\tilde{T}_1 = \tilde{f}^{-1}(\tilde{T}_2) \subset \tilde{X}_1$ ist dünn.

(2) $\tilde{f}'|_{\tilde{X}_1\setminus\tilde{T}_1} : \tilde{X}_1 \setminus \tilde{T}_1 \to \tilde{f}(\tilde{X}_1) \setminus \tilde{T}_2$ ist lokal biholomorph.

Nach eventueller Vergrößerung von $\tilde{T}_2$ darf man annehmen, daß weiterhin gilt:

(3) $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ sind komplex-analytische Mengen mit $\dim \tilde{T}_\nu < n_1$ für $\nu = 1, 2$.

(4) Für $\nu = 1, 2$ ist $\tilde{T}_\nu$ invariant unter $\omega_{\tilde{X}_\nu}$.

(5) $\operatorname{Sing} \tilde{X}_1 \subseteq \tilde{T}_1$.

Man setze $T_\nu = \tilde{T}_\nu \cap X_\nu$ für $\nu = 1, 2$. Dann folgt $\dim T_1 < n_1$, also insbesondere, daß T_1 in X_1 nirgends dicht ist. Ferner gilt $T_1 = f^{-1}(T_2)$. Mit $f : X_1 \to X_2$ ist auch die induzierte Abbildung $X_1 \setminus T_1 \to X_2 \setminus T_2$ endlich. $(\tilde{f}(\tilde{X}_1) \cap X_2) \setminus T_2$ ist ein abgeschlossener topologischer Unterraum von $X_2 \setminus T_2$, der $f(X_1 \setminus T_1)$ enthält. Daher induziert f eine Abbildung

$$f|_{X_1\setminus T_1} : X_1 \setminus T_1 \to (\tilde{f}(\tilde{X}_1) \cap X_2) \setminus T_2,$$

die mit $f|_{X_1\setminus T_1}$ bezeichnet wird und endlich ist. Daher ist sie abgeschlossen. Sie ist auch offen, denn sie ist lokal-topologisch:

Sei dazu $x_1 \in X_1 \setminus T_1$. Nach (2) gibt es dann offene Umgebungen $\tilde{U}_1$ in $\tilde{X}_1 \setminus \tilde{T}_1$ von x_1, $\tilde{U}_2$ in $\tilde{f}(\tilde{X}_1) \setminus \tilde{T}_2$ von $x_2 = f(x_1)$, so daß $\tilde{f}'|_{\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \to \tilde{U}_2$ biholomorph ist. Nach eventuellem Verkleinern von $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$ darf man annehmen, daß $\tilde{U}_\nu$ invariant unter $\omega_{\tilde{X}_\nu}$ sind für $\nu = 1, 2$. Nun setze man $U_\nu = \tilde{U}_\nu \cap X_\nu$ für $\nu = 1, 2$. Dann ist U_1 eine offene Umgebung von x_1 in $X_1 \setminus T_1$ und U_2 eine offene Umgebung von x_2 in $(\tilde{f}(\tilde{X}_1) \cap X_2) \setminus T_2$. Wegen $f|_{X_1 \setminus T_1}(U_1) = \tilde{f}(\tilde{U}_1 \cap X_1) \subseteq \tilde{U}_2 \cap X_2 = U_2$ induziert $f|_{X_1 \setminus T_1}$ eine stetige Abbildung $(f|_{X_1 \setminus T_1})|_{U_1}\ U_1 \to U_2$. Sei $\tilde{g} = (\tilde{f}')^{-1} : \tilde{U}_2 \to \tilde{U}_1$. Dann gilt $\omega_{\tilde{U}_1} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \omega_{\tilde{U}_2}$. Insbesondere folgt $\tilde{g}(\operatorname{Fix} \omega_{\tilde{U}_2}) \subseteq \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{U}_1}$. Hiermit ergibt sich: $\tilde{g}(U_2) = \tilde{g}(\tilde{U}_2 \cap X_2) \subseteq \tilde{g}(\tilde{U}_2 \cap \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{X}_2}) = \tilde{g}(\tilde{U}_2 \cap \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{U}_2}) = \tilde{g}(\tilde{U}_2) \cap \tilde{g}(\operatorname{Fix} \omega_{\tilde{U}_2}) \subseteq \tilde{U}_1 \cap \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{U}_1} = U_1$ wobei $\tilde{U}_1 \cap \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{U}_1} = U_1$ aus (5) folgt. Also induziert $\tilde{g}$ eine stetige Abbildung $g : U_2 \to U_1$. Aus der Wahl von $\tilde{g}$ folgt $g \circ (f_{X_1 \setminus T_1})|_{U_1} = \mathrm{id}_{U_1}$ und $(f_{X_1 \setminus T_1})|_{U_1} \circ g = \mathrm{id}_{U_2}$. Also ist $(f_{X_1 \setminus T_1})|_{U_1} : U_1 \to U_2$ eine topologische Abbildung und damit $f|_{X_1 \setminus T_1}$ als lokal-topologisch erkannt.

