Kausale Kompaktifizierung kompakt-kausaler Räume

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Frank Betten
aus Menden (Kreis Iserlohn)

Göttingen 1996

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Kompaktifizierung der von 'Olafsson und Ørsted eingeführten Hermiteschen oder kompakt-kausalen symmetrischen Räume ['OØ 88]. Ein infinitesimal-kausaler symmetrischer Raum (G, H, τ), wobei wie üblich H eine offene Untergruppe in der Fixpunktgruppe G^τ ist, ist dadurch definiert, daß auf dem Tangentialraum ein translationsinvariantes Kegelfeld $G/H \ni gH \mapsto C_{gH} \subset T_{gH}G/H$ abgeschlossener, konvexer und regulärer Kegel — d.h. $C_{gH} \cap -C_{gH} = \{0\}$ und $C_{gH} - C_{gH} = T_{gH}G/H$ — existiert. Da wir nur mit infinitesimal-kausalen Räumen arbeiten, sprechen wir der Kürze halber von kausalen Räumen, wobei aber immer infinitesimal-kausale gemeint sind. Für halbeinfaches G sind diese vollständig klassifiziert ['Ol, H'O] und wir beschränken uns im folgenden auf diese. Sei Θ eine mit τ kommutierende Cartaninvolution und $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ die zugehörige Cartanzerlegung der Liealgebra von G. Sei $\mathfrak{h}$ die Liealgebra von H in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}$ der (-1)-Eigenraum der Involution τ, so daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$. Für ein irreduzibles Tripel $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \tau)$ sind dann die kompakt-kausalen Tripel und entsprechend die kompakt-kausalen Räume als dazu assoziierte Räume diejenigen mit $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \neq \{0\}$, wobei $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ das Zentrum der reduktiven Algebra $\mathfrak{k}$ ist. Unser Ziel ist es, für diese Räume einen Hermiteschen symmetrischen Raum G_1/K_1 vom Tubentyp, d.h. G_1/K_1 ist biholomorph äquivalent zu einem Tubengebiet oder genauer zu einem Siegelschen Gebiet erster Art $D(V) = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ mit offenem konvexen Kegel $V \subset \mathbb{R}^n$, und eine Einbettung $\tilde{d} : G/H \to \check{S}_1$ in den Bergman-Šilov-Rand des Gebiets zu finden, so daß das Bild $\tilde{d}(G/H)$ offen und dicht ist. Dabei ist $\check{S}_1$ ein kausaler symmetrischer Raum [Ka 89], und wir fordern zusätzlich von unserer Abbildung, daß sie kausal ist, d.h. einen Kegel C_{gH} in den durch die kausale Struktur von $\check{S}_1$ definierten Kegel in $T_{\tilde{d}(gH)}\check{S}_1$ abbildet.

Motiviert wird diese Konstruktion dadurch, daß man eine Abbildung zwischen dem zu (G, H, τ) gehörenden Hardyraum und dem „klassischen" Hardyraum des Tubengebiets G_1/K_1 konstruieren will. Um dies etwas näher auszuführen sei an die Konstruktion des zu (G, H, τ) gehörenden Hardyraums erinnert [H'OØ]. Sei $\mathfrak{g}_\mathbb{C} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ die Komplexifizierung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ — allgemein bezeichne $\mathfrak{r}_\mathbb{C}$ immer die Komplexifizierung eines reellen Vektorraums $\mathfrak{r}$ — und $G_\mathbb{C}$ die zugehörige einfach zusammenhängende komplexe Liegruppe. Um technische Details zu vermeiden, nehmen wir für G die Fixpunktgruppe der komplexen Konjugation bezüglich $\mathfrak{g}$ auf $G_\mathbb{C}$ — G ist dann zusammenhängend — und für H die ganze Fixpunktgruppe $H = G \cap G_\mathbb{C}^\tau$, wobei wir τ als Involution auf $G_\mathbb{C}$ betrachten. Diese spezielle Wahl erlaubt es uns, G/H als Teilmenge von $G_\mathbb{C}/G_\mathbb{C}^\tau$ aufzufassen. Für kompakt-kausales oder allgemeiner für Hermitesches $\mathfrak{g}$ existieren G-invariante, abgeschlossene, konvexe und reguläre Kegel in $\mathfrak{g}$, und C sei ein solcher, fest gewählt. Die Invarianz des Kegels macht $\Gamma(C) := G\exp(iC) \subset G_\mathbb{C}$ zu einer (abgeschlossenen) Unterhalbgruppe. Ist $\pi : G_\mathbb{C} \to G_\mathbb{C}/G_\mathbb{C}^\tau$ die kanonische Projektion und $\Xi(C) := \pi(\Gamma(-C))$, so operiert $\Gamma(C)$ durch $\gamma \cdot f(z) = f(\gamma^{-1}z)$, mit $\gamma \in \Gamma(C)$ und z aus dem Inneren $\Xi^0(C)$ von $\Xi(C)$, auf dem Raum der holomorphen Funktionen $f : \Xi^0(C) \to \mathbb{C}$. Für $\gamma \in \Gamma^0(C)$, dem Inneren von $\Gamma(C)$, ist $\gamma^{-1}G/H \subset \Xi^0(C)$, so daß man die L^2-Norm $\|\gamma \cdot f\|^2 = \int_{G/H} |\gamma \cdot f(gH)|^2 dgH$ mit G-invariantem Maß dgH definieren kann. Der Hardyraum $H(C)$ zu (G, H, τ) wird dann von den Funktionen mit endlicher Hardynorm, $\|f\|_H := \sup_{\gamma \in \Gamma^0(C)} \|\gamma \cdot f\| < \infty$, gebildet. Wie in der zitierten Arbeit gezeigt, ist $H(C)$ ein Hilbertraum und man hat eine Isometrie $I : H(C) \to L^2(G/H)$, $f \mapsto \lim_{\gamma_i \to e} \gamma_i \cdot f$, wobei $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige gegen das Einselement e konvergierende Folge in $\Gamma^0(C)$ ist. Der ,,klassische“ Hardyraum $H(G_1/K_1)$ über G_1/K_1 wird als der des zu G_1/K_1 biholomorphen Tubengebiets definiert [FK]. Er wird also von holomorphen Funktionen auf G_1/K_1 gebildet und wir haben auch hier eine analog zu I definierte isometrische Abbildung $I' : H(G_1/K_1) \to L^2(\check{S}_1)$.

Um eine Isometrie zwischen diesen Hilberträumen zu konstruieren, nutzen wir die Abbildung $\tilde{d}^*$, welche Funktionen auf $\check{S}_1$ — als Nullformen — in Funktionen auf G/H überführt. Es ist daher kanonisch eine Funktion $\alpha : G/H \to \mathbb{C}$ zu suchen, so daß $\alpha\tilde{d}^* : L^2(\check{S}_1) \to L^2(G/H)$, $f \mapsto \alpha\tilde{d}^* f$, eine Isometrie ist. Mit $I(H(C)) \subset L^2(G/H)$ hat man, falls $\alpha\tilde{d}^*(I'(H(G_1/K_1)) \subset I(H(C))$, somit eine Abbildung $\varphi : H(C) \to H(G_1/K_1)$. Im allgemeinen wird φ natürlich nur auf einem Unterraum $\mathcal{H} \subset H(C)$ definiert sein — vgl. [KØ] für einen solches Beispiel — und die folgende Diskussion ist entsprechend zu modifizieren.

Ist $\tilde{d} : G/H \to \check{S}_1$ kausal, so läßt sich $\tilde{d}$ lokal zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{D} : \Xi^0(C) \to G_1/K_1$ fortsetzen. Dazu identifizieren wir den Tangentialraum $T_{eG^\tau_{\mathbb{C}}} G_{\mathbb{C}}/G^\tau_{\mathbb{C}}$ des homogenen Raums $G_{\mathbb{C}}/G^\tau_{\mathbb{C}}$ wie üblich mit $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$. Mit dieser Identifikation wird dann infinitesimal $\Xi^{(0)}(C)$ durch $\mathfrak{q} + i\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} C^{(0)}$ beschrieben, wobei hier mit $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}$ die Projektion in $\mathfrak{g}$ längs $\mathfrak{h}$ bezeichnet wird. Der Unteraum $T_{eH}G/H$ entspricht bei unserer Identifizierung $\mathfrak{q}$, und bei geeigneter Wahl von C ist $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} C \subset C_{eH}$. Arbeiten wir mit der unbeschränkten Realisierung $D(V)$ von G_1/K_1, so wird die kausale Struktur auf dem Bergman-Šilov-Rand $\check{S}_1^c = \{x + i0 \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \partial(D(V))$ durch $\overline{V}$, den Abschluß des offenen Kegels $\overline{V}$, definiert [Ka 89], d.h. identifizieren wir hier den Tangentialraum von $\check{S}_1^c \simeq \mathbb{R}^n$ in jedem Punkt mit $\mathbb{R}^n$, so gibt uns $\overline{V} \subset T_0\check{S}_1^c$ die invariante kausale Struktur auf $\check{S}_1^c$ durch Translation. Durch lineare Fortsetzung der Tangentialabbildung erhalten wir somit aufgrund der Kausalität, was uns $T_{eH}\tilde{d}(C_{eH}) \subset \overline{V}$ sichert, lokal in eH und wegen der G-Invarianz in allen Punkten eine lokale Abbildung $\tilde{D} : \Xi(C) \to \overline{D(V)}$. Ist $\tilde{D}$ global definiert, so kann man nach einer Fortsetzung von α suchen derart, daß φ dann durch $\varphi(f)(gH_{\mathbb{C}}) = \alpha(gH_{\mathbb{C}}) f(\tilde{D}(gH_{\mathbb{C}}))$ gegeben wird. Diese Einbettung in den ,,klassischen“ Hardyraum ermöglicht dann ein detailiertes Studium von $H(C)$, insbesondere kann man z.B. explizit denn Cauchy-Szegö-Kern von $H(C)$ bestimmen.

Dieses Programm ist bisher für Cayleyräume — für irreduzibles kompaktkausales $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \tau)$ durch die Bedingung $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ definiert— sowie für den Raum

$(S(U(1,1)\times U(1,1)), SU(1,1))$ ausgeführt ['OØ, KØ]. Die vorliegende Arbeit liefert für den allgemeinen Fall als ersten Schritt die Konstruktion der kausalen Kompaktifizierung $\tilde{d}$. Das Vorgehen dabei sei an einem einfachen Beispiel veranschaulicht.

Beispiel 1.1 Sei $G_1 := SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \;\Big|\; |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$ und die Cartaninvolution $\Theta(g) = {}^t\,\overline{g}^{-1}$. In diesem Fall wird G_1/K_1 in der Harish-Chandra-Realisierung durch $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ gegeben und der Bergman-Šilov-Rand dieses Gebiets ist offensichtlich $\check{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Es ist auch klar, daß ein rotationsinvariantes Kegelfeld der geforderten Art auf dem Einheitskreis existiert und bis auf die Wahl des Vorzeichens der Kegel eindeutig ist. Bekanntlich operiert G_1 hier durch $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ auf D_1 bzw. $\check{S}_1$ und eine triviale Rechnung liefert für den Stabilisator von $i \in \check{S}_1$ dann die Bedingungsgleichung $\operatorname{Im} a = \operatorname{Re} b$ bzw.

$$\operatorname{Stab}_{G_1}(i) = \left\{ \epsilon I \begin{pmatrix} \cosh t & i\sinh t \\ -i\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+is & s \\ s & 1-is \end{pmatrix} \;\Big|\; \epsilon \in \{\pm 1\}; s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tatsächlich ist diese Untergruppe eine maximale parabolische Untergruppe, wobei die angegebenen einzelnen Faktoren der Langlandszerlegung entsprechen. Mit $\tau(g) = \overline{g}$ ist $G_1^\tau = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \;\Big|\; a^2 - b^2 = 1 \right\}$ und (G_1, G_1^τ, τ) kompakt-kausal, denn $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{q}_1$ ist eindimensional.

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

definiert dann eine Involution auf G_1 mit Fixpunktgruppe $G := G_1^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \;\Big|\; |a|^2 = 1 \right\} = K_1$. G ist dabei Θ- und τ-invariant und mit $H := G^\tau = \{\pm 1\}$ ist auch (G, H, τ) offensichtlich kausal, wenn wir in $\mathfrak{g} = \left\{ t \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ den durch die nichtpositiven Zahlen gegebenen Kegel als definierenden Kegel der kausalen Struktur wählen. Mit dieser Wahl ist $\Gamma(C) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\Big|\; |a| \geq 1 \right\} \subset G_{1\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$. Da $G \subset G_1$ ist, operiert G in kanonischer Weise auf $\check{S}_1$ und mit $G \cap \operatorname{Stab}_{G_1}(i) = H$ faktorisiert diese Operation zu einer Einbettung $\tilde{d} : G/H \to \check{S}_1$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \mapsto a^2 i$, welche (bei richtiger Vorzeichenwahl der Kegelfelder) auch kausal ist. Die Fortsetzung auf $\Xi(C)$ ergibt sich dann zu $\tilde{D} : \Xi(C) \to \overline{D}_1$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} H \mapsto a^2 i$, so daß $\tilde{D}(\Xi^0(C)) = D_1 \backslash \{0\}$ ist.

Dieses triviale Beispiel zeigt dabei schon fast alle Punkte unseres Vorgehens: Ein kompakt-kausaler Raum (G_1, G_1^τ, τ) wird so gewählt, daß (G_1, K_1, Θ) Hermitesch-symmetrisch vom Tubentyp ist, wobei Θ als Cartaninvolution auf G_1 mit τ kommutiere. Wir konstruieren dann eine mit τ und Θ kommutierende Involution σ, so daß die Fixpunktgruppe $G := G_1^\sigma$ durch Einschränkung der kausalen Struktur von $(G_1, G_1^\tau, \tau) \supset (G, G^\tau, \tau)$ ein kompakt-kausaler Raum wird. Es ist an dieser Stelle aber anzumerken, daß G bzw. $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1^\sigma$ im allgemeinen nur reduktiv ist. Wir definieren deshalb:

Definition 1.2 *Sei (G, H, τ) ein symmetrischer Raum mit reduktiver Gruppe G, dann heißt (G, H, τ) schwach kompakt-kausal, wenn ein H-invarianter, abgeschlossener, konvexer und regulärer Kegel $C \subset \mathfrak{q}$ existiert, so daß $C \cap \mathfrak{k} \neq \{0\}$ und $C \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ ist.*

Für $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \tau)$ kompakt-kausal existiert in $\mathfrak{q}_1$ ein Kegel C_1 mit den geforderten Eigenschaften [H'O, Kapitel 3] zu (G_1, G_1^τ, τ), d.h. kompakt-kausale Räume sind schwach kompakt-kausal. Wie sich zeigt, wird die durch Einschränkung definierte kausale Struktur auf (G, G^τ, τ) von $C = C_1 \cap \mathfrak{g} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{g}} C_1$ erzeugt, und dieser Kegel hat offensichtlich die geforderten Eigenschaften. Es ist auch bekannt, daß für einen irreduziblen Raum (G, H, τ) schwach kompakt-kausal äquivalent zu kompakt-kausal ist [H'O, Theorem 3.1.18].

Der Bergman-Šilov-Rand $\check{S}_1$ des beschränkten Hermiteschen Gebiets G_1/K_1 ist als G-Bahn isomorph zu G/P' mit einer parabolischen Untergruppe P' als Stabilisator zu $x \in \check{S}_1$ [Wo]. Es zeigt sich, daß bei geeigneter Wahl von x dann $G^\tau = G \cap P'$ ist und wir eine Submersion $\tilde{d} : G/G^\tau \to \check{S}_1$ erhalten. Die Abbildung ist auch kausal, da $P' \simeq G_1^\tau \times N'$ und die kanonische Projektion $G_1/G_1^\tau \to G_1/P' \simeq \check{S}_1$ kausal ist.

Es bleibt dann noch zu zeigen, daß das Bild von $\tilde{d}$ dicht ist. Im Beispiel und allgemeiner für einen kompakten Quotienten G/H ist allein aus topologischen Gründen $\tilde{d}$ surjektiv; im allgemeinen ist aber ein (schwach) kompakt-kausaler Raum nicht kompakt. Wir vervollständigen den Beweis unter Verwendung der von Matsuki gegebenen Doppelrestklassenzerlegung $G_1 = \bigcup_{j \in I(P)} G_1^\sigma g_j P$ für einen symmetrischen Raum $(G_1, G_1^\sigma, \sigma)$ und eine parabolische Untergruppe P [Ma 79, Ma 82]. Wir wissen, daß P' eine — für einfaches $\mathfrak{g}$ maximale — parabolische Untergruppe ist. Für eine minimale parabolische Untergruppe $P \subset P'$ ist daher $GP' = \bigcup_{j \in J} G_1^\sigma g_j P$, mit $J \subset I(P)$, und wir sind fertig, wenn alle die Untermannigfaltigkeiten Gg_jP, welche offen in G_1 sind, auch in GP' liegen. Allgemeiner noch gibt eine Zerlegung $G_1 = \bigcup_{j \in I(P')} Gg_jP'$ sofort die Zerlegung des Bergman-Šilov-Randes in G-Bahnen.

Die Arbeit ist dabei wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 2 werden die benötigten Resultate über die kausale Struktur von $\check{S}_1$ und zur Doppelrestklassenzerlegung nach Matsuki zusammengestellt. Im nächsten Abschnitt geben wir eine kausale Kompaktifizierung für Cayleyräume ausgehend von der Diagonaleinbettung $d : G \to G \times G,\ g \mapsto (g, g)$, im Bergman-Šilov-Rand $\check{S}_1$ von $G/K \times G/K$ und die Zerlegung in G-Bahnen für $\check{S}_1$. Die Resultate in diesem Abschnitt sind bekannt

['OØ, Ko, Ka 87]; der von uns gegebene Beweis läßt aber eine Verallgemeinerung für andere kompakt-kausale Räume zu. In Abschnitt 4 konstruieren wir dazu für einen irreduziblen Cayleyraum (G_1, G_1^τ, τ) eine Familie von Involutionen σ und die entsprechenden Kompaktifizierungen für $(G_1^\sigma, (G_1^\sigma)^\tau, \tau)$; im folgenden Abschnitt geben wir hinreichende Kriterien für kompakt-kausales (G_1, G_1^τ, τ), welche die Existenz einer Involution σ und der zugehörigen Kompaktifizierung sichern. Die mit den Resultaten dieser beiden Abschnitte zu konstruierenden Kompaktifizierungen sind für die klassischen irreduziblen kompakt-kausalen Tripel $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \tau)$ in den Anhängen A bzw. B im Detail ausgeführt. Schließlich wird im letzten Abschnitt die Kompaktifizierung der Lorentzmannigfaltigkeiten $SO(2, n)/SO(1, n)$ diskutiert und gezeigt, daß für die in den vorhergehenden Abschnitten nicht erfaßten irreduziblen kompakt-kausalen Räume keine kausale Kompaktifizierung der gesuchten Art existiert.

Am Ende dieser Einleitung bleibt mir noch, meinen Dank allen den abzustatten, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben. Namentlich erwähnen darf ich zuerst meinen Doktorvater Prof. Holdgrün und Prof. 'Olafsson, besonders auch für die während meines Aufenthalts an der Lousiana State University gewährte Gastfreundschaft. T. Brüggemann hat freundlicherweise für Teile der Arbeit das TeX-en ausgeführt.

2 Voraussetzungen

Sei $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \Theta)$ eine irreduzible orthogonale Liealgebra von nichtkompaktem Hermiteschen Typ und (G, K, Θ) eine ihr assoziierte Gruppe. Wenn nicht anders vermerkt, nehmen wir dabei $G \subset G_{\mathbb{C}}$ an, wobei $G_{\mathbb{C}}$ die einfach zusammenhängende komplexe Liegruppe zur Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ ist. Bei dieser Wahl entspricht einem Algebrenendomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein Endomorphismus von G bzw. $G_{\mathbb{C}}$ und umgekehrt, wobei wir alle diese Abbildungen mit demselben Buchstaben bezeichnen werden. Es sei r der reelle Rang von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ eine Cartanalgebra und $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ das entsprechende Wurzelsystem, so daß $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} + \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\gamma}$. Wir wählen ein System stark-orthogonaler Wurzeln $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \subset \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ und dazugehörende Wurzelvektoren $E_j \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C},\gamma_j}$ bzw. $E_{-j} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C},-\gamma_j}$, normalisiert durch die Bedingung $[E_j, E_{-j}] = H_j$, wobei $H_j \in i\mathfrak{t}$ durch

$$\langle H_j, H \rangle = 2 \frac{\gamma_j(H)}{\langle \gamma_j, \gamma_j \rangle} \quad \text{für } H \in \mathfrak{t}$$

definiert ist. Bis auf Normalisierung können diese Vektoren als Elemente einer Weyl-Basis mit Bezug auf $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p}$ gewählt werden, so daß $X_j := E_j + E_{-j}$ und $Y_j := i(E_j - E_{-j})$ Elemente von $\mathfrak{p}$ sind und der Unterraum $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{R} X_j$ maximal abelsch in $\mathfrak{p}$ ist [He, S. 387, S. 421]. Die möglichen Wurzelsysteme $\rho(\Delta) := \{\gamma|_{\mathfrak{t}^-} \mid \gamma \in \Delta, \gamma|_{\mathfrak{t}^-} \neq 0\}$, mit $\mathfrak{t}^- := \sum \mathbb{R} i H_j$, der durch Restriktion definierten Wurzeln beschreibt dann folgendes Theorem.

Theorem 2.1 *(***Moore***) Sei $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ einfach und bezeichne ρ die Einschränkung von Wurzeln von $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ auf $\mathfrak{t}^-$. Wenn man jedes Element von $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ mit seinem ρ-Bild identifiziert, so können als Wurzelsysteme*

(i) $\rho(\Delta) \cup \{0\} = \{\pm\frac{1}{2}\gamma_s \pm \frac{1}{2}\gamma_t \mid 1 \leq s, t \leq r\}$ oder

(ii) $\rho(\Delta) \cup \{0\} = \{\pm\frac{1}{2}\gamma_s \pm \frac{1}{2}\gamma_t, \pm\frac{1}{2}\gamma_s \mid 1 \leq s, t \leq r\}$

auftreten. Weiterhin haben die ρ-Bilder der γ_s alle dieselbe Länge.

Da wir symmetrische Räume in den Bergman-Šilov-Rand von G/K einbetten wollen, zitieren wir hier die von uns benötigten Resultate [KW, Wo][1]:

Definiere die (vollständige) Cayley-Transformierende durch

$$c = \prod_{j=1}^{r} c_j, \quad c_j = \exp \frac{\pi}{4} i Y_j.$$

[1] Es sei bemerkt, daß die beiden Arbeiten z.B. in der Definition der Harish-Chandra-Realisierung von G/K oder der Cayley-Transformierenden differieren. Bei unseren Definitionen folgen wir in der Regel [Wo].

Es sei $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{k}_\mathbb{C} + \mathfrak{p}^-$ die übliche Zerlegung für Hermitesche Algebren, $P^\pm$ bzw. $K_\mathbb{C}$ die zu den Unteralgebren gehörenden analytischen Untergruppen und $x_0 = eK_\mathbb{C}P^- \in G_\mathbb{C}/K_\mathbb{C}P^- =: M^*$ die Nebenklasse des Einselements in der Borel-Realisierung des kompakten Hermiteschen symmetrischen Raumes dual zu G/K. Dann ist der Bergman-Šilov-Rand $\check{S}$ von G/K die abgeschlossene Bahn $G(cx_0)$ im topologischen Rand von $G/K \subset M^*$. Wir bemerken, daß auch $c^{-1}x_0$ in dieser Bahn enthalten ist. Tatsächlich zeigt eine $\mathfrak{sl}(2)$-Rechnung $c_j = \exp(-E_j)\exp(\log\sqrt{2}H_j)\exp(E_{-j})$ und damit ist $c^{-1}x_0 = \Theta(c)^{-1}x_0 = \exp(\sum E_j)\cdot x_0$. Dies ist aber ein Element des Bergman-Šilov-Randes, da die Bilder unter der Exponentialabbildung $\exp(\lambda Z^0)$ der reellen Vielfachen von $Z^0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$, welches die komplexe Struktur auf $\mathfrak{p}$ definiert, als komplexe Rotationen $(z \mapsto e^{i\lambda}z)$ auf $\mathfrak{p}^+$ operieren.