Sei schließlich

$$(\tilde{f}(\tilde{X}_1) \cap X_2) \setminus T_2 = \bigcup_{\iota \in I'} Y_2^{(\iota)}$$

die Zerlegung von $(\tilde{f}(\tilde{X}_1) \cap X_2) \setminus T_2$ in Zusammenhangskomponenten. Da $f|_{X_1 \setminus T_1}$ offen und abgeschlossen ist, gibt es eine Menge I mit $\emptyset \neq I \subseteq I'$ und

$$f(X_1 \setminus T_1) = \bigcup_{\iota \in I} Y_2^{(\iota)}.$$

Weil f abgeschlossen und T_1 nirgends dicht in X_1 ist, folgt schließlich:

$$f(X_1) = f(\overline{X_1 \setminus T_1}) = \overline{f(X_1 \setminus T_1)} = \overline{\bigcup_{\iota \in I} Y_2^{(\iota)}}$$

Damit hat $f(X_1)$ die gewünschte Gestalt. □

Analytisch eigentliche Abbildungen vom Rang r

Im folgenden braucht man die

5.7. Bezeichnungen. Sei X_1 eine n_1-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit, X_2 ein n_2-dimensionaler analytischer Raum und $f : X_1 \to X_2$ eine analytische Abbildung. Ferner sei $x_1 \in X_1$ und $x_2 = f(x_1)$. Nun wähle man eine offene Umgebung U_2 von x_2 in X_2 und eine analytische Abbildung $\iota_2 : U_2 \to B_2$ in einen Bereich $B_2 \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$, die einen Isomorphismus von U_2 auf eine n_2-dimensionale analytische Menge $A_2 \subseteq B_2$ induziert. Ferner wähle man eine offene Umgebung U_1 von x_1 in X_1 und einen Isomorphismus $\iota_1 : U_1 \to B_1$ in einen Bereich $B_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ mit $f(U_1) \subseteq U_2$. Dann ist $f_{12} = \iota_2 \circ f|_{U_1} \circ \iota_1^{-1} : B_1 \to B_2$ eine reell-analytische Abbildung zwischen Bereichen. Man setzt wie üblich:

$$\operatorname{rg}_{x_1} f = \operatorname{rg} \mathrm{J}_{f_{12}}(x_1) \quad \text{und} \quad \operatorname{corg}_{x_1} f = n_1 - \operatorname{rg} \mathrm{J}_{f_{12}}(x_1),$$

wobei $\mathrm{J}_{f_{12}}$ die Jacobimatrix von f_{12} und $\operatorname{rg} \mathrm{J}_{f_{12}}(x_1)$ der Rang der Jacobimatrix an der Stelle x_1 ist. Der Rang und Corang von f in x_1 sind wohldefiniert, das heißt unabhängig von den gewählten Einbettungen.

Sei nun $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen. Hier definiert man den Rang $\operatorname{rg}_{\tilde{x}_1} \tilde{f}$ und Corang $\operatorname{corg}_{\tilde{x}_1} \tilde{f}$ von $\tilde{f}$ in einem Punkt $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ über die Jacobiabbildung von $\tilde{f}$ (siehe [CAG, 2.17]). Ferner setzt man $\operatorname{rg} \tilde{f} = \sup_{\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1} \operatorname{rg}_{\tilde{x}_1} \tilde{f} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ist $\tilde{X}_1$ von endlichem Typ, so gilt $\operatorname{rg} \tilde{f} < \infty$. Falls $\tilde{X}_1$ eine rein n_1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist, so ist $\tilde{f}(\tilde{X}_1)$ $(\operatorname{rg} \tilde{f})$-dimensional. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann bezeichnet

$$\operatorname{Sing}^k \tilde{f} = \{\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1 : \operatorname{corg}_{\tilde{x}_1} \tilde{f} > k\}$$

den singulären k-Ort. $\operatorname{Sing}^k \tilde{f} \subseteq \tilde{X}_1$ ist eine komplex-analytische Menge (siehe [CAG, 2.17].

Diese Bezeichnungen sind mit Komplexifizierung verträglich:

5.8. Bemerkung. Ist $f : X_1 \to X_2$ wie in 5.7 und $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ eine Komplexifizierung von f, so gilt für alle $x_1 \in X_1$:

$$\operatorname{rg}_{x_1} f = \operatorname{rg}_{x_1} \tilde{f} \quad \text{und} \quad \operatorname{corg}_{x_1} f = \operatorname{corg}_{x_1} \tilde{f}.$$

Damit defininiert man nun:

5.9. Definition. Sei X_1 eine analytische Mannigfaltigkeit, X_2 ein analytischer Raum und $f : X_1 \to X_2$ eine analytische Abbildung. Dann heißt f *analytisch eigentlich vom Rang* r, falls gilt:

(1) f hat den Rang r in einer offenen dichten Teilmenge von X_1.

(2) Es gibt eine eigentliche Komplexifizierung $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ von f, wobei $\tilde{X}_1$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

5.10. Bemerkung. Sei $f : X_1 \to X_2$ eine analytisch eigentliche Abbildung vom Rang r. Dann ist f auch als stetige Abbildung eigentlich. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Für den Beweis des folgenden Satzes braucht man das

5.11. Lemma. *Sei $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ eine eigentliche holomorphe Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit $\tilde{X}_1$ in einen komplexen Raum $\tilde{X}_2$. Dann gibt es eine dünne analytische Menge $\tilde{T}_2$ in $\tilde{X}_2$, so daß gilt:*

(1) $\operatorname{Sing} \tilde{X}_2 \subseteq \tilde{T}_2$.

(2) *Die Abbildung $\tilde{f}|_{\tilde{X}_1 \setminus \tilde{f}^{-1}(\tilde{T}_2)} : \tilde{X}_1 \setminus \tilde{f}^{-1}(\tilde{T}_2) \to \tilde{X}_2 \setminus \tilde{T}_2$ ist eine Submersion.*

Beweis. Dies ist [Ga76, Lemme 3.3]. □

Damit zeigt man nun:

5.12. Satz. *Sei X_1 eine analytische Mannigfaltigkeit, X_2 ein analytischer Raum und $f : X_1 \to X_2$ eine analytisch eigentliche Abbildung vom Rang r. Dann ist $f(X_1)$ ein semianalytischer Unterraum von X_2.*