Der Normalisator N von $cK_\mathbb{C}P^-$ bestimmt sich wie folgt. Sei $X^0 := \sum_{j=1}^{r} X_j$, dann sind $\pm 2, \pm 1$ und 0 die einzig möglichen Eigenwerte von $\operatorname{ad} X^0$. Definieren wir $\mathfrak{n}_\mathbb{C}$ als Summe aller Eigenräume zu nichtpositiven Eigenwerten von $\operatorname{ad} X^0$ in $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ und $N_\mathbb{C}$ als die zugehörige analytische Untergruppe von $G_\mathbb{C}$, so erhalten wir mit $N = N_\mathbb{C} \cap G$:

Satz 2.2 *Der Normalisator des Randpunktes $cK_\mathbb{C}P^-$ von G/K in $G_\mathbb{C}/K_\mathbb{C}P^-$ bzw. in $\mathfrak{p}^+$ ist N. Für einfaches G ist dabei N eine maximale parabolische Untergruppe.*

Da unsere Einbettungen kausale Abbildungen werden sollen, wiederholen wir hier auch die Definition der kausalen Struktur von $\check{S}$ für Räume vom Tubentyp, d.h. solche für die G/K biholomorph äquivalent zu einem Tubengebiet ist. Mit $\check{S} = G(c^{-1}x_0)$ definieren wir den Cayley-transformierten Rand $\check{S}^c = cG(c^{-1}x_0) = \operatorname{Ad}(c)Gx_0$. Wir bemerken, daß die Linksmultiplikation L_c in M^* einen Diffeomorphismus von $\check{S}^c$ auf $\check{S}$ gibt. Tatsächlich ist die Eigenschaft vom Tubentyp zu sein äquivalent zu $\operatorname{Ad}(c^2)\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$, womit dann $\operatorname{Ad}(c^2)\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ und weiter $L_c\check{S}^c = \operatorname{Ad}(c^2)G(cx_0) = G(cx_0) = \check{S}$ ist, was unsere Behauptung beweist.

Identifizieren wir den Tangentialraum $T_{x_0}M^*$ und $\mathfrak{p}^+$ mittels der Abbildung $\xi : \mathfrak{p}^+ \to M^*\ X \mapsto \exp X \cdot x_0$ miteinander, so entspricht dem Unterraum $T_{x_0}\check{S}^c$ die Algebra $\mathfrak{s}^+ = \mathfrak{p}^+ \cap \operatorname{Ad}(c)\mathfrak{g}$ und diesem Raum kann die Struktur einer Euklidischen bzw. formal reellen Jordan Algebra gegeben werden [KW, Abschnitt 6]. Der die kausale Struktur von $\check{S}^c$ definierende Kegel im Tangentialraum wird jetzt von der Menge aller Quadrate in $\mathfrak{s}^+$ [Ka 89] oder — äquivalent dazu — durch den Abschluß der K^c-Bahn durch den Punkt $E = -i\xi^{-1}(cx_0)$ gebildet, wobei $K^c = K_\mathbb{C} \cap \operatorname{Ad}(c)G$. Die kausale Struktur von $\check{S}$ wird dann durch das Bild dieses Kegels unter der Tangentialabbildung $T_{x_0}L_c$ gegeben, so daß L_c ein kausaler Diffeomorphismus wird. Wir identifizieren im folgenden mittels $\xi^c : \operatorname{Ad}(c)\mathfrak{p}^+ \to M^*\ \operatorname{Ad}(c)X \mapsto \exp(\operatorname{Ad}(c)X)cx_0$ wie oben die Räume $\operatorname{Ad}(c)\mathfrak{p}^+$ und $T_{cx_0}M^*$. Da Räume vom Tubentyp auch durch $Z^0 = -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{r} H_j$ charakterisiert werden, ist $\operatorname{Ad}(c)(iZ^0) = \frac{1}{2}X^0$ und somit das

Bild von $\mathfrak{p}^+$ der $(+2)$-Eigenraum von $\operatorname{ad} X^0$ in $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Weiterhin haben wir dann $\operatorname{Ad}(c)\mathfrak{s}^+ = \operatorname{Ad}(c)\mathfrak{p}^+ \cap \operatorname{Ad}(c^2)\mathfrak{g} = \operatorname{Ad}(c)\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{g} =: \mathfrak{q}^+$ und diese Unteralgebra ist die Summe der Eigenräume zu positiven Eigenwerten von $\operatorname{ad} X^0$ in $\mathfrak{g}$. Tatsächlich ist für Räume vom Tubentyp $+2$ der einzige positive Eigenwert.

Mit dem Diffeomorphismus $\eta : \check{S} \to G/N \; gcx_0 \mapsto gN$ erhalten wir jetzt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T_{x_0}\check{S}^c \arrow[r, "TL_c"] & T_{cx_0}\check{S} \arrow[r, "T\eta"] & T_{eN}G/N \\
\mathfrak{s}^+ \arrow[u, "T\xi"] \arrow[r, "\operatorname{Ad}(c)"] & \mathfrak{q}^+ \arrow[u, "T\xi^c"] \arrow[r, "\operatorname{id}"] & \mathfrak{q}^+ \arrow[u, "T(\pi \circ \exp)"']
\end{tikzcd}$$

Sei $H_{\mathbb{C}}$ die analytische Untergruppe zu $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, der Komplexifizierung des Zentralisators von $\operatorname{ad} X^0$ in $\mathfrak{g}$, so gilt $H := H_{\mathbb{C}} \cap G = \operatorname{Ad}(c)K_{\mathbb{C}} \cap G = \operatorname{Ad}(c)K^c$. Mit $\operatorname{Ad}(c)E = \operatorname{Ad}(c)i\sum E_j = \frac{1}{2}\sum(Y_j - iH_j) =: Y_+$ ist der die kausale Struktur definierende Kegel C_+ in $\mathfrak{q}^+$ jetzt der Abschluß der H-Bahn durch Y_+, also $C_+ = \overline{\operatorname{Ad}(H)Y_+}$.

Bemerkung. Alternativ zu unserem Vorgehen wird in [H'O, Kapitel 1.6] bewiesen, daß $C_+ = \overline{conv\, \operatorname{Ad}(H_0)\mathbb{R}^+ Y_+}$ ein regulärer H-invarianter Kegel in $\mathfrak{q}^+$ ist. Wie man dann leicht zeigen kann, ist dieser Kegel auch invariant unter der linearen Isotropiedarstellung von N in $T_{eN}G/N$ und definiert damit eine kausale Struktur für G/N, welche eindeutig bis auf die Wahl des Vorzeichens ist.

Wir benötigen im folgenden auch einige Resultate von Matsuki zur Zerlegung einer reellen halbeinfachen Gruppe G in Doppelrestklassen $G = \bigcup_{j \in I(P)} Hg_jP$, wobei (G, H, σ) ein affiner symmetrischer Raum und P eine parabolische Untergruppe von G ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit seien σ und Θ dabei kommutierend gewählt.

Wenn wir uns zuerst auf minimale parabolische Untergruppen beschränken, so können diese in der üblichen Weise durch Angabe eines maximalen abelschen Unterraums $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und eines Systems positiver Wurzeln $\Sigma^+ \subset \Sigma(\mathfrak{a})$ parametisiert werden. Hier und im folgenden bezeichne dabei Σ bzw. $\Sigma(\mathfrak{a})$ das Wurzelsystem der Algebra $\mathfrak{g}$ bezüglich der abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$. Wir verdeutlichen diese Beschreibung, indem wir gegebenenfalls $P(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ oder $\mathfrak{p}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ für die Liealgebra schreiben. Für eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{a}$ definieren wir dann eine Menge (positiver) Wurzeln durch $\Sigma(\mathfrak{r})^{(+)} := \{\gamma \in \Sigma^{(+)} | H_\gamma \in \mathfrak{r}\}$. H_γ ist hierbei der γ unter der üblichen Identifizierung — sei $B(\quad,\quad)$ die Killingform, so definiert man H_γ durch $B(H_\gamma, H) = \gamma(H)$ — von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^*$ entsprechende Vektor. Eine Verwechselung mit den weiter oben definierten (eingeschränkten) Wurzeln $\gamma \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ bzw. H_i ist aus dem jeweiligen Kontext heraus ausgeschlossen. Tatsächlich beschreibt Theorem 2.1

auch das Wurzelsystem $\Sigma(\mathfrak{a})$, denn es gilt $\mathrm{Ad}(c)^*(\Sigma(\sum \mathbb{R}X_j)) = \rho(\Delta)$ [Wo, He, S. 528] und alle anderen $\mathfrak{a}$ sind zu dem maximalen abelschen Unterraum $\sum \mathbb{R}X_j$ dann $\mathrm{Ad}(K)$-konjugiert, die Wurzelsysteme also isomorph. Da alle minimalen parabolischen Untergruppen konjugiert und ihr eigener Normalisator sind, können wir auch den Quotienten G/P mit der Menge aller minimalen parabolischen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ identifizieren.

Sei jetzt $\mathfrak{a}$ ein σ-stabiler maximaler abelscher Unterraum von $\mathfrak{p}$ und $W(\mathfrak{a}) := N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ die zugehörige Weylgruppe. Wir definieren zwei Untergruppen

$$W_\sigma(\mathfrak{a}) := \{w \in W(\mathfrak{a}) \mid w(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}\}$$

und

$$W(\mathfrak{a}, K \cap H) := N_{K\cap H}(\mathfrak{a})/Z_{K\cap H}(\mathfrak{a}) \subset W_\sigma(\mathfrak{a}).$$

Sei $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ der (-1)-Eigenraum der Involution σ, so daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$. Die offenen Doppelrestklassen bzw. äquivalent dazu die offenen H-Bahnen in G/P werden dann wie folgt bestimmt.

Proposition 2.3 [Ma 79] *Eine minimale parabolische Unteralgebra $\mathfrak{p}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$, welche mit einem Punkt in G/P identifiziert sei, ist dann und nur dann in einer offenen H-Bahn enthalten, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ ist maximal abelsch in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$,

(ii) Σ^+ ist $\sigma\Theta$-verträglich (d.h. $\gamma \in \Sigma^+ \backslash \Sigma^+(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}) \Rightarrow \sigma\Theta(\gamma) \in \Sigma^+ \backslash \Sigma^+(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h})$).

Die Anzahl der offenen Bahnen ist $|W_\sigma(\mathfrak{a})| \ / \ |W(\mathfrak{a}, K \cap H)|$.

Bemerkung. Mit Lemma 7 in [Ma 79] legt Bedingung *(i)* eindeutig die $\mathrm{Ad}(K \cap H)_0$-Konjugationsklasse von $\mathfrak{a}$ fest.

Im nächsten Schritt lassen wir beliebige parabolische Untergruppen $P' \supset P$ zu und bestimmen die offenen Doppelrestklassen $HgP(\mathfrak{a}, \Sigma^+) \subset HP'$. Dazu sei $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}' + \mathfrak{a}' + \mathfrak{n}'$ die Langlandszerlegung der Liealgebra von P, so daß $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$. Definiere $\mathfrak{a}'_+ := \{X \in \mathfrak{a}' \mid \gamma(X) > 0$ für alle γ mit $\mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{n}'\}$, dann haben wir zunächst für minimale parabolische Unteralgebren in $\mathfrak{p}'$.

Satz 2.4 [Ma 82] *Jede minimale parabolische in $\mathfrak{p}'$ enthaltene Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist $H \cap P'$-konjugiert zu einer minimalen parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{p}_1$ von der Form $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}(\mathfrak{a}_1, \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+)$, wobei $\mathfrak{a}_1$ ein σ-stabiler maximaler abelscher Unterraum von $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}'$ ist und $\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+$ der Bedingung $\langle \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+, \mathfrak{a}'_+ \rangle \subset \mathbb{R}^+$ genügt.*

Definieren wir $\mathfrak{m}'' := \{X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}' + \sigma\mathfrak{a}') \mid B(X, \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}) = 0\}$, wobei $\mathfrak{z}$ das Zentrum des Zentralisators $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}' + \sigma\mathfrak{a}')$ ist, und weiter

$$\Sigma(\mathfrak{a}_1)_{\mathfrak{m}'} := \Big\{\gamma \in \Sigma(\mathfrak{a}_1) \mid \langle \gamma, \mathfrak{a}' \rangle = \{0\}\Big\}$$

$$\Sigma(\mathfrak{a}_1)_{\mathfrak{m}''} := \Big\{\gamma \in \Sigma(\mathfrak{a}_1) \mid \langle \gamma, \mathfrak{a}' + \sigma\mathfrak{a}' \rangle = \{0\}\Big\},$$

so lassen sich die gesuchten offenen Doppelrestklassen oder H-Bahnen in HP'/P damit einfach beschreiben.

Korollar 2.5 [Ma 82] *Eine minimale parabolische Unteralgebra* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}(\mathfrak{a}_1, \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+)$, *welche den Voraussetzungen des Satzes 2.4 genügt, liegt in einer offenen H-Bahn von HP'/P dann und nur dann, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\langle \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+_{\mathfrak{m}'}, \sigma\Theta\mathfrak{a}'_+ \rangle \subset \mathbb{R}^+$,

(ii) $\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+_{\mathfrak{m}''}$ *ist $\sigma\Theta$-verträglich (d.h.* $\gamma \in \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+_{\mathfrak{m}''} \setminus \Sigma(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{h})^+_{\mathfrak{m}''} \Rightarrow \sigma\Theta\gamma \in \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+_{\mathfrak{m}''} \setminus \Sigma(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{h})^+_{\mathfrak{m}''}$*)*[2],

(iii) $\mathfrak{m}'' \cap \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{q}$ *ist maximal abelsch in* $\mathfrak{m}'' \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.

Sind wir nicht nur an den offenen Doppelrestklassen, sondern der vollständigen Zerlegung von G interessiert, so sind zunächst die $K \cap H$-Konjugationsklassen der σ-stabilen maximalen abelschen Unterräume $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ zu bestimmen. Dazu benötigt wird der Begriff des $\mathfrak{q}$-orthogonalen Systems.

Definition 2.6 *Sei* $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{p}$ *σ-stabil, maximal abelsch und* $\mathfrak{a}_{1,+} := \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{h}$ *maximal abelsch in* $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. *Seien* $\alpha_i \in \Sigma(\mathfrak{a}_{1,+})$ *und* $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \setminus \{0\}$ *Wurzelvektoren für* $i = 1, \ldots, k$, *so heißt* $\{X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_k}\}$ *ein $\mathfrak{q}$-orthogonales System von* $\Sigma(\mathfrak{a}_{1,+})$, *falls*

(i) $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{q}$ *für* $i = 1, \ldots, k$,

(ii) $[X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] = 0$ *und* $[X_{\alpha_i}, \Theta X_{\alpha_j}] = 0$ *für* $1 \leq i < j \leq k$.

Zwei derartige Systeme $\{X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_k}\}$ und $\{Y_{\beta_1}, \ldots, Y_{\beta_k}\}$ heißen dabei $W(\mathfrak{a}_1, K \cap H)$-konjugiert oder äquivalent, wenn es ein $w \in W(\mathfrak{a}_1, K \cap H)$ gibt mit $w(\sum \mathbb{R}H_{\alpha_i}) = \sum \mathbb{R}H_{\beta_i}$. Wie man sofort sieht, definiert dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Jetzt gilt:

[2] Die in [Ma 82] gegebene Definition der Bedingung der $\sigma\Theta$-Verträglichkeit bzw. der σ-Verträglichkeit im Fall der abgeschlossenen Bahnen ist fehlerhaft. Mit $\mathfrak{a}'_1 + \sigma\mathfrak{a}'_1 = \mathfrak{a}'_1 \oplus \mathfrak{a}''_1$ — in der Notation des Artikels — läßt sich aber die korrekte Bedingung leicht aus den Propositionen 1 und 2 in [Ma 79] ableiten.

Theorem 2.7 [Ma 79] *Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen $K \cap H$-Konjugationsklassen σ-stabiler maximaler abelscher Unterräume von $\mathfrak{p}$ und $W(\mathfrak{a}_1, K\cap H)$-Konjugationsklassen $\mathfrak{q}$-orthogonaler Systeme von $\Sigma(\mathfrak{a}_{1,+})$. Sei $Q = \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}\}$ $\mathfrak{q}$-orthogonal, $\mathfrak{r} = \sum \mathbb{R} H_{\alpha_i}$, $\mathfrak{a}_{Q,+} = \{H \in \mathfrak{a}_{1,+} \mid B(H, \mathfrak{r}) = 0\}$ und $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{q} + \sum \mathbb{R}(X_{\alpha_i} - X_{-\alpha_i}) + \mathfrak{a}_{Q,+}$, wobei $X_{-\alpha_i} = \Theta X_{\alpha_i}$, dann entsprechen sich die Klassen von Q und $\mathfrak{a}_Q$. Sind die X_{α_i} mit $2\alpha_i(H_{\alpha_i})B(X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}) = -1$ normiert, ist $\mathfrak{a}_Q = Ad(\exp \frac{\pi}{2}(X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \exp \frac{\pi}{2}(X_{\alpha_k} + X_{-\alpha_k}))\mathfrak{a}_1$.*

Sind diese Konjugationsklassen erst einmal bekannt, so läßt sich die Zerlegung von G leicht angeben.

Satz 2.8 [Ma 79] *Sei $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ ein vollständiges Vertretersystem von $W(\mathfrak{a}_1, K \cap H)$-Konjugationsklassen $\mathfrak{q}$-orthogonaler Systeme in $\Sigma(\mathfrak{a}_{1,+})$ und sei $Q_j = \{X_{\alpha_{1j}}, \dots, X_{\alpha_{kj}}\}$ wie in Theorem 2.7 normiert. Mit $c(Q_j) = \exp \frac{\pi}{2}(X_{\alpha_{1j}} + X_{-\alpha_{1j}}) \cdot \ldots \cdot \exp \frac{\pi}{2}(X_{\alpha_{kj}} + X_{-\alpha_{kj}})$ ist dann*

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{v \in W(\mathfrak{a}_i, K\cap H)\backslash W(\mathfrak{a}_i)} H w_v c(Q_i) P$$

die disjunkte Vereinigung von Doppelrestklassen, wobei $P = P(\mathfrak{a}_1, \Sigma^+)$ eine minimale parabolische Untergruppe, $\mathfrak{a}_i = Ad(c(Q_i))\mathfrak{a}_1$ und $w_v \in N_K(\mathfrak{a}_i)$ jeweils ein Repräsentant für $v \in W(\mathfrak{a}_i, K \cap H)\backslash W(\mathfrak{a}_i)$ ist.

Sei jetzt $P' \supset P$ wieder eine beliebige parabolische Untergruppe, so benötigen wir noch eine Beschreibung der in HP' liegenden Doppelrestklassen. Wir führen zuerst eine modifizierte Definition der $\mathfrak{q}$-orthogonalen Systeme ein. Sei dazu $\hat{\mathfrak{a}}_1$ ein σ-stabiler maximaler abelscher Unterraum von $\mathfrak{p}$, so daß $\hat{\mathfrak{a}}_1 \supset \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{m}'' \cap \hat{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{h}$ maximal abelsch in $\mathfrak{m}'' \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$. Sei $\Sigma(\hat{\mathfrak{a}}_1)^+$ derart gewählt, daß $\langle \Sigma(\hat{\mathfrak{a}}_1)^+, \mathfrak{a}'_+ \rangle \subset \mathbb{R}^+$, dann ist gemäß Satz 2.4 $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}(\hat{\mathfrak{a}}_1, \Sigma(\hat{\mathfrak{a}}_1)^+) \subset \mathfrak{p}'$ bzw. $P_1 \subset P'$.

Definition 2.9 *Sei $\Sigma_{\mathfrak{h}}(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}''} = \{\alpha \in \Sigma(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}''} | H_\alpha \in \mathfrak{m}'' \cap \hat{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{h}\}$, so heißt eine Menge $Q = \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}\}$ von Wurzelvektoren $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, wobei $\alpha_i \in \Sigma_{\mathfrak{h}}(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}''}$, ein $\mathfrak{q}$-orthogonales System von $\Sigma_{\mathfrak{h}}(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}''}$, falls*

(i) $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{q}\backslash\{0\}$ *für* $i = 1, \dots, k$,

(ii) $[X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] = [X_{\alpha_i}, \Theta X_{\alpha_j}] = 0$ *für* $1 \le i < j \le k$.

Auch für diese Systeme ist eine Äquivalenzrelation definiert. Dazu sei $\tilde{\mathfrak{a}}_1$ ein σ-stabiler maximaler abelscher Unterraum von $\mathfrak{p}$, so daß $\tilde{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{h}$ maximal abelsch in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$, $\tilde{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{h} \supset \hat{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{h}$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{q} \subset \hat{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{q}$. Mit $\mathfrak{r} = \{Y \in \tilde{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{h} \mid B(Y, \hat{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{h}) = 0\}$ heißen dann $\{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}\}$ und $\{Y_{\beta_1}, \dots, Y_{\beta_k}\}$ äquivalent, falls ein $w \in W(\tilde{\mathfrak{a}}_1, K \cap H)$ existiert, so daß $w(\mathfrak{r} + \sum H_{\alpha_i}) = \mathfrak{r} + \sum H_{\beta_i}$ ist. Aus den vorhergehenden Resultaten folgt damit:

Korollar 2.10 [Ma 82] *Sei $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ ein vollständiges Vertretersystem der Klassen $\mathfrak{q}$-orthogonaler Systeme von $\Sigma_{\mathfrak{h}}(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}''}$. Sind diese wie in Theorem 2.7 normiert und $c(Q_i)$ sowie $\hat{\mathfrak{a}}_i$ wie in Satz 2.8 definiert, dann gilt*

$$HP' = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{v \in W(\hat{\mathfrak{a}}_i, K \cap H) \cap W(\hat{\mathfrak{a}}_i)_{\mathfrak{m}'} \backslash W(\hat{\mathfrak{a}}_i)_{\mathfrak{m}'}} H w_v c(Q_i) P_1,$$

wobei $W(\hat{\mathfrak{a}}_i)_{\mathfrak{m}'} = N_{K \cap M'}(\hat{\mathfrak{a}}_i)/Z_{K \cap M'}(\hat{\mathfrak{a}}_i)$ und $P_1 \subset P'$ minimal parabolisch wie in Satz 2.4 gewählt ist.

3 Kausale Kompaktifizierung der Räume vom Cayley-Typ

Wir konstruieren in diesem Abschnitt kausale Kompaktifizierungen für die irreduziblen Cayleyräume. Außerdem geben wir für einen solchen Raum (G, H, τ) die G-Bahnen der Kompaktifizierung.

3.1 Die Kompaktifizierung

Sei (G, H, τ) ein irreduzibler kompakt-kausaler symmetrischer Raum vom Cayley-Typ und Θ eine mit τ kommutierende Cartaninvolution auf G. Wir definieren $(G_1, G_1^\sigma, \sigma) := (G \times G, \Delta G, \sigma)$, wobei $\sigma : G \times G \to G \times G$ $(g, h) \mapsto (h, g)$ und die Diagonale $\Delta G = \{(g, g) \mid g \in G\}$ die Fixpunktmenge der Involution σ ist. Offensichtlich ist G_1/K_1, $K_1 := K \times K$, vom Tubentyp, da G/K vom Tubentyp ist [H'O, Thm. 3.1.18].

Lemma 3.1 *Die Abbildung $d : G \to G \times G \quad g \mapsto (g, g)$ faktorisiert zu einer Abbildung $\tilde{d} : G/H \to G \times G/\overline{P} \times P$, wobei P eine gemäß Satz 2.2 gewählte maximale parabolische Untergruppe von G und $\overline{P} = \Theta P$ ist. $\tilde{d}$ ist dann ein Diffeomorphismus auf eine offene und dichte Teilmenge von $G \times G/\overline{P} \times P$.*

Beweis: Nach Satz 2.2 wird die Liealgebra Lie(P) von P von den zu nichtpositiven Eigenwerten gehörenden Eigenräumen von $\operatorname{ad} X^0$ gebildet; außerdem ist $\tau = \operatorname{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i X^0)$ und $H = Z_G(X^0)$ [H'O, S. 24]. Da $X^0 \in \mathfrak{p}$, erhalten wir $\Theta P \cap P = H$ und $\tilde{d}$ ist wohldefiniert und injektiv. Weiter ist das Bild eine Untermannigfaltigkeit [Va, Thm. 2.9.7] und offen, da $\dim G/P = \dim G/\overline{P} = \dim$(Summe aller „negativen" Eigenräume von $\operatorname{ad} X^0$) $= \dim$(Summe aller „positiven" Eigenräume von $\operatorname{ad} X^0$) und $\dim G/H = \dim$(Summe aller Eigenräume mit Eigenwert ungleich Null).

Da $\mathfrak{p}$ der (-1)-Eigenraum zu Θ ist, ist $\mathfrak{p}_1 := \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ der entsprechende zu $\Theta_1 := \Theta \times \Theta$. Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ maximal abelsch, so ist $\mathfrak{a}_1 = \{(X, Y) \mid X, Y \in \mathfrak{a}\}$ ein σ-stabiler maximaler abelscher Unterraum von $\mathfrak{p}_1$ und offensichtlich ist $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{g}_1^\sigma$ $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma})$, wobei $\mathfrak{q}_{1\sigma}$ der (-1)-Eigenraum der Involution σ in $\mathfrak{g}_1$ ist, dann maximal abelsch in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{g}_1^\sigma (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma})$.

Wir nutzen jetzt Proposition 2.3 um die offenen Doppelrestklassen $G_1^\sigma g P_{min}$ zu bestimmen, wobei P_{min} eine minimale parabolische Untergruppe ist. Für die Weylgruppe gilt $W(\mathfrak{a}_1) = W(\mathfrak{a}) \times W(\mathfrak{a})$ und $(w, w') \in W_\sigma(\mathfrak{a}_1)$ heißt nach Definition

$(w,w')(X,X) = (wX, wX') \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{g}_1^\sigma$ für beliebige $X \in \mathfrak{a}$, was sofort $w = w'$ impliziert. Aber die Elemente der Form (w,w) bilden gerade auch $W(\mathfrak{a}_1, K_1 \cap G_1^\sigma)$ und somit ist $W_\sigma(\mathfrak{a}_1) = W(\mathfrak{a}_1, K_1 \cap G_1^\sigma)$, d.h. es gibt genau eine offene Doppelrestklasse.

Für die Menge aller Wurzeln haben wir $\sum(\mathfrak{a}_1) = \{(\gamma,0),(0,\gamma) \mid \gamma \in \sum(\mathfrak{a})\}$ und damit $\sum(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{g}_1^\sigma) = \{\gamma \in \sum(\mathfrak{a}_1) \mid H_\gamma \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{g}_1^\sigma\} = \emptyset$. Die Bedingung der $\sigma\Theta$-Verträglichkeit — d.h. $\gamma \in \sum^+(\mathfrak{a}_1) \Rightarrow \sigma\Theta\gamma \in \sum^+(\mathfrak{a}_1)$ — bestimmt dann $P_{min} = P(\mathfrak{a}, \Theta\sum^+(\mathfrak{a})) \times P(\mathfrak{a}, \sum^+(\mathfrak{a}))$ eindeutig (bis auf $K_1 \cap G_1^\sigma$-Konjugation) als diejenige parabolische Untergruppe, für welche $G_1^\sigma P_{min}$ offen ist.

Da ohne Einschränkung $P(\mathfrak{a}, \sum^+(\mathfrak{a})) \subset P$ angenommem werden kann, haben wir $G_1^\sigma P_{min} \subset \Delta G(\overline{P} \times P)$ und das Bild ist damit auch dicht. □

Da wir eine kausale Abbildung in den Bergman-Šilov-Rand suchen, bleibt noch zu zeigen, daß $G \times G/\overline{P} \times P$ der Bergman-Šilov-Rand $\check{S}_1 = \check{S} \times \check{S}$ von $G \times G/K \times K$ ist und daß $\tilde{d}$ zu einer kausalen Abbildung wird, wenn wir G/H mit seiner kompakt-kausalen Struktur und $\check{S} \times \check{S}$ mit der durch die kausale Struktur der Faktoren definierten Produktstruktur versehen.

Lemma 3.2 *$\eta : \check{S} \times \check{S} \to G/\overline{P} \times G/P$ $(gc^{-1}x_0, hcx_0) \mapsto (g\overline{P}, hP)$ ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis: Definiere $\Theta_r(g) = \mathrm{Ad}(\exp(\pi Z^0))(g)$, dann sind Θ_r und Θ identisch auf G und $\overline{P} = \Theta_r P$ normalisiert $\exp(\pi Z^0)cx_0 = \Theta_r(c)x_0 = c^{-1}x_0$, wobei die letzte Identität mit $c \in \exp(i\mathfrak{p})$ folgt. □

Eine σ-invariante kausale Struktur auf $\check{S} \times \check{S}$ wird durch $C_+ + C_+ \subset \mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{q}^+ \simeq T_{(cx_0,cx_0)}\check{S} \times \check{S}$ gegeben, wobei $T_{cx_0}\check{S}$ bzw. $T_{eP}G/P$ wie in Abschnitt 2 mit $\mathfrak{q}^+$ identifiziert werden.

Proposition 3.3 *Die Abbildung $\tilde{d} : G/H \to G_1/P'$, $P' := \overline{P} \times P$, gibt eine kausale Kompaktifizierung des kompakt-kausalen Raumes G/H im Bergman-Šilov-Rand von G_1/K_1.*

Beweis: Es ist nur noch die Kausalität der Abbildung nachzuweisen. Um den Kegel in $T_{(e\overline{P},eP)}(G \times G/\overline{P} \times P)$ zu bestimmen, benutzen wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{cx_0}\check{S} & \overset{TL_{\exp \pi Z^0}}{\longrightarrow} & T_{c^{-1}x_0}\check{S} \\ \uparrow\simeq & & \uparrow\simeq \\ \mathfrak{q}^+ & \overset{\mathrm{Ad}(\exp \pi Z^0)=\Theta_r}{\longrightarrow} & \mathrm{Ad}(\exp \pi Z^0)\mathfrak{q}^+ = \mathfrak{q}^- \end{array},$$

wobei $\mathfrak{q}^-$ der (-2)-Eigenraum von $\operatorname{ad} X^0$ ist. Mit $\Theta C_+ =: -C_-$, wie in [H'O, Kapitel 1.6] definiert, ist der Kegel der kausalen Struktur im Tangentialraum an $(c^{-1}x_0, cx_0)$ dann $-C_-+C_+ = C_k$. Identifiziert man $T_{eH}G/H$ über die Exponentialabbildung mit $\mathfrak{q}^- \oplus \mathfrak{q}^+$, so ist die Tangentialabbildung $T_{eH}\tilde{d}$ die Identität und da $\tilde{d} \circ L_g = L_{(g,g)} \circ \tilde{d}$ sowie die kompakt-kausale Struktur von G/H durch C_k definiert ist [H'O], folgt die Kausalität von $\tilde{d}$. □

Beispiel 3.4 (Die Kompaktifizierung von $Sp(n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{R})$):
Wir arbeiten mit der Realisierung von $Sp(n,\mathbb{R})$ in $SU(n,n)$

$$Sp(n,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in SU(n,n) \;\middle|\; \begin{array}{l} A, B \in M(n \times n, \mathbb{C}), \\ {}^t\overline{A}A -{}^t B\overline{B} = 1,\ {}^tA\overline{B} ={}^t \overline{B}A \end{array} \right\}$$

Mit der üblichen Cartaninvolution $\Theta(g) = {}^t\overline{g}^{-1}$ erhalten wir dann als maximale kompakte Unteralgebra $\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \overline{Z} \end{pmatrix} \mid Z \in \mathfrak{u}(n) \right\}$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}$. Als Cartanalgebra $\mathfrak{t}$ wählen wir die Menge der Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ und als starkorthogonale Wurzelvektoren $E_j = \begin{pmatrix} 0 & E_{jj} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $E_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{jj} & 0 \end{pmatrix}$; $j = 1, \ldots, n$. Damit ist $X^0 = \sum_{j=1}^n (E_j + E_{-j}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ und die Cayley-Transformierende $c = \exp\left(\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^n (E_{-j} - E_j) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}$. Darüber hinaus reduziert sich $\tau = \operatorname{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i X^0)$ auf $Sp(n,\mathbb{R})$ einfach auf komplexe Konjugation und daher ist

$$Sp(n,\mathbb{R})^\tau = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in SU(n,n) \;\middle|\; \begin{array}{l} A, B \in M(n \times n, \mathbb{R}), \\ {}^tAA -{}^t BB = 1,{}^t AB ={}^t BA \end{array} \right\},$$

wobei diese Untergruppe unter der Abbildung $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \mapsto A + B$ isomorph zu $GL(n,\mathbb{R})$ ist. Allgemein ist für $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SU(n,m)$ die Harish-Chandra-Zerlegung in $P^+ \times K_{\mathbb{C}} \times P^-$ (bei entsprechender Wahl der positiven Wurzeln) durch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}$$

gegeben und weiter ist

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Z \\ 0 & I \end{pmatrix} K_{\mathbb{C}}P^- = \begin{pmatrix} I & (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} K_{\mathbb{C}}P^-.$$

Nun ist P der Normalisator von $cK_{\mathbb{C}}P^- = \begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix} K_{\mathbb{C}}P^-$ und da hier die Cartaninvolution ein innerer Automorphismus ist, $\Theta(g) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ für

$g \in SU(n,n)$, normalisiert ΘP folglich $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} c\, K_{\mathbb{C}} P^{-} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} K_{\mathbb{C}} P^{-}$ im Bergman-Šilov-Rand von $Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$.

Der Bergman-Šilov-Rand in der Harish-Chandra-Realisierung wird dabei durch $\check{S} = \{Z \in M(n{\times}n, \mathbb{C}) \mid Z^*Z = I_n, {}^tZ = Z\}$ gegeben [Wo] und die Kompaktifizierung ist dann

$$Sp(n,\mathbb{R})/Sp(n,\mathbb{R})^\tau \to \check{S} \times \check{S}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} Sp(n,\mathbb{R})^\tau \mapsto \left((A+B)(\overline{B}+\overline{A})^{-1}, (-A+B)(-\overline{B}+\overline{A})^{-1}\right).$$

Bemerkung. Man kann einen invarianten, abgeschlossenen, konvexen und regulären Kegel in $T_{(cx_0,cx_0)}\check{S} \times \check{S}$ und damit eine kausale Struktur auch durch $-C_+ + C_+$ (mit der schon oben benutzten Identifizierung des Tangentialraums) definieren. In diesem Fall ist $\tilde{d}$ eine kausale Kompaktifizierung des nichtkompakt-kausalen Raums G/H, wobei dessen Struktur durch $C_p = C_- + C_+$ gegeben wird.

3.2 Die Zerlegung in Bahnen

Wir verwenden weiter die schon in Abschnitt 2 eingeführte Notation mit einer kleinen Abänderung: Wir verwenden statt des Tripels (G, H, σ) hier $(G_1, G_1^\sigma, \sigma)$. Dementsprechend kennzeichnen wir die Größen, welche sich auf G_1 bzw. $\mathfrak{g}_1$ beziehen durch einen Index 1. Der im Beweis von Lemma 3.1 eingeführte Unterraum $\mathfrak{a}_1$ erfüllt die in Definition 2.6 aufgestellten Bedingungen und somit ist — wie oben bereits ausgeführt — $\Sigma(\mathfrak{a}_{1,+}) = \emptyset$. Damit läßt sich aus Theorem 2.7 und Satz 2.8

$$G_1 = \cup_{v \in W(\mathfrak{a})} \Delta G(w_v, 1) P_{min}$$

als Zerlegung in disjunkte Doppelrestklassen ableiten, wobei hier wieder wie schon in Lemma 3.1 $P_{min} = P(\mathfrak{a}, \Theta\Sigma^+(\mathfrak{a})) \times P(\mathfrak{a}, \Sigma^+(\mathfrak{a})) \subset P'$ sein soll. Die Indexmenge ergibt sich daraus, daß $W(\mathfrak{a}_1) = W(\mathfrak{a}) \times W(\mathfrak{a})$ und $W(\mathfrak{a}_1, K_1 \cap G_1^\sigma)$ gerade von den Elementen der Diagonale in dieser Gruppe gebildet wird.

Bemerkung. Da G/K ein Hermitescher symmetrischer Raum vom Tubentyp ist, ist das Wurzelsystem $\Sigma(\mathfrak{a})$ vom Typ $\mathfrak{c}_r$ [KW] und die Weylgruppe isomorph dem semidirekten Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \times S_r$, wobei die Permutationen aus S_r durch Permutation der Indices und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \simeq \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) | \epsilon_i \in \{\pm 1\}\}$ durch Vorzeichenänderung auf $(X_1, \ldots, X_r)$ wirken.

Im nächsten Schritt bestimmem wir diejenigen Doppelrestklassen, welche $\Delta G(\overline{P}\times P)$ ausmachen. Mit $\mathfrak{p}' = \mathrm{Lie}(\overline{P})\times\mathrm{Lie}(P)$ ist $\mathfrak{a}' = \mathbb{R}(X^0,0)+\mathbb{R}(0,X^0) = \sigma\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{a}'+\sigma\mathfrak{a}') = \mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ und das Zentrum $\mathfrak{z}$ dieser Algebra gleich $\mathfrak{a}'$ [H'O, Thm. 3.1.15]. Damit folgt sofort aus den Eigenschaften der Langlandszerlegung $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}''\cap\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{g}_1^\sigma$ ist maximal abelsch in $\mathfrak{m}''\cap\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{g}_1^\sigma$, so daß ohne Einschränkung die Algebren $\hat{\mathfrak{a}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_1$ gleich $\mathfrak{a}_1$ gewählt werden können. Mit dieser Wahl ist $\Sigma_{\mathfrak{h}_1}(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}''}\subset\Sigma(\mathfrak{a}_{1,+}) = \emptyset$ und $W(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}'}$ besteht aus denjenigen Elementen, welche (X^0,X^0) fest lassen. Da wir $P_{min}\subset P'$ gewählt haben, erhalten wir mit Korollar 2.10

$$\Delta GP' = \cup_{v\in W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'}}\Delta G(w_v,1)P_{min},$$

wobei $W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'}\simeq\{(1,\ldots,1)\}\times S_r$ ist. Ferner ist $\mathfrak{a}'_+ = \{(sX^0,tX^0)\mid s>0,t<0\}$, wie sich unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{a}'_+$ und $\mathrm{Lie}(P)$ als Summe der Eigenräume von $\mathrm{ad}\,X^0$ zu nichtpositiven Eigenwerten ergibt.

Zur Bestimmung der anderen G-Bahnen genügt es jetzt, weitere zu P' G_1-konjugierte Gruppen P'_ν zu finden, derart daß diese Stabilisatoren zu Punkten $\tilde{s}_\nu = s_\nu(c^{-1}x_0,cx_0)$ im Bergman-Šilov-Rand $\check{S}_1$ sind und die Vereinigung der Zerlegungen $\Delta GP'_\nu s_\nu = \cup_j\Delta Gw_{\nu j}P_{min,\nu}s_\nu$ disjunkt ist und gerade die oben gegebene Zerlegung von G_1 ausmacht. Man erhält so:

Satz 3.5 *Die Zerlegung des Bergmann-Šilov-Randes von G_1/K_1 in G-Bahnen wird durch*

$$\check{S}_1 = \bigcup_{\nu=0}^{r}\Delta G\left((\prod_{j=1}^{r-\nu}c_j^{-1})(\prod_{j=r+1-\nu}^{r}c_j)x_0,cx_0\right)$$

gegeben.

Beweis: Wie schon in Abschnitt 2 erwähnt, liefert eine $\mathfrak{sl}(2)$-Rechnung $c_j^{\pm1} = \exp(\mp E_j)\exp(\log\sqrt{2}H_j)\exp(\pm E_{-j})$ und mit eine ebensolchen zeigt man

$$\mathrm{Ad}(\exp\frac{\pi}{2}iH_j)E_{\pm k} = \begin{cases} -E_{\pm k} & \text{für } k=j\\ E_{\pm k} & \text{für } k\neq j.\end{cases}$$

Da $iH_j\in\mathfrak{k}$ und da in der Harish-Chandra-Realisierung von G_1/K_1 die Untergruppe K_1 durch die adjungierte Darstellung auf $\mathfrak{p}_1^+$ operiert, so liegt damit $\tilde{s}_\nu := \left((\prod_{j=1}^{r-\nu}c_j^{-1})(\prod_{j=r+1-\nu}^{r}c_j)x_0,cx_0\right)$ in $\check{S}_1$ und ist das Bild von $(c^{-1}x_0,cx_0)\in\check{S}_1$ unter $s_\nu := \left(\prod_{j=r+1-\nu}^{r}\exp\frac{\pi}{2}iH_j,1\right)$. Nach Satz 2.2 ist $P'_0 := P'$ der Stabilisator von $\tilde{s}_0$ und folglich $P'_\nu = \mathrm{Ad}\left(\prod_{j=r+1-\nu}^{r}\exp\frac{\pi}{2}iH_j\right)\overline{P}\times P$ derjenige von $\tilde{s}_\nu$. Damit ist dann $\mathfrak{a}'_\nu = \mathrm{Ad}(s_\nu)\,\mathfrak{a}' = \mathbb{R}(X^0_\nu,0)+\mathbb{R}(0,X^0)\subset\mathrm{Ad}(s_\nu)\,\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1$, wobei $X^0_\nu := \sum_{j=1}^{r-\nu}X_j - \sum_{j=r+1-\nu}^{r}X_j$, und allgemeiner $\mathfrak{p}'_\nu = \mathrm{Ad}(s_\nu)\,\mathfrak{m}'+\mathfrak{a}'_\nu+\mathrm{Ad}((s_\nu)\,\mathfrak{n}'$ die Langlandszerlegung der Liealgebra von P'_ν. Dadurch daß die Liealgebren $\mathfrak{p}'_\nu$

und $\mathfrak{p}'$ konjugiert sind, erhält man auch die Teilmenge $\mathfrak{a}'_{\nu,+}$ durch Konjugation $\mathfrak{a}'_{\nu,+} = \mathrm{Ad}\,(s_\nu)\,\mathfrak{a}'_+ = \{(sX^0_\nu, tX^0) \mid s > 0, t < 0\}$, wie unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{a}'_{\nu,+}$ folgt.

Für $\nu = r$ ist $\mathfrak{a}'_r = \mathfrak{a}'$ und wie im schon diskutierten Fall $\nu = 0$ ist dann $\mathfrak{m}''_r = \mathfrak{m}'_r = \mathfrak{m}'$ und ohne Einschränkung $\hat{\mathfrak{a}}_r = \tilde{\mathfrak{a}}_r = \mathfrak{a}_1$. Für $0 < \nu < r$ ist dagegen $\mathfrak{a}'_\nu + \sigma\mathfrak{a}'_\nu = \mathfrak{a}' \oplus \tilde{\mathfrak{a}}'_\nu$, mit $\tilde{\mathfrak{a}}'_\nu = \mathbb{R}(X^0_\nu, 0) + \mathbb{R}(0, X^0_\nu)$, und

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{a}'_\nu + \sigma\mathfrak{a}'_\nu) = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{a}' + \tilde{\mathfrak{a}}'_\nu + \hat{\mathfrak{a}}'_\nu + \sum_{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a}_1),\ \alpha(X^0,X^0)=\alpha(X^0_\nu,X^0_\nu)=0} \mathfrak{g}_{1\alpha},$$

wobei $\mathfrak{m}_1 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{a}_1)$ und $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}' \oplus \tilde{\mathfrak{a}}'_\nu \oplus \hat{\mathfrak{a}}'_\nu$ die orthogonale Zerlegung bezüglich der Killingform ist. Ist $M \in \mathfrak{m}_1$, $A \in \mathfrak{a}_1$, $N \in \sum \mathfrak{g}_{1\alpha}$ und $M + A + N \in \mathfrak{z}$, dem Zentrum der Zentralisatoralgebra $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{a}'_\nu + \sigma\mathfrak{a}'_\nu)$, so folgt aus $0 = [\mathfrak{a}_1, M + A + N] = [\mathfrak{a}_1, N]$ sofort $N = 0$ und da $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{a}'_\nu + \sigma\mathfrak{a}'_\nu)$ auch Θ_1-invariant ist, M, $A \in \mathfrak{z}$. Dann ist aber $A \in \mathfrak{a}' + \tilde{\mathfrak{a}}'_\nu$, da für $\mathrm{pr}_{\hat{\mathfrak{a}}'_\nu} A \neq 0$ immer eine Wurzel α aus der Indexmenge existiert, so daß $\alpha(A) \neq 0$. Damit ist $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}' + \tilde{\mathfrak{a}}'_\nu$ und $\mathfrak{m}''_\nu = \mathfrak{m}_1 + \hat{\mathfrak{a}}'_\nu + \sum \mathfrak{g}_{1\alpha}$. Da $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{k}_1$ und $[M + N, \hat{\mathfrak{a}}'_\nu] \neq 0$ für nichtverschwindendes N, ist $\hat{\mathfrak{a}}'_\nu \cap \mathfrak{g}^\sigma_1$ maximal abelsch in $\mathfrak{m}''_\nu \cap \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{g}^\sigma_1$, so daß wir auch hier $\hat{\mathfrak{a}}_\nu = \tilde{\mathfrak{a}}_\nu = \mathfrak{a}_1$ wählen können.

Mit $\left\langle \mathrm{Ad}\,(s_\nu)\,\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+, \mathfrak{a}'_{\nu,+} \right\rangle = \left\langle \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+, \mathfrak{a}'_+ \right\rangle \subset \mathbb{R}^+$ ist nach Satz 2.4 $P_{min,v} := \mathrm{Ad}\,(s_\nu)\,P_{min} = P\,(\mathfrak{a}_1, \mathrm{Ad}\,(s_\nu)\,\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+) \subset P'_\nu$ und $W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu} = \mathrm{Ad}\,(s_\nu)\,W(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}'}$ ist der Zentralisator von (X^0_ν, X^0) in $W(\mathfrak{a}_1)$, da $M'_\nu = \mathrm{Ad}\,(s_\nu)\,M'$ und $(X^0_\nu, X^0) = \mathrm{Ad}\,(s_\nu)\,(X^0, X^0)$. Wir identifizieren jetzt die Weylgruppe $W(\mathfrak{a})$ mit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \times S_r$ wie in der Bemerkung oben und entsprechend $W(\mathfrak{a}_1) = W(\mathfrak{a}) \times W(\mathfrak{a})$. Mit der angegebenen Wirkung von $\mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} iH_j)$ auf $E_{\pm k}$ bzw. $X_k = E_k + E_{-k}$ sieht man, daß dann das Produkt $\prod_{j=r+1-\nu}^r \exp(\frac{\pi}{2} iH_j)$ dem Element $((1, \ldots, -1), \mathrm{id})$ entspricht und $W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu} s_\nu = (\{(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)\} \times S_r) \times (\{(1, \ldots, 1)\} \times S_r)$ ist, wobei im ersten Faktor an den letzten r Positionen jeweils -1 steht. Wir haben jetzt

$$\begin{aligned}
\Delta G P'_\nu &= \bigcup_{v\in W(\mathfrak{a}_1, K_1\cap G^\sigma_1)\cap W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu} \backslash W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu}} \Delta G w_v P_{min,\nu} \\
&= \bigcup_{v\in W(\mathfrak{a}_1, K_1\cap G^\sigma_1)\cap W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu} s_\nu \backslash W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu} s_\nu} \Delta G w_v P_{min} s_\nu^{(-1)}
\end{aligned}$$

Die Elemente in $W(\mathfrak{a}_1, K_1 \cap G^\sigma_1)$ sind diejenigen der Form (w_v, w_v). Ein vollständiges Vetretersystem für $W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu, K_1 \cap G^\sigma_1) \cap W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu} s_\nu \backslash W(\hat{\mathfrak{a}}_\nu)_{\mathfrak{m}'_\nu} s_\nu$ wird daher durch die Elemente der Form $(w_v, 1)$, $w \in W(\mathfrak{a})$, gegeben, wobei in unserer Identifizierung $w \in S_r \cdot (1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1) \times S_r$. Damit ist klar, daß

$$G_1 = \bigcup_{\nu=0}^r \Delta G P'_\nu s_\nu$$

eine disjunkte Zerlegung ist und die Behauptung des Satzes folgt unmittelbar. □

Bemerkung. Die duale Aussage zu Proposition 2.3 für abgeschlossene Bahnen in [Ma 79] zeigt sofort, daß $\Delta G(cx_0, cx_0)$ abgeschlossen ist. Allgemeiner lassen sich z.B. mit Lemma 13 in [Ma 79] die Dimensionen der einzelnen Bahnen vergleichen — $dim(\Delta G s_\nu) \geq dim(\Delta G s_\mu)$ für $\nu < \mu$ — und um die Zerlegung des Abschlusses einer gegebenen Bahn in Bahnen — wie in [Ka 87] gegeben — zu erhalten, reicht es dann zu zeigen, daß die niederdimensionalen Bahnen im Abschluß der Bahnen größerer Dimension liegen.