Beweis. Sei $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ eine eigentliche Komplexifizierung von f, wobei $\tilde{X}_1$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Dann bezeichne

$$\tilde{X}_1 = \bigcup_{\iota \in I} \tilde{X}_1^{(\iota)}$$

die Zerlegung von $\tilde{X}_1$ in Zusammenhangskomponenten. Ohne Einschränkung darf man annehmen, daß jede Zusammenhangskomponente X_1 trifft. Dann ist $\tilde{X}_1$ rein n_1-dimensional, wobei n_1 die Dimension von X_1 ist. Wie im Beweis von 5.6 hat man die Faktorisierung

$$\tilde{X}_1 \xrightarrow{\tilde{f}'} \tilde{f}(\tilde{X}_1) \longrightarrow \tilde{X}_2.$$

Dann folgt für alle $\iota \in I$ die Gleichung

$$\operatorname{rg} \tilde{f}'|_{\tilde{X}_1^{(\iota)}} = r.$$

Nach Voraussetzung gilt nämlich $\operatorname{rg} \tilde{f}'|_{\tilde{X}_1^{(\iota)}} \geq r$. Angenommen, es gilt $\operatorname{rg} \tilde{f}'|_{\tilde{X}_1^{(\iota)}} = r' > r$. Dann ist $\operatorname{Sing}^{n_1 - r'} \tilde{f}'|_{\tilde{X}_1^{\iota}} = \{\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1^{(\iota)} : \operatorname{rg}_{\tilde{x}_1} \tilde{f} < r'\} \subsetneqq \tilde{X}_1^{(\iota)}$ eine komplex-analytische Menge. Also folgt $\dim(\operatorname{Sing}^{n_1 - r'} \tilde{f}'|_{\tilde{X}_1^{\iota}}) < n_1$. Hieraus folgt $\dim\{x_1 \in X_1 \cap \tilde{X}_1^{(\iota)} : \operatorname{rg}_{x_1} f = r\} < n_1$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß f den Rang r auf einer offenen dichten Menge von X_1 hat. Also gilt: $\operatorname{rg} \tilde{f}'|_{\tilde{X}_1^{(\iota)}} = r$. Insbesondere ist $\tilde{f}(\tilde{X}_1)$ rein r-dimensional.

Ist $\tilde{T}_2 \subsetneqq \tilde{f}(\tilde{X}_1)$ eine dünne komplex-analytische Menge, so ist auch $\tilde{T}_1 = \tilde{f}^{-1}(\tilde{T}_2) \subseteq \tilde{X}_1$ eine dünne komplex-analytische Menge, das heißt, es gilt $\dim \tilde{T}_1 < n_1$. Denn sonst gibt es ein $\iota \in I$ mit $\tilde{X}_1^{(\iota)} \subseteq \tilde{T}_1$. Hieraus folgt $\tilde{f}(\tilde{X}_1^{(\iota)}) \subseteq \tilde{T}_2$ und damit wegen obiger Ranggleichung $\dim \tilde{T}_2 \geq r$ im Widerspruch zur Annahme, daß $\tilde{T}_2$ dünn ist.

Sei nun $\tilde{T}_2$ wie in 5.11. Ohne Einschränkung darf man annehmen, daß $\tilde{T}_2$ invariant unter $\omega_{\tilde{X}_2}$ ist. Mit $\tilde{T}_2$ ist auch $\tilde{T}_1 = \tilde{f}'^{-1}(\tilde{T}_2)$. Nun setze man $T_\nu = \tilde{T}_\nu \cap X_\nu$ für $\nu = 1, 2$. Dann ist T_1 nirgends dicht in X_1. Nun ist $\operatorname{Fix} \omega_{\tilde{f}(\tilde{X}_1) \setminus \tilde{T}_2}$ eine r-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit und f induziert eine Submersion

$$X_1 \setminus T_1 \to \operatorname{Fix} \omega_{\tilde{f}(\tilde{X}_1) \setminus \tilde{T}_2}.$$

Deshalb ist diese Abbildung offen und damit auch die von f induzierte Abbildung

$$f|_{X_1 \setminus T_1} : X_1 \setminus T_1 \to (\tilde{f}(\tilde{X}_1) \cap X_1)) \setminus T_2,$$

die wieder mit $f|_{X_1 \setminus T_1}$ bezeichnet wird. $f|_{X_1 \setminus T_1}$ ist auch abgeschlossen, da f eigentlich ist.