Anmerkungen zu Abschnitt 3. Cayleyräume wurden schon länger studiert und die Ergebnisse in diesem Abschnitt sind alle bekannt. Die kausale Kompaktifizierung wurde von 'Olafsson und Ørsted zuerst gefunden ['OØ] und von Koufany mit Jordanalgebramethoden studiert [Ko]. Die Kompaktifizierung von G/H als nichtkompakt-kausaler Raum geht zurück auf allgemeinere Resultate von Hilgert und Neeb, vgl. [H'O], und die Zerlegung des Bergman-Šilov-Randes in G-Bahnen auf Kaneyuki [Ka 87].

4 Kausale Kompaktifizierung kausaler Unterräume von Cayleyräumen

Sei (G_1, H_1, τ) vom Cayley-Typ, so konstruieren wir eine Familie von Involutionen σ mit kausaler Kompaktifizierung für $(G_1^\sigma, H_1^\sigma, \tau)$. Außerdem geben wir einige Resultate zur Zerlegung der Kompaktifizierung in G_1^σ-Bahnen und die Konstruktion der kausalen Kompaktifizierung für $(G_1\sigma', H_1^{\sigma'}, \tau) \subset (G_1^\sigma, H_1^\sigma, \tau)$ in $G_1'/P'' \subset G_1/P'$ für eine geeignete Untergruppe $G_1' \subset G_1$.

4.1 Die Kompaktifizierung

Sei (G_1, H_1, τ) ein irreduzibler Raum vom Cayley-Typ, Θ eine mit τ kommutierende Cartaninvolution von G_1, $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ ein System stark-orthogonaler Wurzeln und die $E_{\pm j}, X_j, Y_j$ wie in Abschnitt 2 gewählt. Wir behalten auch die übrige Notation dieses Abschnitts bei. Sofern sie sich auf G_1 bzw. $\mathfrak{g}_1$ bezieht, schreiben wir die entsprechenden Größen wie in Abschnitt 3 mit einem zusätzlichen Index 1. Für den Stabilisator P' von $cK_{\mathbb{C}}P^-$ hat man die Langlandszerlegung $P' = M'A'N'$, wobei $A' = \exp \mathbb{R}X^0$, N' die zu der Algebra $\mathfrak{n}'$ — der Summe der Eigenräume von $\operatorname{ad} X^0$ zu negativen Eigenwerten — gehörende analytische Untergruppe und $MA = Z_{G_1}(X^0)$ ist. Weiter ist $\tau = \operatorname{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i X^0)$ und $H_1 = Z_{G_1}(X^0)$ [H'O], so daß $P' \simeq H_1 \times N'$.

Wir definieren $\sigma(g) := \operatorname{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i \sum_{j=1}^{r} \epsilon_j Y_j)\tau(g)$, wobei die $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ für $j = 1, \ldots, r$ beliebig gewählt werden können. Mit $\sigma^2(g) = \operatorname{Ad}\left(\exp \frac{\pi}{2} i \sum \epsilon_j (Y_j + \tau Y_j)\right) \tau^2(g) = g$ ist σ eine Involution und mit $\Theta(Y_j) = -Y_j$ ist ebenfalls unmittelbar klar, daß σ und Θ kommutieren. Eine $\mathfrak{sl}(2)$-Rechnung zeigt $\exp(\frac{\pi}{2} i \sum \epsilon_j Y_j) \exp(\frac{\pi}{2} i \sum X_j) = \exp(-\frac{\pi}{2} i \sum \epsilon_j H_j)$ und somit können wir σ auch durch $\sigma(g) = \operatorname{Ad}(\exp -\frac{\pi}{2} i \sum \epsilon_j H_j)(g) = \operatorname{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i \sum \epsilon_j H_j)(g)$ definieren.

Wenn wir σ auf X_j anwenden, so ist $\sigma(X_j) = \mathrm{e}^{\operatorname{ad} \frac{\pi}{2} i \epsilon_j Y_j} X_j = \cos(\epsilon_j \pi)\, X_j - \sin(\epsilon_j \pi)\, H_j = -X_j$ und daher ist $\mathfrak{a} = \sum \mathbb{R} X_j$ ein maximaler abelscher Unterraum sowohl in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ als auch in $\mathfrak{p}_1$, wobei $\mathfrak{q}_{1\sigma}$ der (-1)-Eigenraum der Involution σ ist. Außerdem ist aufgrund dieser Rechnung $\operatorname{Ad}\left(\exp \frac{\pi}{2} i \epsilon_j Y_j\right) \left(\exp(\frac{\pi}{2} i X_j)\right) = \exp\left(\operatorname{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i \epsilon_j Y_j) \left(\frac{\pi}{2} i X_j\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} i X_j\right)$. Mit Einsetzen der Definitionen erhalten wir damit $\sigma\tau(g) = \prod_{j=1}^{r} \operatorname{Ad}\left(\exp(\frac{\pi}{2} \epsilon_j Y_j) \exp(\frac{\pi}{2} i X_j)\right) \tau(g) = \prod_{j=1}^{r} \operatorname{Ad}\left(\exp(-\frac{\pi}{2} i X_j) \exp(\frac{\pi}{2} \epsilon_j Y_j)\right) \tau(g) = \tau\sigma(g)$, da τ Involution und somit $\tau^{-1} = \tau$ ist, d.h. auch σ und τ sind kommutierende Involutionen.

Als dritte Folgerung aus unsere Definition ergibt sich $\sigma(\mathfrak{n}') = \Theta(\mathfrak{n}') =: \overline{\mathfrak{n}}'$, da ja $\mathfrak{n}'$ die Summe der Eigenräume von $\operatorname{ad} X^0$ zu negativen Eigenwerten ist. Damit ist auch $N' \cap G_1^\sigma = \{e\}$ und $G_1^\sigma \cap P' = G_1^\sigma \cap H_1 =: H$, so daß wir mit $G := G_1^\sigma$ eine wohldefinierte und injektive Abbildung $\tilde{d} : G/H \to G_1/P'$ erhalten. Es ist jetzt $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p}' + \overline{\mathfrak{n}}'$ und $\mathfrak{g}_1^\sigma = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{g}_1^\sigma + \varphi(\overline{\mathfrak{n}}')$, wobei $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1\ X \mapsto \frac{1}{2}(X + \sigma X)$ die Projektion auf $\mathfrak{g}_1^\sigma$ gibt. Identifizieren wir daher wieder die Tangentialräume in eH bzw. eP' mit $\varphi(\overline{\mathfrak{n}}')$ und $\overline{\mathfrak{n}}'$, so erhalten wir als Tangentialabbildung $T_{eH}\tilde{d} : \varphi(\overline{\mathfrak{n}}') \to \overline{\mathfrak{n}}',\ X + \sigma X \mapsto X,\ X \in \overline{\mathfrak{n}}'$. Damit ist $\tilde{d}$ eine Submersion [Va, Theorem 2.9.7].

Proposition 4.1 *Sei* $\sigma(g) := Ad(\exp \frac{\pi}{2} i \sum \epsilon_j H_j)(g)$, *so ist* $(G, H, \tau) := (G_1^\sigma, (G_1^\sigma)^\tau, \tau)$ *ein schwach kompakt-kausaler symmetrischer Unterraum von* (G_1, H, τ) *und* $\tilde{d} : G/H \to G_1/P'$ *eine kausale Kompaktifikation dieses Raums.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß das Bild $\tilde{d}(G/H)$ dicht in G_1/P' ist. Wie im letzten Abschnitt beweisen wir dieses, indem wir nachweisen, daß alle offenen Doppelrestklassen $G_1^\sigma g P_{min}$, wobei P_{min} eine noch geeignet zu wählende minimale parabolische Untergruppe ist, in $G_1^\sigma P'$ liegen.

Zuerst bestimmen wir mit Proposition 2.3 die offenen Mengen. Ein geeigneter maximaler abelscher Unterraum ist $\mathfrak{a} = \sum \mathbb{R} X_j$, da ja wie schon gezeigt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ ist. Mit $\sigma\Theta|_{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}}$ gibt Bedingung (ii) keine Einschränkung und mit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_1^\sigma = \{0\}$ ist außerdem $W_\sigma(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{a})$, wobei die Weylgruppe wieder isomorph dem semidirekten Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \times S_r$ ist.

Die Gruppe $W(\mathfrak{a}, K)$, wobei $K := K_1 \cap G$, kann als Weylgruppe der assoziierten Gruppe $G_a := G_1^{\sigma\Theta}$ mit Liealgebra $\mathfrak{g}_a = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}_1^\sigma + \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ berechnet werden. Wie sich aber zeigen wird, wird nur die Kenntnis einiger spezieller Elemente gebraucht. Die Doppelrestklassen, welche offenen Bahnen in $G_1/P(\mathfrak{a}, \sum^+)$ entsprechen, sind jetzt durch $G w_v P(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ gegeben, wobei w_v ein Repräsentant der Restklasse $v \in W(\mathfrak{a}, K)\backslash W(\mathfrak{a})$ ist.

Wir nutzen als nächstes Korollar 2.5 und Satz 2.4 um die offenen Doppelrestklassen in GP' zu finden. Da $\mathfrak{a}' = \mathbb{R} X^0$, ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{a}' + \sigma\mathfrak{a}') = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(X^0) = \mathfrak{h}_1$. Nach Voraussetzung ist $(\mathfrak{g}_1 \mathfrak{h}_1, \tau)$ vom Cayley-Typ und in diesem Fall ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{a}'$ [H'O]. Da $\mathfrak{h}_1$ auch der Leviteil der parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{p}'$ ist, folgt aus den Eigenschaften der Langlandszerlegung auch $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}'$.

Sei $\mathfrak{a}_1$ jetzt entsprechend der Bedingung (iii) von Korollar 2.5 gewählt. Mit $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}_1$ und der σ-Invarianz von $\mathfrak{a}_1$ ist $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{m}'$, wobei $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{m}'$ ebenfalls σ-invariant ist. Lemma 7 aus [Ma 79], angewendet auf die halbeinfache zusammenhängende Liegruppe $[M', M']_0$ mit Involution σ zeigt dann, daß Bedingung (iii) $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{m}''$ schon eindeutig bis auf $\mathrm{Ad}(K \cap [M', M']_0)$-Konjugiertheit bestimmt und somit a priori bis auf $G \cap P'$-Konjugiertheit. Daher können wir ohne Einschränkung $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ wählen.

Die Bedingungen (i) und (ii) desselben Korollars sind dann leer, da $\sigma\Theta|_{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$. Mit $\mathfrak{p}'$ als Summe der Eigenräume von $\mathrm{ad}\, X^0$ zu nichtpositiven Eigenwerten ist $\mathfrak{a}'_+ = -\mathbb{R}^+ X^0$. Erfüllt jetzt $\Sigma(\mathfrak{a})^+$ die in Satz 2.4 gegebene Bedingung, d.h. ist $\langle \Sigma(\mathfrak{a})^+, X^0 \rangle < 0$, dann tut dies $w \sum(\mathfrak{a})^+$, $w \in W(\mathfrak{a})$, dann und nur dann auch, wenn

$$\langle w\Sigma(\mathfrak{a})^+, \mathfrak{a}'_+ \rangle = -\mathbb{R}^+ \langle \Sigma(\mathfrak{a})^+, wX^0 \rangle > 0$$

oder äquivalent dazu $wX^0 = X^0$ ist. Dies zeigt, daß die zu offenen Bahnen gehörenden parabolischen Unteralgebren durch $W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'}$ und diese Bahnen selbst durch $W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} \cap W(\mathfrak{a}, K) \backslash W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'}$ parametrisiert werden, wobei $W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} := N_{K_1 \cap M'}(\mathfrak{a}) / Z_{K_1 \cap M'}(\mathfrak{a})$ die Untergruppe der Weylgruppe ist, welche X^0 fest läßt. Mit dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} & \to & W(\mathfrak{a}) & \to & W(\mathfrak{a}, K)\backslash W(\mathfrak{a}) \\
\downarrow & & & & \uparrow \varphi \\
\multicolumn{5}{l}{W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} \cap W(\mathfrak{a}, K)\backslash W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'}}
\end{array}$$

ist dann das Bild unter $\tilde{d}$ dicht, falls φ surjektiv ist.

Lemma 4.2 *φ ist bijektiv.*

Beweis: Identifizieren wir $\mathfrak{a}$ und den Dualraum dazu mittels der Killingform, so sind die uns interessierenden Wurzeln bis auf einen normierenden Faktor durch $X_j = E_j + E_{-j}$ gegeben und die Weylgruppe wird durch die Permutationen und Vorzeichenänderungen dieser Elemente erzeugt. Da die Permutationen $X^0 = \sum_{j=1}^{r} X_j$ fest lassen, ist unsere Behauptung bewiesen, wenn die die Vorzeichenänderungen gebenden Gruppenelemente in $W(\mathfrak{a}, K)$ liegen. Dies folgt aber aus $X_j, Y_j \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$, da damit $[X_j, Y_j] = -2iH_j \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}$ und weiter mit einer $\mathfrak{sl}(2)$-Rechnung

$$\mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} iH_j) X_k = \begin{cases} X_k & \text{für } k \neq j \\ -X_k & \text{für } k = j \end{cases}$$

ist. □

Als nächstes beweisen wir, daß G/H ein schwach kompakt-kausaler Unterraum des kompakt-kausalen Raums G_1/H_1 ist. Wir erinnern an die Definition der kausalen Struktur auf G_1/H_1 [H'O, Kapitel 1.6]: Indem man $Y^0 = \sum_{j=1}^{r} Y_j$ in die (± 2)-Eigenvektoren $Y_\pm$ von $\mathrm{ad}\, X^0$ zerlegt, kann man die H_1-invarianten Kegel $C_\pm = \overline{\mathit{conv}\, \mathrm{Ad}(H_1)_0 \mathbb{R}^+ Y_\pm}$ definieren. Dann ist $C_k := C_+ - C_-$ ein H_1-invarianter, abgeschlossener, konvexer und regulärer Kegel in $\mathfrak{q}_1$, dem (-1)-Eigenraum der Involution τ in $\mathfrak{g}_1$, mit $C_k \cap \mathfrak{p}_1 = \{0\}$ und dieser definiert die kompakt-kausale

Struktur von G_1/H_1. Es ist jetzt trivial zu verifizieren, daß $Y_+ = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(Y_j - iH_j)$ und $Y_- = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(Y_j + iH_j)$ und mit $\sigma(Y_j) = -Y_j$ bzw. $\sigma(iH_j) = iH_j$ erhält man $\sigma(Y_+) = -Y_-$. Damit ist dann $\sigma(C_\pm) = -C_\mp$ und die σ-Invarianz von C_k bewiesen.

Lemma 4.3 *Sei $C \subset \mathfrak{q}_1$ ein konvexer, erzeugender — d.h. $C - C = \mathfrak{q}_1$ — und σ-invarianter Kegel und sei $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}_1^\sigma \cap \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_{1\sigma} \cap \mathfrak{q}_1$ die Zerlegung in (± 1)-Eigenräume von σ. Dann ist $C \cap \mathfrak{g}_1^\sigma \cap \mathfrak{q}_1 = pr_{\mathfrak{g}_1^\sigma \cap \mathfrak{q}_1} C$ und dieser Kegel ist erzeugend in $\mathfrak{g}_1^\sigma \cap \mathfrak{q}_1$.*

Beweis: Zu $v \in \mathrm{pr}_{\mathfrak{g}_1^\sigma \cap \mathfrak{q}_1} C$ existiert $w \in \mathfrak{q}_{1\sigma} \cap \mathfrak{q}_1$, so daß $v + w \in C$. Wegen der σ-Invarianz ist $v - w \in C$ und daher auch $v = \frac{1}{2}(v+w) + \frac{1}{2}(v-w) \in C$, womit $\mathrm{pr}\, C \subset C \cap \mathfrak{g}_1^\sigma \cap \mathfrak{q}_1$ gezeigt ist. Die ander Inklusion ist trivial und schließlich ist $\mathfrak{g}_1^\sigma \cap \mathfrak{q}_1 = \mathrm{pr}\,(C - C) = \mathrm{pr}\, C - \mathrm{pr}\, C$. □

Da C_k konvex, abgeschlossen, regulär und H_1-invariant ist, ist nach dem eben Bewiesenen $C_k \cap \mathfrak{g} \cap \mathfrak{q}_1$ ein konvexer, abgeschlossener, H-invarianter und regulärer Kegel in $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{q}_1$ und damit G/H schwach kompakt-kausal, da $Y_+ - Y_- \in C_k \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}_1$ und $C_k \cap \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}_1 = \{0\}$ ist.

Bemerkung. Nach dem Gezeigten ist klar, daß $C_p := C_+ + C_-$ durch σ auf $-C_p$ abgebildet wird und daher ist G/H kein kausaler Unterraum des Cayleyraums G_1/H_1, wenn wir die kausale Struktur auf diesem durch C_p definieren. Dagegen zeigt man für den zu G/H assoziierten Raum $G_a/H_1 \cap G_a$ mit derselben Argumentation wie oben, daß er ein kausaler Unterraum für beide Strukturen ist.

Wir kommen jetzt zum Schluß des Beweises von Proposition 4.1. Zunächst folgt aus den in Abschnitt 2 zitierten Resultaten, daß die Abbildung $\tilde{d}_1 : G_1/H_1 \to G_1/P$ kausal ist. Tatsächlich wird die Tangentialabbildung an der Restklasse der Identität durch die Projektion von $\mathfrak{q}^- + \mathfrak{q}^+$ auf $\mathfrak{q}^+$ gegeben und diese Abbildung wirft C_k auf C_+. Da aber wie gezeigt $G/H \subset G_1/H_1$ ein kausaler Unterraum ist, so ist klar, daß die Abbildung $\tilde{d}$ als Einschränkung von $\tilde{d}_1$ ebenfalls kausal ist. □

Beispiel 4.4 (Kausale Kompaktifizierung von $U(p,q)/O(p,q)$):
Mit $G_1 = Sp(n, \mathbb{R})$ benutzen wir die schon in Beispiel 3.4 eingeführten Größen und haben dann

$$\sigma(g) = \mathrm{Ad}\left(\exp -\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \begin{pmatrix} 0 & E_{jj} \\ -E_{jj} & 0 \end{pmatrix}\right)(\overline{g}) = \mathrm{Ad}\left(\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_j E_{jj} \\ \epsilon_j E_{jj} & 0 \end{pmatrix}\right)(\overline{g}).$$

Wählen wir $\epsilon_j = -1$, $j = 1, \ldots, p$, und $\epsilon_j = 1$, $j = p+1, \ldots, n$, so erhalten wir als Fixpunktgruppe

$$G := G_1^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & A_4 & B_3 & 0 \\ 0 & \overline{B}_2 & \overline{A}_1 & 0 \\ \overline{B}_3 & 0 & 0 & \overline{A}_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1 \in M(p \times p, \mathbb{C}),\ A_4 \in M(q \times q, \mathbb{C}), \\ B_2 \in M(p \times q, \mathbb{C}),\ B_3 \in M(q \times p, \mathbb{C}), \\ {}^t\overline{A}A - {}^t B\overline{B} = 1, \\ {}^tA\overline{B} = {}^t\,\overline{B}A \end{array} \right\}.$$

Lemma 4.5 $\varphi : G \to U(p,q)$ $\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ \overline{B}_3 & \overline{A}_4 \end{pmatrix}$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis: Durch direkte Rechnung zeigt man sofort, daß die Abbildung ein Monomorphismus ist und für die Liealgebren einen Isomorphismus definiert. Die Gleichungen ${}^t\overline{A}A - {}^t B\overline{B} = 1$ und ${}^tA\overline{B} = {}^t\,\overline{B}A$ sind dann äquivalent zu den definierenden Relationen ${}^t\overline{A}_1A_1 - {}^t B_3\overline{B}_3 = I$, ${}^t\overline{A}_4A_4 - {}^t B_2\overline{B}_2 = I$ und ${}^tA_1\overline{B}_2 = {}^t\,\overline{B}_3A_4$ für $U(p,q)$. $\square$

τ ist hier durch komplexe Konjugation gegeben und somit ist $H := G^\tau$ die Untergruppe aller reellen Matrizen, wobei diese Untergruppe durch φ auf $O(p,q)$ abgebildet wird. Bezeichnet $\check{S}_1$ den Bergman-Šilov-Rand von $Sp(n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{R})$ in der Harish-Chandra-Realisierung [Wo, He], so erhalten wir die Kompaktifizierung

$$\begin{array}{rcl} U(p,q)/O(p,q) & \to & \check{S}_1 \\ \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ \overline{B}_3 & \overline{A}_4 \end{pmatrix} O(p,q) & \mapsto & \begin{pmatrix} -A_1 & B_2 \\ B_3 & -A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & -\overline{B}_2 \\ -\overline{B}_3 & \overline{A}_4 \end{pmatrix}^{-1}. \end{array}$$

Bemerkung. Wählen wie alle ϵ_j gleich 1 oder -1, so ist dann $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i \sum H_j)) = \mathrm{Ad}(\exp \pi Z^0) = \Theta_r$, da für Räume vom Tubentyp $Z^0 = -\frac{i}{2} \sum H_j$ ist, und $G = K_1$ kompakt. Da der Bergman-Šilov-Rand zusammenhängend ist, wird in diesem Fall unsere „Kompaktifizierung" ein kausaler Diffeomorphismus. In dem Beispiel erhält man damit z.B. $\check{S}_1 \simeq U(n)/O(n)$.

Allgemein läßt sich noch etwas mehr über die Struktur von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}_1$ sagen, wenn wir das folgende einfache Lemma anwenden.

Lemma 4.6 *Sei* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \Theta)$ *irreduzibel, Hermitesch und nichtkompakt. Sei* φ *eine mit* Θ *kommutierende Involution, dann ist* $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\varphi) \le 1$.

BEWEIS: Die Riemannsche duale Algebra $\mathfrak{g}^r$ zu $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\varphi, \varphi)$ ist einfach mit einfacher Komplexifizierung $\mathfrak{g}^r_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Damit ist $\mathfrak{g}^r$ irreduzibel orthogonal symmetrisch vom Typ III [He, S. 379] und die maximale kompakte Unteralgebra $(\mathfrak{g}^\varphi \cap \mathfrak{k}) \oplus i(\mathfrak{g}^\varphi \cap \mathfrak{p})$ von $\mathfrak{g}^r$ hat ein Zentrum $\mathfrak{c}$ mit Dimension kleiner oder gleich Eins. Θ ist eine Involution dieser Unteralgebra, so daß $\mathfrak{c} = \mathfrak{g}^\varphi \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{c} + i(\mathfrak{g}^\varphi \cap \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{c}$ und somit $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\varphi) = \mathfrak{g}^\varphi \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{c} + i(i(\mathfrak{g}^\varphi \cap \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{c})$ ist. □

Wenden wir dies auf die Involutionen σ und τ an, so folgt

Korollar 4.7 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}(\sum \epsilon_j i H_j) \subset \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}$ *und* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1) = \mathbb{R}X^0 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$.

Zu dem symmetrischen Raum $(\mathfrak{k}_1, \sigma)$ definiert man mit der Eigenraumzerlegung $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} + \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ den c-dualen Raum $\mathfrak{k}_1^c = \mathfrak{k} + i(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma})$, für den σ eine Cartaninvolution ist. Es gilt dann:

Lemma 4.8 $(\mathfrak{g}, \Theta) \simeq (\mathfrak{k}_1^c, \sigma)$

BEWEIS: Sei $B := \frac{\pi}{2} i \left(\sum_{\{j|\epsilon_j = 1\}} H_j - \sum_{\{j|\epsilon_j=-1\}} Y_j \right)$, so ist $\mathrm{Ad}(\exp B)(H_j) = \epsilon_j H_j$ und $\mathrm{Ad}(\exp B)^2 = \mathrm{id}$, wie jeweils eine $\mathfrak{sl}(2)$-Rechnung zeigt. Mit $Z^0 = -\frac{i}{2} \sum H_j$ ist $\Theta_r := \mathrm{Ad}(\exp \pi Z^0) = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i \sum H_j)$ und mit $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i \sum \epsilon_j H_j)$ folgt dann unmittelbar $\mathrm{Ad}(\exp B) \circ \Theta_r = \sigma \circ \mathrm{Ad}(\exp B)$. $\mathrm{Ad}(\exp B)$ gibt damit einen Isomorphismus zwischen den Fipunktmengen beider Involutionen in $\mathfrak{g}_{1\mathbb{C}}$, $\mathrm{Ad}(\exp B) : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}_1^\sigma)_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{k}_{1\mathbb{C}}$. Mit $B \in \mathfrak{k}_1 + i\mathfrak{p}_1$ ist trivialerweise die Unteralgebra $\mathfrak{k}_1 + i\mathfrak{p}_1$ $\mathrm{Ad}(\exp B)$-invariant, so daß $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_{1\mathbb{C}} \cap (\mathfrak{k}_1 + i\mathfrak{p}_1)$ auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cap (\mathfrak{k}_1 + i\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p}$ abgebildet wird. Da durch $\mathrm{Ad}(\exp B)$ auch der (-1)-Eigenraum von σ in den (-1)-Eigenraum von Θ überführt wird, womit $\mathrm{Ad}(\exp B)(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}) = i\mathfrak{p}$ folgt, erhalten wir den gesuchten Isomorphismus mit $\mathrm{Ad}(\exp B) : \mathfrak{k}_1^c = \mathfrak{k} + i(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}) \to \mathfrak{k} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$.
□

Mit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \simeq (\mathfrak{k}_1^c)_{\mathbb{C}}$ zeigt die Klassifikation der irreduziblen Algebren $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \tau)$ vom Cayley-Typ bzw. der entsprechenden Hermiteschen symmetrischen Algebren $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, \Theta)$ [He, S. 518], daß für irreduzibles $\mathfrak{g}_1$ mit Ausnahme von $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{su}(n,n)$ dann $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit einfacher Kommutatoralgebra, also $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}, \tau)$ irreduzibel ist. Für $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{su}(n,n)$ liefert direkte Rechnung — vgl. Abschnitt 7.1 —, $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}, \tau) \simeq (\tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}}, \Delta\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\tau})$ mit einfachem $\tilde{\mathfrak{g}}$ und $\tilde{\tau} : \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}}$ $(X, Y) \mapsto (Y, X)$, so daß dieser Raum ebenfalls irreduzibel ist.

4.2 Zur Zerlegung in Bahnen

Bei einer Bestimmung der Bahnen analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 3 sind zuerst die $G \cap K_1$-Konjugationsklassen σ-stabiler maximaler abelscher Unterräume von $\mathfrak{p}_1$ zu finden. Da $G_1^\sigma \cap K_1 = G_1^{\sigma\Theta} \cap K_1$, sind diese auch die $G_a \cap K_1$-Konjugationsklassen $\sigma\Theta$-stabiler Unterräume und nach Theorem 2.7 genügt es, die nichtäquivalenten $\mathfrak{q}_{1a}$-orthogonalen Systeme von $\Sigma(\mathfrak{a})$ zu finden, wobei $\mathfrak{q}_{1a}$ für den (-1)-Eigenraum der Involution $\sigma\Theta$ steht.

Der Vollständigkeit halber geben wir hier den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{q}_{1a}$- und $\mathfrak{q}_{1\sigma}$-orthogonalen Systemen an. Dazu wählen wir zuerst ein entsprechend der Bedingung in Theorem 2.7 normiertes $\mathfrak{q}_{1a}$-orthogonales System $Q_{a,max}$ mit $|Q_{a,max}|$ maximal, so daß nach Theorem 2.7 und mit den dort eingeführten Notationen

$$\mathfrak{a}_1 = \mathrm{Ad}\left(\prod_{X_\alpha \in Q_{a,max}} \exp\frac{\pi}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha})\right)\mathfrak{a} = \sum_{X_\alpha \in Q_{a,max}} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + \mathfrak{a}_{Q_{a,max},+}$$

$\sigma\Theta$- bzw. σ-stabil und $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{p}$ maximal abelsch in $\mathfrak{p}$ ist. Nach Lemma 7 in [Ma 79] ist dabei $Q_{a,max}$ durch die Mächtigkeitsbedingung bis auf $W(\mathfrak{a}, G_a \cap K_1)$-Konjugiertheit, d.h. Äquivalenz, eindeutig.

Lemma 4.9 *Sei $Q_a \subset Q_{a,max}$, dann ist $Q = Ad(c(Q_a))Q_a$ ein $q_{1\sigma}$-orthogonales System von $\Sigma(\mathfrak{a}_{1,+})$ und $\mathfrak{a}_Q := Ad(c(Q))\mathfrak{a}_1 = Ad(c(Q_a))\mathfrak{a}_1$.*

Beweis: Mit der in Theorem 2.7 gegebenen Normierung ist für $X_\alpha \in Q_{a,max}$ $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -\frac{1}{2\langle\alpha,\alpha\rangle}H_\alpha$, so daß für $X_\alpha \in Q_a$ dann $\mathrm{Ad}(c(Q_a))X_\alpha = \exp(\mathrm{ad}\frac{\pi}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}))X_\alpha = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}) + \frac{1}{2\langle\alpha,\alpha\rangle}H_\alpha =: \tilde{X}_\alpha$ ist. Mit $X_\alpha \in \mathfrak{q}_{1a}$ und $H_\alpha \in \mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{p}_1$ folgt sofort $\sigma(\tilde{X}_\alpha) = -\tilde{X}_\alpha$ und auch Bedingung (ii) aus Definition 2.6 ist für die transformierten Elemente $\tilde{X}_\alpha$ offensichtlich erfüllt. Für $X_\beta \in Q_{a,max}$ ist $[X_\beta - X_{-\beta}, \tilde{X}_\alpha] = -\delta_{\alpha\beta}\tilde{X}_\alpha$ und nach der Definition von $\mathfrak{a}_{Q_{a,max},+}$ ist weiter $[\mathfrak{a}_{Q_{a,max},+}, \tilde{X}_\alpha] = 0$, so daß $\tilde{X}_\alpha$ ein Wurzelvektor zu $\tilde{\alpha} \in \Sigma(\mathfrak{a}_1)$ mit $H_{\tilde{\alpha}} \in \Sigma(\mathfrak{a}_{1,+})$ ist, was die erste Behauptung beweist. Mit $\tilde{X}_\alpha + \Theta\tilde{X}_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha}$ ist die zweite Aussage jetzt trivial. $\square$

Lemma 4.10 *Sei $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{a} + \sum_{\gamma\in\Sigma(\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_{1,\gamma}$ die Wurzelraumzerlegung, wobei $\Sigma(\mathfrak{a}) = \{\pm\gamma_j \mid 1 \le j \le r\} \cup \{(\pm\frac{1}{2}\gamma_s) + (\pm\frac{1}{2}\gamma_t) \mid 1 \le s < t \le r\}$ und $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{a})$ ist, dann gilt*

1) $\mathfrak{g}_a \supset \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{a} + \sum_{j=1}^r (\mathfrak{g}_{1,\gamma_j} + \mathfrak{g}_{1,-\gamma_j})$

2) $\mathfrak{g}_{1,\gamma} = \mathfrak{g}_{1,\gamma} \cap \mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}_{1,\gamma} \cap \mathfrak{q}_{1a}$.

Beweis: Da $[\mathfrak{k}_{1\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_1^\pm] \subset \mathfrak{p}_1^\pm$ folgt mit $X_j = E_j + E_{-j}$ für $X \in \mathfrak{m}_1$ erst $[X, E_{\pm j}] = 0$ und somit $[X, Y_j] = 0$. Mit der Definition von σ ist dann $\sigma\Theta(X) = \sigma(X) = X$. Die Wurzelräume $\mathfrak{g}_{1,\pm\gamma_j}$ sind eindimensional, wie Arakis Klassifikation der reellen halbeinfachen Liealgebren zeigt [He, S. 532ff], und mit $[X_k, Y_j \mp iH_j] = \delta_{kj} 2(-iH_j \pm Y_j)$ ist offensichtlich $\mathfrak{g}_{1,\pm\gamma_j} = \mathbb{R}(Y_j \mp iH_j)$. Da $\sigma\Theta(Y_j) = Y_j$ und $\sigma\Theta(iH_j) = iH_j$ ist, folgt die erste Aussage. Die zweite gilt trivialerweise, da $\sigma\Theta|_{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$. □

Wie der Beweis des Lemmas zeigt, sind X_j, $Y_j \in \mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{p}_1$. Damit sind — vgl. den Beweis von Lemma 4.2 — die Wurzeln $\frac{1}{2}\gamma_s + \frac{1}{2}\gamma_t$, $\frac{1}{2}\gamma_s - \frac{1}{2}\gamma_t$, $-\frac{1}{2}\gamma_s + \frac{1}{2}\gamma_t$ und $-\frac{1}{2}\gamma_s - \frac{1}{2}\gamma_t$ alle $W(\mathfrak{a}, G_a \cap K_1)$-konjugiert. Bei der Bestimmung der $\mathfrak{q}_{1a}$-orthogonalen Systeme kann man sich also z.B. auf die Wurzelräume $\mathfrak{g}_{1,\gamma}$ mit $\gamma \in \{\frac{1}{2}\gamma_s - \frac{1}{2}\gamma_t \mid 1 \le s < t \le r\}$ beschränken.

Beispiel 4.11 ($\mathfrak{q}_{1a}$-orthogonalen Systeme für $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{u}(p, q))$):
Wir behalten die Notation von Beispiel 4.4 bei. Sei

$$X_{s,t} := \begin{pmatrix} E_{s,t} - E_{t,s} & E_{s,t} + E_{t,s} \\ E_{s,t} + E_{t,s} & E_{s,t} - E_{t,s} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_1,$$

$1 \le s < t \le n$. Mit $[\sum r_j X_j, X_{s,t}] = 2(r_s - r_t) X_{s,t}$ ist dann $\mathfrak{g}_{1,\frac{1}{2}\gamma_s - \frac{1}{2}\gamma_t} = \mathbb{R} X_{s,t}$, da für $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ als normale reelle Form von $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ alle Wurzelräume eindimensional sind. Wir haben außerdem

$$\mathfrak{g}_a = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & W_1 & 0 \\ 0 & Z_4 & 0 & W_4 \\ \overline{W}_1 & 0 & \overline{Z}_1 & 0 \\ 0 & \overline{W}_4 & 0 & \overline{Z}_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} Z_1, W_1 \in M(p \times p, \mathbb{C}) \\ Z_4, W_4 \in M(q \times q, \mathbb{C}) \\ Z_j \text{ schiefhermitesch} \\ W_j \text{ symmetrisch} \end{array} \right\} \simeq \mathfrak{sp}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sp}(q, \mathbb{R})$$

und

$$\mathfrak{q}_{1a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z_2 & 0 & W_2 \\ -{}^t\overline{Z}_2 & 0 & {}^tW_2 & 0 \\ 0 & \overline{W}_2 & 0 & \overline{Z}_2 \\ {}^t\overline{W}_2 & 0 & -{}^tZ_2 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; Z_2, W_2 \in M(p \times q, \mathbb{C}) \right\}.$$

Damit liegen die $\mathfrak{g}_{1,\frac{1}{2}\gamma_s - \frac{1}{2}\gamma_t}$ mit $1 \le s \le p$ und $p + 1 \le t \le n$ in $\mathfrak{q}_{1a}$, während diejenigen mit $1 \le s < t \le p$ oder $p + 1 \le s < t \le n$ in $\mathfrak{q}_1$ liegen. Für die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ als normale reelle Form von $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ gilt [He, Thm. 4.3, S. 168] entsprechend, so daß $[X_{s,t}, X_{k,l}] = [X_{s,t}, \Theta X_{k,l}] = 0$ genau dann, wenn $\{s, t\} \cap \{k, l\} = \emptyset$. Außerdem ist die Weylgruppe $W(\mathfrak{a}, G_a \cap K_1)$ als Weylgruppe der assoziierten Gruppe $G_a \subset G_1$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \times (S_p \times S_q)$, wobei die Permutationen nur die p ersten bzw. q letzten Indices von $(X_1, \ldots, X_n)$ untereinander vertauschen. Die Äquivalenzklassen $\mathfrak{q}_{1a}$-orthogonaler Systeme $Q_{a,j}$ werden daher allein durch die Mächtigkeit $|Q_{a,j}|$ bestimmt und als Vertretersystem können wir z.B. $\emptyset, \{X_{1,p+1}\}, \ldots, \{X_{1,\min(p,q)+1}, X_{2,\min(p,q)+2}, \ldots, X_{\min(p,q),2\min(p,q)}\}$ wählen.

Das Auftreten mehrerer Konjugationsklassen erschwert ein weiteres Vorgehen analog zu dem Beweis von Satz 3.5. Eine vollständige Bestimmung der G-Bahnen des Bergman-Šilov-Randes liegt daher im Moment noch nicht vor. An dieser Stelle sei daher nur die folgende Vermutung aufgestellt:

Vermutung. *Sei $Q_{a,\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$, ein vollständiges Vertretersystem der $\mathfrak{q}_{1a}$-orthogonalen Systeme, dann existieren $s_\nu \in W(\mathfrak{a})$, so daß die Zerlegung in G-Bahnen durch $\check{S}_1 = \bigcup_{\nu=1}^m G\,(s_\nu c(Q_{a,\nu}))^{-1}\, cx_0$ gegeben wird.*

4.3 Kausale Kompaktifizierung für weiter eingeschränkte Unterräume

Sei $G_1' \subset G_1$ eine abgeschlossene Untergruppe, invariant unter σ, τ und Θ, und so gewählt, daß G_1'/K_1', wobei $K_1' := K_1 \cap G_1'$, Hermitesch symmetrisch vom Tubentyp ist. Wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, ist G/H kompakt-kausal und $\tilde{d} : G/H \to G_1/P'$ eine kausale Kompaktifizierung. Unser Ziel ist es jetzt zu zeigen, daß wir durch geeignete Wahl von G_1' und anderer relevanter Größen einen kausalen Unterraum $G'/H' \subset G/H$ und dessen kausale Kompaktifizierung $\tilde{d}' : G'/H' \to G_1'/P''$ erhalten, wenn die Gruppen bzw. die Abbildung durch Schneiden mit G_1' bzw. Einschränkung definiert werden. Für unsere Diskussion nehmen wir auch an, daß G_1' als Fixpunktgruppe einer Involution ρ, also $G_1' = G_1^\rho$, gegeben ist.

Proposition 4.12 *Sei ρ eine mit σ kommutierende Involution von G_1. Sei $G_1' := G_1^\sigma$ die Fixpunktgruppe von ρ mit Liealgebra $\mathfrak{g}_1'$ derart, daß G_1'/K_1' Hermitesch-symmetrisch vom Tubentyp ist. Es seien die Wurzelvektoren $E_{\pm j} \in \mathfrak{g}_{1\mathbb{C}}$ und $\lambda_{j'j} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, r$ und $j' = 1, \ldots, s$, so gewählt, daß sie folgende Bedingungen erfüllen:*

(i) Die Elemente $E'_{\pm j'} := \sum_{j=1}^{r} \lambda_{j'j} E_{\pm j}$, $j' = 1, \ldots, s$, sind Wurzelvektoren für ein System stark-orthogonaler Wurzeln $\gamma'_{j'}$, $j' = 1, \ldots, r'$, von $\mathfrak{g}_1'$.

(ii) Mit $X'_{j'} := E'_{j'} + E'_{-j'}$ und $Y'_{j'} := iE'_{j'} - iE'_{-j'}$ ist $X^0 = \sum_{j'=1}^{s} X'_{j'}$ und $Y^0 := \sum_{j=1}^{r} Y_j = \sum_{j'=1}^{s} Y'_{j'}$.

(iii) $\sum_{j'=1}^{s} \mathbb{R} X'_{j'}$ ist maximal abelsch in $\mathfrak{p}_1' \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$.

Dann ist G'/H' schwach kompakt-kausal und $\tilde{d}' : G'/H' \to G_1'/P''$ ist eine kausale Kompaktifizierung dieses Raums.

Bemerkung. Da $\mathfrak{g}_1$ vom Tubentyp ist, ist $Z^0 = \frac{1}{4}[X^0, Y^0]$ und wegen Bedingung (ii) sind $X^0, Y^0 \in \mathfrak{g}_1'$. Daher ist $\mathfrak{g}_1'$ τ- und $\Theta_{(r)}$-invariant. Analog ist die Liealgebra $\mathfrak{g}_1'$ σ-invariant, falls $\sum_{j=1}^r \epsilon_j Y_j \in \mathfrak{g}_1'$. Für G_1' als Fixpunktgruppe der Involution ρ reichen dieselben Bedingungen für die Invarianz der Gruppe und (iii) ist äquivalent zu der Bedingung, daß $\mathfrak{g}_a' := \mathfrak{g}_1' \cap \mathfrak{g}_1^{\sigma\Theta}$ reellen Rang s hat.

Beweis: Da $Z^0 \in \mathfrak{g}_1'$, erhalten wir $K_{1\mathbb{C}}'$ und $P^{\pm\prime}$, indem wir die ungestrichenen Gruppen jeweils mit $G_{1\mathbb{C}}'$ schneiden. Somit ist $G_{1\mathbb{C}}'/K_{1\mathbb{C}}'P^{-\prime} \subset G_{1\mathbb{C}}/K_{1\mathbb{C}}P^-$ eine abgeschlossene Teilmenge und, mit $c \in G_{1\mathbb{C}}'$, ist $\check{S}' := G_1' c x_0 = \check{S} \cap G_{1\mathbb{C}}'/K_{1\mathbb{C}}'P^{-\prime}$, womit dann auch $\check{S}'$ ein abgeschlossene G_1'-Bahn ist. Nun liegt cx_0 im Komplement von G_1'/K_1', da cx_0 ja im topologischen Rand der offenen Menge G_1/K_1 liegt, und $(\exp(nX^0)x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine gegen cx_0 konvergierende Folge in G_1'/K_1' [He, Kor. 7.18, S. 396]. Somit ist $\check{S}'$ eine G_1'-Bahn im topologischen Rand von G_1'/K_1' und aufgrund der Abgeschlossenheit gleich dem Bergman-Šilov-Rand von G_1'/K_1'. Wir haben damit eine injektive Abbildung

$$\tilde{d}' : G'/H' \to G_1'/P''$$

in den Bergman-Šilov-Rand von G_1'/K_1', welche auch eine Submersion ist, wie man bei Betrachtung der Tangentialabbildung sofort sieht.

Im nächsten Schritt zeigen wir die dichte Lage des Bildes mit dem schon bekannten Vorgehen. Zunächst ist $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{g}_1' = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{g}_1' + \mathfrak{a}' + \mathfrak{n}' \cap \mathfrak{g}_1'$ maximal parabolisch mit einer Langlandszerlegung, die sich — wie angegeben — aus derjenigen von $\mathfrak{p}'$ durch Schneiden mit $\mathfrak{g}_1'$ ergibt. Dann ist $(\mathfrak{m}'')' := \mathfrak{m}'' \cap \mathfrak{g}_1' = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{g}_1' =: (\mathfrak{m}')'$ und wir wählen $\mathfrak{a}_1' = \sum_{j'=1}^{r'} \mathbb{R}X_{j'}' \supset \sum_{j'=1}^{s} \mathbb{R}X_{j'}' \supset \mathfrak{a}'$ als maximalen abelschen Unterraum in $\mathfrak{p}_1'$. Allgemein ist mit (iii) solch ein Unterraum $\mathfrak{a}_1'$ σ-invariant und erfüllt jeweils Bedingung (iii) in Proposition 2.3 — wodurch seine $Ad(K_1' \cap G')$-Konjugationsklasse bestimmt ist — bzw. Korollar 2.5. Bedingung (i) in Korollar 2.5 ist hier leer, da $\sigma\Theta|_{\mathfrak{a}'} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}'}$. Sei $\Sigma(\mathfrak{a}_1')^+$ jetzt $\sigma\Theta$-verträglich, dann ist $w\Sigma(\mathfrak{a}_1')^+$ dann und nur dann ebenfalls $\sigma\Theta$-verträglich, wenn $w \in W_\sigma(\mathfrak{a}_1')$, da ja — unter Identifizierung von $\mathfrak{a}_1'$ und seinem Dualraum — $\mathfrak{a}_1' \cap \mathfrak{g}_1'$ von $\Sigma(\mathfrak{a}_1' \cap \mathfrak{g}_1')^{(+)}$ aufgespannt wird. Dieselbe Einschränkung erhält man durch Bedingung (ii) in Korollar 2.5, da ein $H \in \mathfrak{a}_1' \cap \mathfrak{g}_1'$ immer senkrecht auf $\mathfrak{a}_1' \cap \mathfrak{q}_1'$ steht und so $\Sigma(\mathfrak{a}_1' \cap \mathfrak{g}_1') \subset \Sigma(\mathfrak{a}_1')_{(\mathfrak{m}'')'}$ ist. Wie im Beweis von Proposition 4.1 sehen wir unter Verwendung von Satz 2.4, daß die $\mathfrak{p}(\mathfrak{a}_1', \Sigma(\mathfrak{a}_1')^+)$ in $\mathfrak{p}''$ durch $W(\mathfrak{a}_1')_{(\mathfrak{m}')'} := \{w \in W(\mathfrak{a}_1') | w(X^0) = X^0\}$ parametrisiert werden. Entsprechend erhalten wir für die parametrisierenden Mengen der offenen Bahnen ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} W(\mathfrak{a}_1')_{(\mathfrak{m}')'} \cap W_\sigma(\mathfrak{a}_1') & \to & W_\sigma(\mathfrak{a}_1') & \to & W(\mathfrak{a}_1', K_1 \cap G')\backslash W_\sigma(\mathfrak{a}_1') \\ \downarrow & & & & \uparrow \varphi \\ \multicolumn{5}{l}{W(\mathfrak{a}_1')_{(\mathfrak{m}')'} \cap W(\mathfrak{a}_1', K_1 \cap G')\backslash W(\mathfrak{a}_1')_{(\mathfrak{m}')'} \cap W_\sigma(\mathfrak{a}_1'),} \end{array}$$

wobei wiederum die Surjektivität von φ zu zeigen bleibt.