Damit ist $f|_{X_1 \setminus T_1}$ offen und abgeschlossen und mit dem Schluß am Ende des Beweises von 5.6 ergibt sich, daß $f(X_1)$ die gewünschte Gestalt hat. $\square$

Literatur

[AnFu] St. G. Krantz und H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Basler Lehrbücher 4, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1992.

[CAG] G. Fischer, *Complex Analytic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 528, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976.

[CAS] H. Grauert und R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 265, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984.

[Diff2] H. Grauert und G. Fischer, *Differential- und Integralrechnung II*, Heidelberger Taschenbücher, Band 36, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[DimThy] W. Hurewicz und H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series 4, Princeton University Press, Princeton, 1948.

[IVA] D. Cox, J. Little und D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[ReAnSp] F. Guaraldo, P. Macri und A. Tancredi, *Topics on Real Analytic Spaces*, Vieweg Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1986.

[SCV] H. Grauert, Th. Peternell und R. Remmert, *Several Complex Variables VII*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 74, Springer Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, 1994.

[TF] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.

[TSR] H. Grauert und R. Remmert, *Theorie der Steinschen Räume*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 227, Springer Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, 1977.

[Ca57] H. Cartan, *Variétés Analytiques Réelles et Variétés Analytiques Complexes*. Bull. Soc. math. France **85** (1957), 77–99.

[Fe66] W. Fensch, *Reell-analytische Strukturen*, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster **34** (1966).

[Ga76] M. Galbiati, *Sur l'image d'un morphisme analytique réel propre*, Ann. Scu. Norm. Sup. **3** (1976), 311–319.

[Gr58] H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 460–472.

[Gr93] H. Grauert, *Analytische und meromorphe Zerlegungen und der reelle Fall*, Jber. d. Dt. Math.-Verein. **95** (1993), 181–189.

[Gr9?] H. Grauert, *Set theoretic real analytic spaces*, Preprint.

[Hi72] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, 453–493.

[HaWe72] F. R. Harvey und R. O. Wells, Jr., *Holomorphic Approximation and Hyperfunction Theory on a C^1-Totally Real Submanifold of a Complex Manifold*, Math. Annalen **197** (1972), 287–318.

[Lo65] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Lecture Notes I. H. E. S., Bures sur Yvette, 1965.

[Na60] R. Narasimhan, *Imbedding of holomorphic complete spaces*, Amer. Jour. Math. **82** (1960), 917–934.

[Na61] R. Narasimhan, *The Levi problem for complex spaces*, Math. Annalen **142** (1961), 355–365.

[WhBr59] H. Whitney und F. Bruhat, *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels*, Comment. Math. Helv. **33** (1959), 132–166.

Lebenslauf

Name	Michael Tüxen	
Geburtsdatum	8. Dezember 1966	
Geburtsort	Oldenburg	
Schulbildung	1973–1977	Herrmann-Ehlers-Schule, Oldenburg
	1977–1979	Orientierungsstufe Marschweg, Oldenburg
	1979–1986	Hindenburgschule, Oldenburg
	1986	Abitur
Wehrdienst	1986–1987	Grundwehrdienst
Studium	1987–1993	Diplomstudiengang Mathematik an der Universität Göttingen
	Ende WS 92/93	Diplomhauptprüfung
	1993–1996	Promotionsstudiengang Mathematik an der Universität Göttingen
wiss. Tätigkeit	April 1993 – Dezember 1995	wiss. Mitarbeiter am SFB 170 *Geometrie und Analysis*
	Januar 1996 – Juli 1996	wiss. Mitarbeiter an einem DFG Projekt