Dazu bemerken wir, daß die Weylgruppe $W(\mathfrak{a}_1') \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r'} \times S_{r'}$ aus den durch Permutation und Vorzeichenwechsel der $X_{j'}'$ definierten Abbildungen besteht. Da $\mathfrak{a}'_1 \cap \mathfrak{q}'_1 = \sum_{j'=1}^{s} \mathbb{R} X'_{j'}$ und nach Voraussetzung $X^0 = \sum_{j'=1}^{s} X'_{j'}$, erhalten wir $W_\sigma(\mathfrak{a}'_1) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r'} \times (S_s \times S_{r'-s})$ bzw. $W(\mathfrak{a}'_1)_{(\mathfrak{m}')'} \simeq (\{e_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^s}\} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r'-s}) \times (S_s \times S_{r'-s})$. Es ist aber $X_j, Y_j \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$, so daß wegen Bedingung (i) $X'_{j'}, Y'_{j'} \in \mathfrak{p}'_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$, für $j' \leq s$, und dann ist $[X'_{j'}, Y'_{j'}] = -2iH'_{j'} \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}'_1$. Jetzt folgt die Surjektivität von φ wie im Beweis von Lemma 4.2.

Es bleibt noch die Kausalität von G'/H' und $\tilde{d}'$ zu zeigen. Um die Verträglichkeit unserer Einschränkungen mit den gegebenen kausalen Strukturen auf G/H bzw. G_1/P' nachzuweisen, genügt es gemäß Lemma 4.3 die ρ-Invarianz von $C_k \subset \mathfrak{q}_1$ bzw. $C_+ \subset \mathfrak{q}_1^+$ zu überprüfen. Mit $C_\pm = \overline{conv\, \mathrm{Ad}(H_1)_0 \mathbb{R}^+ Y_\pm}$ und $C_k = C_+ - C_-$ reicht es dazu aus $\rho(Y_\pm) = Y_\pm$ zu zeigen. Es ist aber $Y_\pm = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(Y_j \mp iH_j) = \frac{1}{2}Y^0 \pm Z^0 \in \mathfrak{g}'_1$ und zusätzlich gilt $Y_+ - Y_- = 2Z^0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k}'_1)$, so daß G'/H' auch schwach kompakt-kausal ist. □

Bemerkung. Da $C_p = C_+ + C_-$ auch ρ-invariant ist, läßt sich wie schon in Abschnitt 4.1 sowohl die durch C_k als auch die durch C_p definierte kausale Struktur von G_1/H_1 auf den dualen Raum $G'_a/H_1 \cap G'_a$ einschränken.

Beispiel 4.13 (Die kausale Kompaktifizierung für $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})/Sp(n,\mathbb{R})$:
Mit $G_1 = SU(2n,2n)$ sei $G'_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A}\end{smallmatrix}\right) \in SU(2n,2n)\} \simeq Sp(2n,\mathbb{R})$, die Fixpunktgruppe von $\rho(g) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ I_{2n} & 0\end{pmatrix}(\overline{g})$. Als Wurzelvektoren wählen wir abweichend von den in Beispiel 4.4 benutzten $E_j = \begin{pmatrix} 0 & E_{j,j+n} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{j+n,j} & 0\end{pmatrix}$, $E_{j+n} = \begin{pmatrix} 0 & E_{j+n,j} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ und $E_{-j-n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{j,j+n} & 0\end{pmatrix}$, für $j = 1,\ldots,n$, und dann $E'_{\pm j'} = E_{\pm j'} + E_{\pm(j'+n)}$. Direkte Rechnung zeigt sofort, daß $E'_{j'+n} = \begin{pmatrix} 0 & E_{j'j'} + E_{j'+n,j'+n} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ zusammen mit $E'_{-j'-n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{j'j'} + E_{j'+n,j'+n} & 0\end{pmatrix}$, $j' = 1,\ldots,n$, unser System gestrichener Vektoren zu einem System stark-orthogonaler Vektoren vervollständigt, welches den Bedingungen (i) und (ii) aus Proposition 4.12 genügt. Mit $\epsilon_j = 1$ bzw. $\epsilon_{j+n} = -1$ für $j = 1,\ldots,n$ ist $\sigma(g) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} I_{n,n} & 0 \\ 0 & I_{n,n}\end{pmatrix}(g)$ und da $\left[\begin{pmatrix} I_{n,n} & 0 \\ 0 & I_{n,n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ I_{2n} & 0\end{pmatrix}\right] = 0$ ist, so ist die Untergruppe G'_1 auch σ-invariant, wobei die eingeschränkte Fixpunktgruppe von σ durch

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 & B_4 \\ \overline{B_1} & 0 & \overline{A_1} & 0 \\ 0 & \overline{B_4} & 0 & \overline{A_4} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^tA_i\overline{A_i} - {}^t\overline{B_i}B_i = I, \\ \\ {}^tA_i\overline{B_i} = {}^t\overline{B_i}A_i,\, i \in \{1,4\} \end{array} \right\} \simeq Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})$$

gegeben ist. Weiter ist die dazu assoziierte Gruppe

$$G'_a = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & A_4 & B_3 & 0 \\ 0 & \overline{B}_2 & \overline{A}_1 & 0 \\ \overline{B}_3 & 0 & 0 & \overline{A}_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \cdots \right\} \simeq U(n,n)$$

und da n der reelle Rang von $U(n,n)$ ist, ist damit nach der nach Proposition 4.12 gemachten Bemerkung auch die dritte Voraussetzung erfüllt. Wir haben $\tau(g) = \mathrm{Ad}\,(\exp(\frac{\pi}{2} iX^0))(g) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 0 & L_n \\ L_n & 0 \end{pmatrix}(g)$, mit $L_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, und somit ist

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_1 & 0 & \overline{B}_1 \\ \overline{B}_1 & 0 & \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & A_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^tA_1\overline{A_1} -{}^t\,\overline{B_1}B_1 = I, \\ \\ {}^tA_1\overline{B_1} ={}^t\,\overline{B_1}A_1 \end{array} \right\} \simeq Sp(n,\mathbb{R}).$$

Mit $c = \exp(\frac{\pi}{2} iY^0) = \cos\frac{\pi}{4}\, I - \sin\frac{\pi}{4}\, Y^0$ und der Harish-Chandra-Realisierung von $Sp(2n,\mathbb{R})/U(2n) \subset SU(2n,2n)/S(U(2n)\times U(2n))$ [He, S. 527] erhalten wir, ähnlich wie bei dem in Abschnitt 7.1 behandelten Beispiel, als Kompaktifizierung

$$\begin{aligned} Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})/Sp(n,\mathbb{R}) \quad &\to \quad \check{S} \\ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \overline{B}_1 & \overline{A}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{A}_4 & \overline{B}_4 \\ B_4 & A_4 \end{pmatrix}\right) \Delta(Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})) \quad &\mapsto \quad \begin{pmatrix} B_1 & -A_1 \\ -A_4 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & -\overline{B}_1 \\ -\overline{B}_4 & \overline{A}_4 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\check{S} = \{Z \in M(2n \times 2n, \mathbb{C}) \mid Z^*Z = I_{2n},\ \ {}^tZ = Z\}$ und $\Delta(Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})) = \{(g,g) \mid g \in Sp(n,\mathbb{R})\} \simeq Sp(n,\mathbb{R})$ die Diagonale in $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})$.

5 Kausale Kompaktifizierung kausaler Unterräume kompakt-kausaler Räume

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt, wo wir von (G_1, H_1, τ) vom Cayley-Typ ausgingen, fordern wir hier nur, daß der Raum kompakt-kausal ist. Wir geben dann ein hinreichendes Kriterium zur Konstruktion eines kausalen Unterraums und seiner kausalen Kompaktifizierung sowie die Konstruktion selbst.

Sei (G_1, H_1, τ), wobei $H_1 := G_1^\tau$ die ganze Fixpunkgruppe ist, ein irreduzibler kompakt-kausaler Raum, so daß (G_1, K_1, Θ) vom Tubentyp ist, und seien die $E_{\pm j}$ wie üblich gewählt.

Definition 5.1 *Sei $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, \Theta)$ eine irreduzible orthogonale Liealgebra von nichtkompaktem Hermiteschen Typ. Seien $E_{\pm j}$, $j = 1, \ldots, r$, Wurzelvektoren zu einem System stark-orthogonaler Wurzeln $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$, so daß $E_{+j} + E_{-j}$, $i(E_{+j} - E_{-j}) \in \mathfrak{g}_1$. Sei τ eine mit Θ kommutierende Involution, dann bilden die Vektoren $\{E_{\pm j} \mid 1 \leq j \leq r\}$ ein System erster Art (bezüglich τ), falls $\tau(E_{\pm j}) = -E_{\mp j}$ für alle j. Die Wurzelvektoren heißen ein System von zweiter Art (bezüglich τ), falls der reelle Rang r gerade ist, $r = 2r'$, und für die $E_{\pm j}$ dann $\tau(E_{\pm j}) = -E_{\mp(j+r')}$ bzw. $\tau(E_{\pm(j+r')}) = -E_{\mp j}$, für $j = 1, \ldots, r'$, gilt.*

Wie nehmen im folgenden an, daß unsere $E_{\pm j}$ von erster bzw. zweiter Art sind. Mit $X^0 = \sum X_j$ sei $\sigma(g) := \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i X^0)\tau(g)$. Wir wissen, daß der erste Faktor dieses Produkts allein eine Involution definiert und mit $\tau(X^0) = \Theta(X^0) = -X^0$ kommutieren alle diese Involutionen. Damit ist dann auch $\sigma^2 = \mathrm{id}$ und σ kommutiert ebenfalls mit τ und Θ.

Für den Normalisator P' von $cK_{\mathbb{C}}P^-$ als parabolische Untergruppe gilt $P' \simeq Z_{G_1}(X^0) \times N'$ und $\sigma(N') = \overline{N}'$, wobei $\overline{N}'$ die analytischen Untergruppe zum $(+2)$-Eigenraum von $\mathrm{ad}\, X^0$ ist. Für $z \in Z_{G_1}(X^0)$ ist $\sigma(z) = \tau(z) \in Z_{G_1}(X^0)$, da $\mathrm{Ad}(\tau(z))X^0 = -\mathrm{Ad}(\tau(z))\tau(X^0) = -\tau(\mathrm{Ad}(z)X^0) = X^0$. Somit folgt für $z \in Z_{G_1}(X^0)$, $n \in \overline{N}$ und $zn \in P' \cap G_1^\sigma$ aus der Gleichung $\sigma(z)\sigma(n) = zn$ sofort $n = e$ und $\tau(z) = z$, d.h. $P' \cap G_1^\sigma \subset H_1 \cap G_1^\sigma =: H$. Tatsächlich handelt es sich hier nicht nur um eine Inklusion sondern eine Identität. Unsere Voraussetzungen machen (G_1, G_1^ρ, ρ), wobei $\rho(g) := \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i X^0)(g)$ ist, zu einem Cayleyraum und damit ist $G_1^\rho = Z_{G_1}(X^0)$. Da $\sigma = \rho\tau$ und $H_1 = G_1^\tau$, folgt jetzt $H \subset G_1^\rho$ und somit die Gleichheit beider Mengen: $P' \cap G_1^\sigma = H$.

Proposition 5.2 *Sei $\{E_{\pm j}\}$ ein System stark-orthogonaler Wurzelvektoren erster oder zweiter Art bezüglich τ. Sei $\sigma(g) := Ad(\exp \frac{\pi}{2} i X^0)\tau(g)$, $(G, H, \tau) := (G_1^\sigma, (G_1^\sigma)^\tau, \tau)$ und $\mathfrak{a} := \sum \mathbb{R} X_j$. Für ein System zweiter Art sei $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ maximal abelsch in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$. Dann ist G/H schwach kompakt-kausal und $\tilde{d} : G/H \to G_1/P'$ eine kausale Kompaktifizierung dieses Raums.*

Beweis: Wie in Abschnitt 4 ist die Abbildung $\tilde{d} : G/H \to G_1/P'$ eine injektive Submersion und wir zeigen zunächst wieder mit der bekannten Vorgehensweise, daß das Bild auch dicht in G_1/P' ist.

Für Systeme erster Art ist $\mathfrak{a} = \sum \mathbb{R} X_j \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ und $W_\sigma(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{a})$. Wie im Abschnitt 4.1 sind dann die offenen Doppelrestklassen $G w_v P(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ durch die $v \in W(\mathfrak{a}, K) \backslash W(\mathfrak{a})$ parametrisiert, wobei $K := K_1 \cap G$ und die w_v Repräsentanten für v sind.

Im Gegensatz dazu zeigt Bedingung (i) von Proposition 2.3 für Systeme zweiter Art, daß $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma} = \sum_{j=1}^{r'} \mathbb{R}(X_j + X_{j+r'})$ maximal abelsch in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ sein — oder äquivalent dazu — der reelle Rang der assoziierten Gruppe $G_a := G_1^{\sigma\Theta}$ gleich r' sein muß, wenn wie weiter mit $\mathfrak{a}$ als maximaler abelscher Unteralgebra arbeiten wollen. Dies erklärt die zusätzliche Bedingung für Systeme zweiter Art in unsere Proposition. Mit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} = \sum \mathbb{R}(X_j - X_{j+r'})$ und indem wir die Weylgruppe wieder mit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \times S_r$ identifizieren, sehen wir in diesem Fall, daß $W_\sigma(\mathfrak{a})$ von allen Permutationen von Paaren $(X_1, X_{1+r'}), \ldots, (X_{r'}, X_{r'+r'})$, den Transpositionen $\langle X_j, X_{j+r'} \rangle$ — welche zusammen ein semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r'} \times S_{r'}$ erzeugen — und den Spiegelungen, die $X_j + X_{j+r'}$ in $-(X_j + X_{j+r'})$ abbilden und alle Vektoren senkrecht zu diesem fest lassen, erzeugt wird.

Mit dem Theorem von Moore und indem wir wieder $\mathfrak{a}^*$ und $\mathfrak{a}$ identifizieren, erhalten wir $\Sigma(\mathfrak{a}) \backslash \Sigma(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}) = \{\pm\frac{1}{2}(X_s + X_t), \pm\frac{1}{2}(X_u - X_v) \mid 1 \leq s, t, u, v \leq r,\ u \neq v,\ |u - v| \neq r'\}$ und eine $\sigma\Theta$-verträgliche Teilmenge positiver Wurzeln gemäß der Bedingung in Proposition 2.3 kann durch die lexikographische Ordnung $X_1 > X_{1+r'} > X_2 > X_{2+r'} > \ldots > X_{r'+r'}$ definiert werden. Alle anderen $\sigma\Theta$-verträglichen positiven Teilmengen sind dann $W_\sigma(\mathfrak{a})$-konjugiert zu der so definierten.

Unter Verwendung von Korollar 2.5 ist jetzt zu zeigen, daß die diesen Teilmengen entsprechenden Doppelrestklassen in GP' liegen. Zunächst ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{a}' + \sigma\mathfrak{a}') = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_1}(X^0)$ der Leviteil von $\mathfrak{p}'$ und das Zentrum $\mathfrak{z}$ dieser Unteralgebra ist eine direkte Summe $\mathfrak{z} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{a}'$ [Wa, Lemma 1.2.4.4], was $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}'$ impliziert, da ja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1$ ist. Jetzt legt die dritte Bedingung aus Korollar 2.5 wie in Abschnitt 4.1 $\mathfrak{a}$ als einzig mögliche Wahl für $\mathfrak{a}_1$ bis auf $G \cap P'$-Konjugation fest — hierbei ist wiederum notwendig, daß wir für Systeme zweiter Art $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ als maximal abelsch in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ annehmen. Nach Satz 2.4 liegt eine minimale parabolische Unteralgebra $\mathfrak{p}(\mathfrak{a}, w\Sigma(\mathfrak{a})^+)$, falls $\langle \Sigma(\mathfrak{a})^+, \mathfrak{a}'_+ \rangle \subset \mathbb{R}^+$, wieder genau dann in $\mathfrak{p}'$, wenn $w \in W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'}$ ist. Die ersten zwei in Korollar 2.5 aufgestellten Bedingungen bestimmen dann die Teilmenge derjenigen Unteralgebren, welche auch in offenen Bahnen liegen. Bei Systemen erster Art ist $\sigma\Theta|_{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$ und somit sind diese Bedingungen leer, wogegen im anderen Fall Bedingung (ii) eine Einschränkung liefert. Hier ist $\Sigma(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}''} \backslash \Sigma(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g})_{\mathfrak{m}''} = \{\pm\frac{1}{2}(X_u - X_v) \mid 1 \leq u, v \leq r,\ u \neq v,\ |u - v| \neq r'\}$ und eine $\sigma\Theta$-verträgliche Teilmenge kann wieder mit der oben angegebenen lexikographischen Ordnung definiert werden. Konjugieren mit einem Element aus $W_\sigma(\mathfrak{a})$ bewahrt dann die $\sigma\Theta$-Verträglichkeit und umgekehrt sind alle $\sigma\Theta$-verträgliche Teilmengen von positiven Wurzeln $W_\sigma(\mathfrak{a})$-konjugiert. Somit sind die Unteralgebren zu offenen Bahnen durch $W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} \cap W_\sigma(\mathfrak{a})$ parametrisiert. Beschränken wir uns auf die Bestimmung der offenen Doppelrestklassen und dividieren die Unteralgebren bzw. die ihnen entsprechenden Elemente der Indexmenge, welche in denselben Doppelrestklassen liegen, heraus, so erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} \cap W_\sigma(\mathfrak{a}) \to W_\sigma(\mathfrak{a}) \to W(\mathfrak{a}, K)\backslash W_\sigma(\mathfrak{a}) \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \varphi \\ W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} \cap W(\mathfrak{a}, K)\backslash W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} \cap W_\sigma(\mathfrak{a}). \end{array}$$

Es bleibt wieder die Surjektivität von φ zu zeigen. Für Systeme stark-orthogonaler Wurzelvektoren der ersten Art ist $Y_j \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ und der Beweis von Lemma 4.2 ist dann ohne Änderungen übertragbar. Für Systeme zweiter Art ist zu zeigen, daß die Spiegelung an der Ebene senkrecht zu $X_j + X_{j+r'}$ in $W(\mathfrak{a}, K)$ liegt, wobei j beliebig ist. Hier gilt aber $X_j + X_{j+r'}$, $Y_j + Y_{j+r'} \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$, so daß $[X_j + X_{j+r'}, Y_j + Y_{j+r'}] = -2i(H_j + H_{j+r'}) \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}$ und $\mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i(H_j + H_{j+r'}))$ ein Repräsentant der gesuchten Spiegelung in $\mathrm{Ad}K$ ist.

Zur Vervollständigung des Beweises ist jetzt nur noch die Kausalität des Raums G/H und der Abbildung $\tilde{d}$ zu beweisen. Für Systeme erster Art ist $\tau(Y_j) = Y_j$, für die zweiter Art $\tau(Y_j) = Y_{j+r'}$ und $\tau(Y_{j+r'}) = Y_j$, so daß in beiden Fällen $\tau(Y^0) = Y^0$ ist. Mit $Z^0 = \frac{1}{4}[X^0, Y^0]$ haben wir dann $\tau(Y_\pm) = \tau(\frac{1}{2}Y^0 \mp Z^0) = Y_\mp$. Weiter folgt mit $\mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i X^0)(Y^0) = -Y^0$ dann sofort $\sigma(Y_\pm) = -Y_\mp$ und somit ist C_k σ-invariant. Die kompakt-kausale Struktur auf G_1/H_1 ist aber durch C_k definiert [H'O, Thm. 3.1.18] und damit ist mit denselben Argumenten wie im letzten Abschnitt G/H schwach kompakt-kausal und $\tilde{d}$ eine kausale Abbildung. $\square$

Beispiel 5.3 Die in Abschnitt 4.1 definierten Systeme stark-orthogonaler Wurzelvektoren können zu einem System erster Art modifiziert werden. Es ist $\tau(E_{\pm j}) = E_{\pm j}$ und indem man die positiven Wurzelvektoren mit i multipliziert, also $\tilde{E}_{+j} = iE_{+j}$ und $\tilde{E}_{-j} = -iE_{-j}$ setzt, erhält man das Gewünschte. In diesem Fall ist dann

$\sigma(g) = \mathrm{Ad}(\exp(\frac{\pi}{2}iY^0)\exp(\frac{\pi}{2}iX^0))(g) = \Theta_r(g)$, wie eine $\mathfrak{sl}(2)$-Rechnung zeigt. Somit ist $G_1^\sigma = K_1$ und wir finden den schon bekannten kausalen Diffeomorphismus $\tilde{d}: K_1/H \to \check{S}$ wieder.[3]

Beispiel 5.4 Für kompakt-kausale Räume vom Gruppentyp existiert immer ein System zweiter Art: Diese Räume bzw. genauer ihre Liealgebren sind dabei von der Form $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \tau) \simeq (\tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}}, \Delta(\tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}}), \tau)$, wobei $\tau : \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}}$, $(X, Y) \mapsto (Y, X)$, und $\Delta(\tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}}) := \{(X, X) \mid X \in \tilde{\mathfrak{g}}\}$ ist. (G_1, K_1, Θ_1), mit $\Theta_1 := \Theta \times \Theta$, ist vom Tubentyp, wenn $(\tilde{G}, \tilde{K}, \Theta)$ es ist. Wie die Klassifikation zeigt ['Ol, H'O], sind dann $\mathfrak{su}(n, n)$, $\mathfrak{so}^*(4n)$, $\mathfrak{so}(2, n)$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ und $\mathfrak{e}_{7(-25)}$ die möglichen Algebren $\tilde{\mathfrak{g}}$ mit $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{k}}, \Theta)$ vom Tubentyp, welche zu irreduziblen Räumen vom Gruppentyp gehören.

Seien $\tilde{E}_{\pm j}$, $j = 1, \ldots, r'$, jetzt stark-orthogonale Wurzelvektoren für $\tilde{\mathfrak{g}}$ mit den üblichen Eigenschaften, so definieren wir $E_{\pm j} := (\tilde{E}_{\pm j}, 0)$ und $E_{\pm(j+r')} := (0, -\tilde{E}_{\mp j})$. Trivialerweise ist dieses System dann von zweiter Art und $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}} \times \tilde{\mathfrak{a}}$, mit $\tilde{\mathfrak{a}} = \sum \mathbb{R}\tilde{X}_j$ und $\tilde{X}_j = \tilde{E}_{+j} + \tilde{E}_{-j}$. Wir erhalten $\sigma(g, h) = (\tilde{\sigma}(h), \tilde{\sigma}(g))$, wobei $\tilde{\sigma}(g) := \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i\tilde{X}^0)(g)$ eine Involution auf $\tilde{G}$ ist, so daß $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma} = \sum \mathbb{R}(\tilde{X}_j, -\tilde{X}_j)$. Da $\tilde{\mathfrak{a}}$ maximal abelsch in $\tilde{\mathfrak{p}}$ ist, gilt dies auch für $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma} = \{(X, -X) \mid X \in \tilde{\mathfrak{p}} \cap \tilde{\mathfrak{g}}^{\tilde{\sigma}}\} \cup \{(X, X) \mid X \in \tilde{\mathfrak{p}} \cap \tilde{\mathfrak{q}}_{\tilde{\sigma}}\}$, mit $\tilde{\mathfrak{q}}_{\tilde{\sigma}}$ dem (-1)-Eigenraum der Involution $\tilde{\sigma}$ in $\tilde{\mathfrak{g}}$. Damit sind alle Voraussetzungen von Proposition 5.2 erfüllt. Wir erhalten $G := G_1^\sigma = \{(g, \tilde{\sigma}(g)) \mid g \in \tilde{G}\} \simeq \tilde{G}$ und $H := G^\tau = \{(g, g) \mid g \in G\}$, so daß $(G, H, \tau) \simeq (\tilde{G}, \tilde{G}^{\tilde{\sigma}}, \tilde{\sigma})$ ist. Tatsächlich ist nach unseren Voraussetzungen $(\tilde{G}, \tilde{G}^{\tilde{\sigma}}, \tilde{\sigma})$ ein Cayleyraum und wir erhalten so eine Modifikation der in Abschnitt 3 konstruierten kausalen Kompaktifizierung. In Anhang B, Abschnitt 8.1, geben wir eine vergleichende Diskussion beider Möglichkeiten für $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(n, n)$.

Beispiel 5.5 (Kausale Kompaktifizierung von $SO^*(2p)/O(p, \mathbb{C})$):
In Beispiel 4.4 ist für $p = q$ der halbeinfache Anteil der Fixpunktgruppe $[G_1^\sigma, G_1^\sigma]$ ein irreduzibler kompakt-kausaler Raum und $[G_1^\sigma, G_1^\sigma]/K_1 \cap [G_1^\sigma, G_1^\sigma]$ ist vom Tubentyp. Das System stark-orthogonaler Wurzelvektoren

$$E_{+j} = \begin{pmatrix} 0 & iE_{j,j+p} + iE_{j+p,j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -iE_{j,j+p} - iE_{j+p,j} & 0 \end{pmatrix},$$

$j = 1, \ldots, p$, in $[G_1^\sigma, G_1^\sigma]$ ist dann von erster Art. Wir vereinfachen im folgenden die Notation mit dem in Lemma 4.5 gegebenen Diffeomorphismus. Die Gruppe G_1 ist dann $SU(p, p)$ und τ einfach durch komplexe Konjugation gegeben. Außerdem wird unser System stark-orthogonaler Wurzelvektoren auf $E_{+j} = iE_{j,j+p}$ und

[3]Ist $G_{1\mathbb{C}}$ nicht einfach zusammenhängend, so ist H durch $Z_{G_1}(X^0) \cap K_1$ zu ersetzen, da dann $G_1^\rho \supset Z_{G_1}(X^0)$ eine echte Inklusion sein kann. Wir verweisen auf die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 6.1 und die Diskussion der einzelnen Fälle in Anhang A.

$E_{-j} = -iE_{j+p,j}$ abgebildet. Damit ist $\sigma(g) = \mathrm{Ad}(J_p)(\overline{g})$, die Fixpunktgruppe dieser Involution

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{array} \right) \subset SL(2p, \mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{array}{c} {}^t\overline{A}A -{}^t B\overline{B} = I \\ {}^tA\overline{B} +{}^t \overline{B}A = 0 \end{array} \right\} \simeq SO^*(2p)$$

[He, S. 527] und H ist als Untergruppe aller reellen Matrizen isomorph zu $O(p, \mathbb{C})$ via $\left(\begin{array}{cc} A & B \\ -B & A \end{array} \right) \mapsto A + iB$. Schließlich liefert eine triviale Rechnung die Cayley-Transformierende $c = \exp(\frac{\pi}{4} i \sum Y_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc} I & -iI \\ -iI & I \end{array} \right)$ und als Kompaktifizierung erhalten wir

$$SO^*(2p)/O(p, \mathbb{C}) \to \check{S}$$

$$\left(\begin{array}{cc} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{array} \right) H \mapsto (-iA + B)(i\overline{B} + \overline{A})^{-1},$$

wobei der Bergman-Šilov-Rand von $SU(p,p)/S(U(p) \times U(p))$ hier durch $\check{S} = \{Z \in M(p \times p, \mathbb{C}) \mid Z^*Z = I\}$ gegeben ist.

6 Kausale Kompaktifizierung von $SO(2,n)/SO(1,n)$ und restliche Räume

Wir konstruieren in diesem Abschnitt eine kausale Kompaktifizierung der Lorentzmannigfaltigkeit $SO(2,n)/SO(1,n)$ und die Zerlegung in $SO(2,n)$-Bahnen für diese. Außerdem zeigen wir für die irreduziblen kompakt-kausalen Räume, für welche wir keine kausale Kompaktifizierung konstruiert haben, daß eine solche — in der von uns gesuchten Form — nicht existiert.

6.1 Die Kompaktifizierung von $SO(2,n)/SO(1,n)$

Wir wählen

$$G_1 = SO(2,n{+}1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(n+3,\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} {}^tAA - {}^tCC = I, \quad {}^tDD - {}^tBB = I \\ {}^tAB = {}^tCD \end{matrix} \right\}$$

mit der üblichen Cartaninvolution Θ. Der reelle Rang hier ist $\min(2, n+1)$ und wir beschränken uns auf den Fall $n \geq 2$, da $\mathfrak{so}(2,1) \simeq \mathfrak{su}(1,1)$ und $\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{su}(1,1) \times \mathfrak{su}(1,1)$ ist.

Als Liealgebra haben wir dann

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}(2,n{+}1) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ {}^tX_2 & X_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} X_1 \in M(2\times 2,\mathbb{R}),\; X_3 \in M(n+1\times n+1,\mathbb{R}) \\ {}^tX_1 = -X_1,\; {}^tX_3 = -X_3,\; X_2 \text{ beliebig} \end{matrix} \right\}$$

und für das System stark-orthogonaler Wurzelvektoren mit den den üblichen Eigenschaften wählen wir

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \dots & -i & -1 \\ \vdots & & -1 & i \\ -i & -1 & & \vdots \\ -1 & i & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \dots & i & -1 \\ \vdots & & -1 & -i \\ i & -1 & & \vdots \\ -1 & -i & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \dots & i & -1 \\ \vdots & & 1 & i \\ i & 1 & & \vdots \\ -1 & i & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \dots & -i & -1 \\ \vdots & & 1 & -i \\ -i & 1 & & \vdots \\ -1 & -i & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist dann $X^0 = -2(E_{n+3,1} + E_{1,n+3})$ und weiter $\exp i\frac{\pi}{2}X^0 = 1 + (\cos\pi - 1)\operatorname{diag}(1,0,\dots,0,1) + \frac{i}{2}\sin\pi\; X^0 = \operatorname{diag}(-1,1,\dots,1,-1)$, so daß wir für die Involution $\tau = \mathrm{Ad}(\exp i\frac{\pi}{2}X^0)$ als Fixpunktgruppe

$$H_1 := G_1^\tau = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_4 & B_3 & 0 \\ 0 & C_2 & D_1 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \in SL(n+3, \mathbb{R}) \;\middle|\; \ldots \right\} \simeq$$

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_3 & d_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_4 & B_3 \\ C_2 & D_1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1a_1 - c_3c_3 = 1,\ d_4d_4 - b_2b_2 = 1, a_1b_2 = c_3d_4, \\ a_4a_4 - {}^tC_2C_2 = I,\ {}^tD_1D_1 - {}^tB_3B_3 = 1,\ a_4B_3 = {}^tC_2D_1, \\ \text{Produkt der Determinanten Eins} \end{array} \right\}$$
$$= S(O(1,1) \times O(1,n))$$

erhalten.

Bemerkung. Die Komplexifizierung $SO(n+3, \mathbb{C})$ von $G_1 = SO(2, n+1)$ ist nicht einfach zusammenhängend und G_1 selber ist nicht einmal zusammenhängend. Änderungen bei einer Komplexifizierung mit nichttrivialer Fundamentalgruppe gegenüber unseren Ergebnissen ergeben sich nur daraus, daß einige oder alle der Inklusionen $(G_1)_0 \subset \{g \in G_{1\mathbb{C}} \mid \overline{g} = g\}$, wobei hier $\overline{g}$ Konjugation bezüglich der reellen Form $\mathfrak{g}_1$ meint, und $(G_1^\tau)_0 \subset Z_{G_1}(X^0) \subset G_1^\tau$ echt sein können [H'O, Kapitel 1.6]. Da wir letztlich nur an Quotienten wie z.B. G/H oder G_1/P' interessiert sind, ist es im ersten Fall — der nur für $G_1 = SO(p,q)$ auftritt — egal, ob wir mit der Gruppe aller „reellen" Matrizen oder nur deren Einskomponente arbeiten. Fallen die Fixpunktgruppe von τ und der Zentralisator von X^0 nicht zusammen, so ist überall $H_{(1)}$ durch $Z_{G_{(1)}}(X^0)$ zu ersetzen und alle bisher gegeben Argumente bleiben richtig. Auch dieser Fall tritt wieder nur für $G_1 = SO_{(0)}(p,q)$ ein. Wegen der einfacheren Beschreibung einzelner der auftretenden Untergruppen arbeiten wir hier mit $G_1 = SO(2, n+1)$ und nicht mit deren Einskomponente.

Entsprechend der Bemerkung fallen hier H_1 und $Z_{G_1}(X^0)$ nicht zusammen. Wie man sofort nachrechnet, sind genau diejenigen Elemente aus H_1 auch im Zentralisator von X^0, für welche $a_1d_4 - b_2c_3 = 1$ ist. Für beliebige Elemente h aus H_1 ergibt sich dagegen aus der Determinantenbedingung $\det(h) = 1$ nur $a_1d_4 - b_2c_3 \in \{\pm 1\}$. Offensichtlich treten beide Möglichkeiten auf, so daß also $H_1/Z_{G_1}(X^0) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Mit $\sigma(g) = \mathrm{Ad}(I_{2+n,1})(g)$ ist dann

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B' & 0 \\ C' & D_1' & 0 \\ 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \in SL(n+3, \mathbb{R}) \;\middle|\; \ldots \right\} \simeq S(O(2,n) \times O(1))$$

und

$$H := G \cap H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & B_3 & 0 \\ 0 & C_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \in SL(n+3, \mathbb{R}) \;\middle|\; \ldots \right\} \simeq S(O(1) \times O(1,n) \times O(1)).$$

Der Zentralisator $Z_G(X^0)$ wird wieder nur von den Elementen mit $a_1 d_4 = 1$ gebildet. Wir bemerken an dieser Stelle , daß σ hier nicht eine Involution mit den in Proposition 4.12 geforderten Eigenschaften ist, da $\sigma(X_1) = -X_2$ und $\sigma(X_2) = -X_1$, also $\sigma(X^0) = -X^0$ ist und damit nicht in $\mathfrak{g}$ liegt. Der hier behandelte Fall läßt sich also nicht auf diese Proposition zurückführen.

Die assoziierte Gruppe $G_a := G^{\sigma\Theta}$ hat die Liealgebra

$$\mathfrak{g}_a = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 & X_2' \\ 0 & X_3' & 0 \\ {}^tX_2' & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} X_1 \in M(2\times 2, \mathbb{R}),\ X_2' \in M(2\times 1, \mathbb{R}) \\ X_3 \in M(n\times n, \mathbb{R}) \\ X_1, X_3 \text{ schiefsymmetrisch} \end{array} \right\} \simeq \mathfrak{so}(2,1)\times\mathfrak{so}(n)$$

mit reellem Rang 1. Definieren wir wieder $\mathfrak{a} = \sum \mathbb{R}X_j$, so ist damit $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{q}_{1\sigma}$ maximal abelsch in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$.

Mit $\sigma(X^0) = -X^0$ ist $\sigma(N') = \overline{N}'$, andererseits $Z_{G_1}(X^0)$ aber σ-invariant, so daß mit $P' \simeq Z_{G_1}(X^0) \times N'$, wobei P' wieder der Normalisator von $cK_{\mathbb{C}}P^-$ ist, sofort $P'\cap G = Z_{G_1}(X^0)\cap G$ folgt und wir eine injektive Abbildung $\tilde{d} : G/Z_G(X^0) \to G_1/P'$ erhalten.

Die Algebra $\mathfrak{a}$ erfüllt Bedingung (i) von Proposition 2.3 und wir zeigen weiter, daß es nur eine offene Doppelrestklasse GP_{min} gibt und diese in GP' enthalten ist, womit dann $\tilde{d}(G/Z_G(X^0))$ offen und dicht in G_1/P' ist. Zunächst ist $N_{K_1}(\mathfrak{a}) \subset \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}_4 \end{pmatrix} \in K_1 \;\middle|\; \begin{array}{l} A, \tilde{D}_4 \in O(2) \\ \tilde{D}_1 \in O(n-1) \end{array} \right\}$, wie man durch direkte Rechnung zeigt. Mit $A(t,\epsilon_a) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\epsilon_a \in \{\pm 1\}$, und entsprechender Definition von $\tilde{D}_4(s,\epsilon_d)$ erhält man

$$\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} A(t,\epsilon_a) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}_4(s,\epsilon_d) \end{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{2}X^0 + \frac{\beta}{2}(X_1 - X_2) \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \epsilon_a \cos t \sin s\,\alpha + \epsilon_d \sin t \cos s\,\beta & -\epsilon_a \cos t \cos s\,\alpha + \epsilon_d \sin t \sin s\,\beta \\ \vdots & & \epsilon_a \sin t \sin s\,\alpha - \epsilon_d \cos t \cos s\,\beta & -\epsilon_a \sin t \cos s\,\alpha + \epsilon_d \cos t \sin s\,\beta \\ \vdots & & & \vdots \\ -\epsilon_a \cos t \cos s\,\alpha + \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

so daß für ein Element aus $N_{K_1}(\mathfrak{a})$ entweder $\sin t = \sin s = 0$ oder $\cos s = \cos t = 0$ ist. Für $v \in W_\sigma(\mathfrak{a})$, d.h. hier $w_v(X_1 - X_2) \subset \mathbb{R}(X_1 - X_2)$, muß notwendigerweise immer der erste Fall eintreten und man sieht sofort, daß diese Elemente v auch durch ein $w_v \in W(\mathfrak{a}, K_1 \cap G)$ repräsentiert werden können, also $W(\mathfrak{a}, K_1\cap G) = W_\sigma(\mathfrak{a})$ ist.

Es bleibt damit nach Satz 2.4 nur noch ein $\sigma\Theta$-verträgliches System $\Sigma(\mathfrak{a})^+$ positiver Wurzeln so zu wählen, daß $\langle \Sigma(\mathfrak{a})^+, \mathfrak{a}'_+ \rangle \subset \mathbb{R}^+$. Da $\sigma\Theta(X_1) = X_2$ und $\sigma\Theta(X_2) = X_1$, $\mathfrak{a}'_+ = -\mathbb{R}^+ X^0$ und bis auf Normierung $\gamma_i(X_j) = \delta_{ij}$ ist — das Wurzelsystem ist wie in Theorem 2.1 (i) beschrieben vom Typ $\mathfrak{c}_2$ —, kann man $\{-\gamma_1, -\gamma_2, -\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2), -\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\}$ als positives System wählen, welches allen Bedingungen genügt.

Proposition 6.1 *$\tilde{d}: SO(2,n)/SO(1,n) \to SO(2,n+1)/P'$ ist eine kausale Kompaktifizierung des kompakt-kausalen Raums $SO(2,n)/SO(1,n)$.*

Beweis: Es ist $G/Z_G(X^0) = SO(2,n)/SO(1,n)$, so daß nur noch die Kausalität dieses Quotientenraums und der Abbildung zu zeigen ist. Da aber $G/Z_G(X^0) \subset G_1/Z_{G_1}(X^0)$ und $Z^0 = E_{1,2} - E_{2,1} \in C_k \cap \mathfrak{g}$ sowie $Y^0 \in \mathfrak{q}_{1\sigma}$, ist mit der σ-Invarianz von H_1 und $Y_\pm = \frac{1}{2}Y^0 \pm Z^0$ auch $C_k = C_+ - C_-$ σ-invariant, so daß die Behauptungen mit Lemma 4.3 folgt. □

6.2 Die Zerlegung in Bahnen

Mit Lemma 7 in [Ma 79] sind jeweils die maximalen abelschen Unterräume $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}_1$, für welche $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ bzw. $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}$ maximal abelsch in $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ bzw. $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{g}$ ist, $\mathrm{Ad}(K_1 \cap G)_0$-konjugiert, so daß hier insgesamt nur zwei Konjugationsklassen σ-stabiler maximaler abelscher Unterräume auftreten. Als Vertreter wählen wir die schon eingeführte Algebra $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1 = \mathbb{R}X_{11} + \mathbb{R}X_{12}$, mit $X_{11} := -(E_{1,n+1} + E_{2,n+2} + E_{n+1,1} + E_{n+2,2})$ und $X_{12} := E_{1,n+1} - E_{2,n+2} + E_{n+1,1} - E_{n+2,2}$. Man kann $\mathfrak{a}_1$ konstruieren, indem man die $E_{\pm j}$ durch $\pm i E_{\pm j}$ ersetzt und dann aus diesen Matrizen durch „verschieben" der nichtverschwindenden Einträge nach rechts oben ein System stark-orthogonale Wurzelvektoren in $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_1$ erhält. $\mathfrak{a}_1$ ist dann wieder wie üblich mit diesem System definiert.

Nach Theorem 2.7 existiert neben dem trivialen bis auf Äquivalenz genau ein weiteres $\mathfrak{q}_{1\sigma}$-orthogonales System in $\Sigma(\mathfrak{a}_1)$ und man findet mit demselbem Theorem zu der Wurzel $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_1)$ definiert durch $\alpha(aX_{11} + bX_{12}) = a - b$ das System $Q = \{X_\alpha := \frac{1}{2}(E_{1,n+3} - E_{n+1,n+3} + E_{n+3,1} + E_{n+3,n+1})\}$. X_α ist dabei entsprechend der Bedingung aus Theorem 2.7 normiert, so daß $\mathfrak{a} = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}(X_\alpha + \Theta X_\alpha))\mathfrak{a}_1$ ist. Tatsächlich erhält man mit $c(Q) = \exp \frac{\pi}{2}(X_\alpha + \Theta X_\alpha)$ allgemeiner $\mathrm{Ad}(c(Q))(aX_{11} + bX_{12}) = aX_1 - bX_2$. Unmittelbar aus Satz 2.8 erhält man jetzt die disjunkte Zerlegung

$$G_1 = GP(\mathfrak{a}_1, \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+) \cup GP(\mathfrak{a}, \mathrm{Ad}(c(Q))\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+)c(Q) \cup GwP(\mathfrak{a}, \mathrm{Ad}(c(Q))\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+)c(Q),$$

wobei w ein Repräsentant eines Elements aus $W(\mathfrak{a})\backslash W(\mathfrak{a}, K_1 \cap G)$ ist, da mit $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{g}$ offensichtlich $W(\mathfrak{a}_1) = W(\mathfrak{a}_1, K_1 \cap G)$ und $|W(\mathfrak{a}, K_1 \cap G)\backslash W(\mathfrak{a})| = 2$.

Proposition 6.2 *Ist* $\check{S}_1$ *der Bergman-Šilov-Rand von* $SO_0(2, n+1)/(SO(2) \times SO(n+1))$*, so zerfällt dieser in zwei G-Bahnen:* $\check{S}_1 = G(s_1 c(Q))^{-1} c x_0 \dot{\cup} G c x_0$*, mit* $s_1 = \exp(\frac{\pi}{2} i H_2)$.

Beweis: Wir gehen wieder wie im Beweis von Satz 3.5 vor. Sei dazu $s_1 = \exp(\frac{\pi}{2} i H_2)$ und $P_1' = \mathrm{Ad}(s_1 c(Q))^{-1} P'$, so erhält man mit der Langlandszerlegung $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}' + \mathbb{R} X^0 + \mathfrak{n}'$ diejenige von $\mathfrak{p}_1'$ durch Konjugation, so daß mit $X_1 - X_2 = X_{11} + X_{12}$ dann $\mathfrak{a}_1' = \mathbb{R}(X_{11} + X_{12})$ ist. Damit ist auch klar, daß $\hat{\mathfrak{a}}_1 = \tilde{\mathfrak{a}}_1 = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{m}_1'' \cap \hat{\mathfrak{a}}_1' \cap \mathfrak{g} = \mathbb{R}(X_{11} - X_{12})$ und $\Sigma_{\mathfrak{g}}(\hat{\mathfrak{a}}_1)_{\mathfrak{m}_1''} = \{\pm \frac{1}{2}\alpha\}$ ist. Ein vollständiges Vertretersystem von $\mathfrak{q}_{1\sigma}$-orthogonalen Systemen wird also wieder durch $\{\emptyset, Q\}$ gegeben und die Zerlegung von GP_1' ist jetzt sofort aus Korollar 2.10 abzuleiten. Wie schon ausgeführt ist $W(\mathfrak{a}_1) = W(\mathfrak{a}_1, K_1 \cap G)$ und wie im Beweis von Satz 3.5 ist $W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}_1'} = \mathrm{Ad}(s_1 c(Q))^{-1} W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} \simeq \{((1,1), \mathrm{id}),\ ((-1,-1), \langle 1\ 2 \rangle)\}$, wobei wir wieder $W(\mathfrak{a})$ mit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times S_2$ identifizieren. Es ist aber $((-1,-1), \langle 1\ 2 \rangle) \in W_\sigma(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{a}, K_1 \cap G)$, so daß

$$GP_1' = GP(\mathfrak{a}_1, \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+) \cup GP(\mathfrak{a}, \mathrm{Ad}(c(Q))\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+) c(Q),$$

wobei die Menge der positiven Wurzeln $\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+$ gemäß der Bedingung $\langle \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+, \mathfrak{a}_{1,+}' \rangle \subset \mathbb{R}^+$ gewählt ist.

Mit genau demselben Vorgehen erhält man auch die in GP' liegenden Doppelrestklassen GgP_{min}. Es folgt nacheinander $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}'$ und $\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_1$ und mit $\mathfrak{m}'' \cap \hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{g} = \mathbb{R}(X_1 - X_2)$ dann — wieder mit der Identifikation von $\mathfrak{a}$ und dem Dualraum $\mathfrak{a}^*$ — $\Sigma_{\mathfrak{g}}(\hat{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{m}''} = \{\pm\frac{1}{2}(X_1 - X_2)\}$. Die Frage nach der Existenz eines nichttrivialen $\mathfrak{q}_{1\sigma}$-orthogonalen Systems von $\Sigma_{\mathfrak{g}}(\hat{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{m}''}$ reduziert sich damit auf die nichttriviale Lösbarkeit von $[X_1 - X_2, X] = \lambda X$ mit $X \in \mathfrak{q}$. Wie eine einfache Rechnung aber zeigt, ist $X = 0$ die einzige Lösung. Außerdem ist aus Abschnitt 6.1 bekannt, daß $W(\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}'} = W(\mathfrak{a}, K_1 \cap G)$, und somit folgt $GP' = GP(\mathfrak{a}, \Sigma(\mathfrak{a})^+)$, wobei $\langle \Sigma(\mathfrak{a})^+, \mathfrak{a}_+' \rangle \subset \mathbb{R}^+$ erfüllt sein muß. Mit $\langle \Sigma(\mathfrak{a}_1)^+, \mathfrak{a}_{1,+}' \rangle = \langle \mathrm{Ad}(s_1 c(Q))\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+, \mathrm{Ad}(s_1 c(Q))\mathfrak{a}_{1,+}' \rangle = \langle \mathrm{Ad}(s_1 c(Q))\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+, \mathfrak{a}_+' \rangle$ ist folglich $GP' = G s_1 P(\mathfrak{a}, \mathrm{Ad}(c(Q))\Sigma(\mathfrak{a}_1)^+) s_1^{-1}$ und $G_1 = GP_1' \dot{\cup} GP' s_1 c(Q)$, was die Behauptung beweist. □

6.3 Die verbleibenden kompakt-kausalen Räume

Die kompakt-kausalen Räume sind vollständig klassifiziert [H'O, Thm. 3.3.7] und wir haben kausale Kompaktifizierungen für alle, mit Ausnahme der in der folgenden Tabelle gegebenen, konstruiert.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	Parameter
$\mathfrak{so}(2, p+q)$	$\mathfrak{so}(p,1) \oplus \mathfrak{so}(1,q)$	$\min(p,q) \geq 2$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{sp}(2,2)$	
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{su}^*(8)$	
$\mathfrak{so}(2,n) \oplus \mathfrak{so}(2,n)$	$\mathfrak{so}(2,n)$	$n \geq 1$
$\mathfrak{e}_{6(-14)} \oplus \mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	
$\mathfrak{e}_{7(-25)} \oplus \mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	

Wir zeigen im folgenden, daß für keinen — mit Ausnahme einiger „niederdimensionaler" Sonderfälle — zu einer dieser Algebren assoziierten kompakt-kausalen Raum G/H eine Einbettung in den Bergman-Šilov-Rand $\check{S}_1$ eines Hermiteschen symmetrischen Raums G_1/K_1 vom Tubentyp als symmetrischer Unterraum existiert. Wir verwenden dazu die Klassifikation der offenen symmetrischen Bahnen reduktiver Gruppen in symmetrischen R- oder Nagano-Räumen [M][4]. Dabei ist ein R- oder Nagano-Raum als homogener Raum G_1/P' einer halbeinfachen Liegruppe G_1 mit parabolischem P' definiert. Der Raum heißt weiter symmetrisch, falls er eine unter einer maximalen kompakten Untergruppe invariante Riemannsche Metrik besitzt. In unserem Fall ist $\check{S}_1$ ein solcher symmetrischer R-Raum. Tatsächlich folgt mit $P' \simeq H_1 \times N'$, $h \in H$ und $n \in N'$ aus $\Theta(hn) = hn$ für $hn \in K_1 \cap P'$ sofort $n = e$, d.h. $(K_1, K_1 \cap P', \tau)$ bzw. $\check{S}_1 = K_1/K_1 \cap P'$ ist ein Riemannscher symmetrischer Raum [KW, Thm. 4.9] und mit Satz 2.2 dann ein symmetrischer R-Raum. Die G-Bahn durch eP' ist dann ein symmetrischer Unterraum, wenn G τ-invariant ist. Abweichend davon ist für die in Abschnitt 3 konstruierten Kompaktifizierungen die Involution mit isoliertem Fixpunkt $(e\Theta P', eP')$ durch $\tilde{\tau} = \sigma\Theta$ gegeben und entsprechend ist die zugehörige G-Bahn genau dann symmetrisch, wenn $\sigma\Theta(G) = (G)$ ist. Es ist damit klar, daß alle Abbildungen der von uns gesuchten Art $\tilde{d} : G_1^\sigma/H_1^\sigma \to G_1/P'$ in der Klassifikation enthalten sein müssen.

Ist $G/P' = M_1 \times \ldots \times M_n$ ein Produkt irreduzibler symmetrischer R-Räume und hat $G = G_1^\sigma$ offene Bahn in G/P', so zerfällt G ebenfalls in ein Produkt von Gruppen $G = G_1 \times \ldots \times G_m$, wobei jeder Faktor entweder eine offene Bahn in einem irreduziblen M_j oder in einem Produkt $M_j \times M_{j+1}$ hat und dabei $M_j \simeq M_{j+1}$ ist [He, M]. Beschränken wir uns zunächst auf den irreduziblen Fall, so sind die möglichen M_j, welche als Bergman-Šilov-Ränder von Gruppen vom Tubentyp auftreten, und die möglichen Einbettungen in [M, §5] unter den Fällen $I.$1., $II.$1., $III.$1. $IV.$ und $V.$1. klassifiziert. Der Vergleich zeigt sofort, daß für keinen zu einer der oben aufgelisteten Algebren assoziierten kompakt-kausalen Raum eine Einbettung mit offener Bahn existiert, mit folgenden Ausnahmen: Für einige kleine n ist $\mathfrak{so}(2,n)$ isomorph zu anderen halbeinfachen Liealgebren [He, S.

[4]Nach persönlicher Mitteilung von W. Bertram ist die Klassifikation nicht vollständig. Der von uns benötigte Teil dieser Klassifikation ist davon aber nicht betroffen.

519]. Man findet z.B. $(\mathfrak{so}(2,2+2),\mathfrak{so}(1,2)\oplus\mathfrak{so}(1,2))\simeq(\mathfrak{su}(2,2),\mathfrak{so}(2,2))$ und $(\mathfrak{so}(2,3+3),\mathfrak{so}(1,3)\oplus\mathfrak{so}(1,3))\simeq(\mathfrak{so}^*(8),\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}))$, so daß in diesen Fällen assoziierte kompakt-kausale Räume und kausale Kompaktifizierungen existieren. Analog können die Fälle $(\mathfrak{so}(2,n)\oplus\mathfrak{so}(2,n),\mathfrak{so}(2,n))$ für $n\in\{1,2,3,4,6\}$ behandelt werden, womit die ,,niederdimensionalen" Ausnahmen vollständig erfaßt sind, wie eine systematische Überprüfung der möglichen Isomorphien zeigt. Das Ergebnis ändert sich auch nicht, wenn man offene Bahnen für reduktives $\tilde{G}$ mit $G\subset\tilde{G}$ und $G/H\subset\tilde{G}/\tilde{H}$ zuläßt. Für die drei letzten Fälle unserer obigen Tabelle ist $G=G_0\times G_0$ und man kann nach einer Kompaktifizierung als Produkt von Abbildungen $G_0\to M_i$ und $G_0\to M_j$ suchen. In diesem Fall ist aber $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0$ ebenfalls nicht einfach, was nur für $\mathfrak{so}(2,2)\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ auftritt. Das Argument schließt dabei offensichtlich auch den Fall einer Kompaktifizierung von $\tilde{G}/\tilde{H}$, mit $G\subset\tilde{G}$ und $H\subset\tilde{H}$, aus.

Proposition 6.3 *Zu den folgenden kompakt-kausalen Liealgebren $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ existieren keine assoziierten Räume, welche eine Kompaktifizierung durch Einbettung in den Bergman-Šilov-Rand eines Hermiteschen symmetrischen Raumes vom Tubentyp besitzen:*

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	*Parameter*
$\mathfrak{so}(2,p+q)$	$\mathfrak{so}(p,1)\oplus\mathfrak{so}(1,q)$	$\min(p,q)\geq 2,\ (p,q)\neq(2,2),\ (3,3)$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{sp}(2,2)$	
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{su}^*(8)$	
$\mathfrak{so}(2,n)\oplus\mathfrak{so}(2,n)$	$\mathfrak{so}(2,n)$	$n=5$ *oder* $n\geq 7$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}\oplus\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	
$\mathfrak{e}_{7(-25)}\oplus\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	

Beweis: Zum Beweis ist nach dem bisher gezeigten nur noch die Möglichkeit einer Einbettung in das Produkt $\check{S}_1=\check{S}\times\check{S}$ zweier Bergman-Šilov-Ränder auszuschliessen. Da die Dimension von $\check{S}_1$ hier $\frac{1}{2}\dim(G_1/K_1)$ ist, gilt in diesem Fall notwendigerweise $\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{h}=\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}_1-\dim\mathfrak{k}_1)$. Außerdem kann für einfaches G dieses nur durch eine Abbildung $G\to\Delta G\subset G\times G$ oder eine Modifikation einer solchen, wie in Beispiel 5.4, erfolgen [M], so daß dann $\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{k}$ gelten muß. Für die ersten drei Fälle liefert dies $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+q^2-nq=\frac{1}{2}(n^2-n+2)\Leftrightarrow n(1-q)=(1-q^2)$, äquivalent zu $q=1$ oder $n=q+1$, d.h. $p=1$ — in diesem Fall ist der betrachtete Raum vom Cayleytyp und wie in Abschnitt 3 gezeigt existiert eine Einbettung durch Diagonaleinbettung —, $36\neq 46$ und $63\neq 79$.

Für die drei verbleibenden Fälle suchen wir einen injektiven Homomorphismus von Liealgebren $\varphi:\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_0\to\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1$, derart daß die Diagonale $\Delta(\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_0)$ in die direkte Summe zweier maximaler parabolischer Unteralgebren $\tilde{\mathfrak{p}}'\oplus\mathfrak{p}'$, wobei $\tilde{\mathfrak{p}}'\simeq\mathfrak{p}'$, abgebildet wird. Dabei ist $\mathfrak{g}_0$ eine der Algebren $\mathfrak{so}(2,n)$, $\mathfrak{e}_{6(-14)}$ oder $\mathfrak{e}_{7(-25)}$ und die möglichen $(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}')$ werden durch die irreduziblen Hermiteschen symmetrischen

Räume vom Tubentyp bestimmt. Ist $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}' + \mathbb{R}X^0 + \mathfrak{n}'$ wieder die Langlandszerlegung, so impliziert die Existenz von φ sofort eine Einbettung $\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{m}'$ [Va, Cor. 3.14.3] und das Bild ist ohne Einschränkung Θ-invariant [Wa, Lemma 1.1.5.5], so daß Rang und reeller Rang von $\mathfrak{m}'$ durch die entsprechenden Größen für $\mathfrak{g}_0$ von unten beschränkt sind. Dies schließt $\mathfrak{m}' = \mathfrak{so}(1,k)$ bzw. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}(2,n)$ aus und der Dimensionsvergleich, welcher hier $\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{k}_1$ liefert, läßt dann nur noch die Möglichkeit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2,n)$ und $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$ oder $\mathfrak{so}^*(4k)$ offen. Für $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sp}(k,\mathbb{R})$ ist $\mathfrak{m}' = \mathfrak{sl}(k,\mathbb{R})$. Die Gleichung $\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{k}_1$ liefert dann $(n+1)(n+2) = 2k(k+1)$. Eine Einbettung von $\mathfrak{so}(2,n)$ in $\mathfrak{m}'$ liefert $(n+1)(n+2) \le 2(k^2-1)$, so daß Elimination von n zum Widerspruch $k(k+1) \le k^2-1$ führt. Für $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}^*(4k)$ leitet man aus der Dimensionsgleichung $n \ge 2k$, für $k \ge 3$ ab. $k \ge 3$ ist dabei durch die Beschränkung von k nach unten durch den reellen Rang von $\mathfrak{so}(2,n)$ keine Einschränkung. Die Einbettung $\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{m}'$, d.h. hier $\mathfrak{so}(2,n) \to \mathfrak{su}^*(2k)$, gibt uns auch eine Abbildung der maximalen kompakten Unteralgebren $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{sp}(k)$. Rangvergleich führt dann zu $1 + [\frac{n}{2}] < k$, was jetzt im Widerspruch zu $n > 2k$ steht. $\square$

Anmerkungen zu Abschnitt 6. In derselben Weise, in der wir mit [Ma 79, Ma 82] die Dichte des Bildes unserer kompakt-kausalen Einbettungen gezeigt und die Zerlegung in Bahnen untersucht haben, sollten die anderen in [M] gegebenen Einbettungen $G/H \to G_1/P'$ zu behandeln sein. Der in Abschnitt 6.1 behandelte Raum ist schon von Molchanov diskutiert worden [Mo].

7 Anhang A

In diesem Anhang geben wir für die klassischen symmetrischen Räume vom Cayleytyp die in Abschnitt 4 konstruierten kausalen Kompaktifizierungen explizit an. Für den exzeptionellen Raum, der zu dem Paar $(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R})$ assoziiert ist, erhält man aufgrund der Klassifikationsergebnisse in [M] die Kompaktifizierung $E_{6(-14)} \times S_1/F_{4(-20)} \to E_{7(-25)}/P'$, ohne das hier die Details gegeben werden. Zur Notation sei angemerkt, daß wir aus Platzgründen oft Matrizen der Form $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ oder ähnlicher Blockstruktur verwenden, ohne die Größe der einzelnen Blöcke A, $B, \ldots$, anzugeben. Diese ist aber aus dem Kontext zu ersehen.

7.1 Die Kompaktifizierung von $S(U(p,q) \times U(q,p))/SU(p,q)$

$$G_1 = SU(n,n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{matrix} {}^tA\overline{A} -{}^t C\overline{C} = I, \ {}^tD\overline{D} -{}^t B\overline{B} = I \\ {}^tA\overline{B} ={}^t C\overline{D} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{su}(n,n) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ {}^t\overline{Z}_2 & Z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{matrix} Z_1, Z_3 \text{ schiefhermitesch}, \\ Z_2 \text{ beliebig}, \ \mathrm{Spur}(Z_1+Z_3)=0 \end{matrix} \right\}$$

Der reelle Rang von $SU(n,n)$ ist n und wir können diesselben stark-orthogonalen Wurzeln wie für $Sp(n,\mathbb{R})$ in Beispiel 3.4 verwenden.

Als Cartanalgebra wählen wir dabei $\mathfrak{t} = \{i \operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \mid x_j, y_j \in \mathbb{R}, \sum x_j + \sum y_j = 0\}$ und mit $E_j = \begin{pmatrix} 0 & E_{jj} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $E_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{jj} & 0 \end{pmatrix}$ ist dann $H_j = [E_j, E_{-j}] = \begin{pmatrix} E_{jj} & 0 \\ 0 & -E_{jj} \end{pmatrix}$.

Mit $X^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ und $\exp \frac{\pi}{2} iX^0 = iX^0, \ X^0X^0 = I$ ist jetzt

$$\tau(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$$

und somit

$$H_1 := G_1^\tau = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in SL(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{matrix} {}^tA\overline{A} -{}^t B\overline{B} = I, \\ {}^tA\overline{B} ={}^t B\overline{A} \end{matrix} \right\},$$

mit Liealgebra

$$\mathfrak{h}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} Z_1 \text{ schiefhermitesch}, \ \mathrm{Tr}(Z_1) = 0, \\ Z_2 \text{ Hermitesch} \end{matrix} \right\}.$$

Lemma 7.1 *$\varphi : H_1 \to SL(n,\mathbb{C})\cdot \mathbb{R}^+ I$, $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \mapsto A+B$, ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Wie man sofort verifiziert, ist φ ein Monomorphismus in $GL(n,\mathbb{C})$, wobei die definierenden Relationen für H_1 äquivalent zu $(A+B)^{-1} = ({}^t\overline{A} - {}^t\overline{B})$ sind. Für die Liealgebren ist $\varphi : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) + \mathbb{R}I$ offensichtlich ein Isomorphismus und da $GL(n,\mathbb{C})$ zusammenhängend ist, ist unsere Behauptung damit bewiesen. $\square$

Da τ nicht mehr durch komplexe Konjugation gegeben wird, haben wir jetzt mit derselben Wahl der ϵ_j wie in Beispiel 3.4

$$\sigma(g) = \mathrm{Ad}\left(\sum \epsilon_j \begin{pmatrix} 0 & -E_{jj} \\ E_{jj} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\right)(g) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & -I_{p,q} \end{pmatrix}(g)$$

und als Fixpunktgruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & A_4 & B_3 & 0 \\ 0 & C_2 & D_1 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & D_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1,\ D_1 \in M(p\times p,\mathbb{C}) \\ A_4,\ D_4 \in M(q\times q,\mathbb{C}) \\ B_2,\ C_2 \in M(q\times p,\mathbb{C}) \\ B_3,\ C_3 \in M(p\times q,\mathbb{C}) \end{array} \right\},$$

welche isomorph zu

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & B_3 \\ C_2 & D_1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^t\overline{A}_k A_k -{}^t \overline{C}_m C_m = I,\ {}^t\overline{D}_n D_n -{}^t \overline{B}_l B_l = I \\ {}^t A_k \overline{B}_l ={}^t C_m \overline{D}_n, \text{Produkt der Determinanten 1} \\ (k,l,m,n) \in \{(1,2,3,4),\ (4,3,2,1)\} \end{array} \right\}$$

$$\simeq S\left(U(p,q)\times U(q,p)\right)$$

ist. Unter derselben Abbildung wird $H := G \cap H_1$ auf $\tilde{H} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ B_3 & A_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & B_3 \\ B_2 & A_1 \end{pmatrix} \right) \right\}$ abgebildet, wobei diese Gruppe durch Projektion auf einer der Komponenten isomorph auf $SU(p,q) \simeq SU(q,p)$ geht.

Damit erhalten wir die kausale Kompaktifizierung

$$\begin{aligned} S\left(U(p,q)\times U(q,p)\right)/\tilde{H} \quad & \to \check{S} \\ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & B_3 \\ C_2 & D_1 \end{pmatrix} \right)\tilde{H} \quad & \mapsto \begin{pmatrix} -A_1 & B_2 \\ B_3 & -A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & -C_2 \\ -C_3 & D_4 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

wobei hier der Bergman-Šilov-Rand von $SU(n,n)/S(U(n)\times U(n))$ in der Harish-Chandra-Realisierung durch $\check{S} = \{Z \in M(n\times n,\mathbb{C}) \mid {}^t Z\overline{Z} = I_n\}$ gegeben ist [KW].

7.2 Die Kompaktifizierung von $U(2p, 2q)/Sp(p, q)$

$$G_1 = SO^*(4n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in SL(4n, \mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{matrix} {}^tA\overline{A} -{}^t\overline{B}B = I \\ {}^tA\overline{B} +{}^t\overline{B}A = 0 \end{matrix} \right\}$$

Bemerkung. 1.) Die Komplexifizierung $SO(4n, \mathbb{C})$ von G_1 ist nicht einfach zusammenhängend. Wie in Abschnitt 6.1 ausgeführt, kann in diesem Fall $G_1^\tau \supset Z_{G_1}(X^0)$ eine echte Inklusion sein, wobei dann $H_{(1)}$ durch $Z_{G_{(1)}}(X^0)$ zu ersetzen ist. Für $SO^*(4n)$ tritt dieses Problem aber nicht auf — vgl. diesen und Abschnitt 7.4 —, da G_1^τ jeweils zusammenhängend ist.

2.) Die definierenden Gleichungen sichern bereits $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = 1$.

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{so}^*(4n) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\overline{Z}_2 & \overline{Z}_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} Z_1 \text{ schiefhermitesch} \\ Z_2 \text{ schiefsymmetrisch.} \end{matrix} \right\}$$

Wir wählen $\mathfrak{t} = \{i \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_{2n}, -x_1, \ldots, -x_{2n}) \mid x_j \in \mathbb{R}\}$ und

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 & E_{j,j+n} - E_{j+n,j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } E_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -E_{j,j+n} + E_{j+n,j} & 0 \end{pmatrix},$$

$j = 1, \ldots, n$, als System von Wurzelvektoren, welche in den Wurzelräumen zu $H_j = [E_j, E_{-j}] = \begin{pmatrix} E_{jj} + E_{j+n,j+n} & 0 \\ 0 & -E_{jj} - E_{j+n,j+n} \end{pmatrix}$ liegen. Mit $J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in M(2n \times 2n, \mathbb{R})$ haben wir dann $X^0 = \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix}$ und $\exp \frac{\pi}{2} iX^0 = iX^0$, so daß

$$\tau\left(\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_n\overline{A}J_n & -J_n\overline{B}J_n \\ J_nBJ_n & -J_nAJ_n \end{pmatrix}.$$

Ein Element ist also dann und nur dann invariant, wenn $A = -J_n\overline{A}J_n$ und $B = -J_n\overline{B}J_n$ ist und wir erhalten als Fixpunktgruppe

$$H_1 := G_1^\tau = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\ -\overline{A}_2 & \overline{A}_1 & -\overline{B}_2 & \overline{B}_1 \\ -\overline{B}_1 & -\overline{B}_2 & \overline{A}_1 & \overline{A}_2 \\ B_2 & -B_1 & -A_2 & A_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} {}^tA\overline{A} -{}^t\overline{B}B = I \\ \\ {}^tA\overline{B} +{}^t\overline{B}A = 0 \end{matrix} \right\}$$

mit Liealgebra

$$\mathfrak{h}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{21} & Z_{22} \\ -\overline{Z}_{12} & \overline{Z}_{11} & -\overline{Z}_{22} & \overline{Z}_{21} \\ -\overline{Z}_{21} & -\overline{Z}_{22} & \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ Z_{22} & -Z_{21} & -Z_{12} & Z_{11} \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} Z_{11} & \text{schiefhermitesch} \\ Z_{12} & \text{symmetrisch} \\ Z_{21} & \text{schiefsymmetrisch} \\ Z_{22} & \text{Hermitesch} \end{matrix} \right\}.$$

Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir das oben gegebene Element aus H_1 mit $h(A_1, A_2, B_1, B_2)$, da die entsprechenden Untermatrizen es schon eindeutig bestimmen.

Lemma 7.2
$\varphi : H_1 \to SU^*(2n)\mathbb{R}^+ I, \quad h(A_1,A_2,B_1,B_2) \mapsto \begin{pmatrix} \overline{A_1+B_2} & \overline{A_2-B_1} \\ -(A_2-B_1) & A_1+B_2 \end{pmatrix}$, ist ein Gruppenisomorphismus, wobei $SU^*(2n) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in SL(2n,\mathbb{C}) \right\}$, und die definierenden Relationen für H_1 äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \overline{A_1+B_2} & \overline{A_2-B_1} \\ -(A_2-B_1) & A_1+B_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t\overline{(A_1-B_2)} & -{}^t(A_2+B_1) \\ {}^t\overline{(A_2+B_1)} & {}^t(A_1-B_2) \end{pmatrix}$$

sind.

Der Beweis ist eine längere aber nichtsdestotrotz triviale Rechnung.

Mit $\epsilon_j = 1$ für $j = 1,\ldots,p$ und $\epsilon_j = -1$ für $j = p+1,\ldots,n$ erhält man $\sigma(g) = \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(I_{p,q}, I_{p,q}, -I_{p,q}, -I_{p,q})(g)$, wobei $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \in M(n\times n,\mathbb{R})$ und die Fixpunktgruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{21} & 0 & 0 & B_{12} & 0 & B_{22} \\ 0 & A_{14} & 0 & A_{24} & B_{13} & 0 & B_{23} & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{41} & 0 & 0 & B_{32} & 0 & B_{42} \\ 0 & A_{34} & 0 & A_{44} & B_{33} & 0 & B_{43} & 0 \\ 0 & -\overline{B}_{12} & 0 & -\overline{B}_{22} & \overline{A}_{11} & 0 & \overline{A}_{21} & 0 \\ -\overline{B}_{13} & 0 & -\overline{B}_{23} & 0 & 0 & \overline{A}_{14} & 0 & \overline{A}_{24} \\ 0 & -\overline{B}_{32} & 0 & -\overline{B}_{42} & \overline{A}_{31} & 0 & \overline{A}_{41} & 0 \\ -\overline{B}_{33} & 0 & -\overline{B}_{43} & 0 & 0 & \overline{A}_{34} & 0 & \overline{A}_{44} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A_{11},A_{21},A_{31},A_{41} \in M(p\times p,\mathbb{C}) \\ A_{14},A_{24},A_{34},A_{44} \in M(q\times q,\mathbb{C}) \\ B_{12},B_{22},B_{32},B_{42} \in M(q\times p,\mathbb{C}) \\ B_{13},B_{23},B_{33},B_{43} \in M(p\times q,\mathbb{C}) \\ {}^tA\overline{A} - {}^t\overline{B}B = I, \\ {}^tA\overline{B} + {}^t\overline{B}A = 0 \end{array} \right\}.$$

Diese Untergruppe ist isomorph zu $U(2p,2q)$, wenn wir ein Element der obigen Form auf

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & B_{12} & B_{22} \\ A_{31} & A_{41} & B_{32} & B_{42} \\ -\overline{B}_{13} & -\overline{B}_{23} & \overline{A}_{14} & \overline{A}_{24} \\ -\overline{B}_{33} & -\overline{B}_{43} & \overline{A}_{34} & \overline{A}_{44} \end{pmatrix}$$

abbilden. Das Bild von $H = G \cap H_1$ unter φ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & B_{22} & A_{21} & -B_{12} \\ B_{23} & A_{14} & -B_{13} & A_{24} \\ -\overline{A}_{21} & \overline{B}_{12} & \overline{A}_{11} & \overline{B}_{22} \\ \overline{B}_{13} & -\overline{A}_{24} & \overline{B}_{23} & \overline{A}_{14} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} {}^tA_1\overline{A}_1 + {}^t\overline{A}_2A_2 - {}^t\overline{B}_1B_1 - {}^tB_2\overline{B}_2 = I \\ {}^tA_1\overline{A}_2 - {}^t\overline{A}_2A_1 - {}^t\overline{B}_1B_2 + {}^tB_2\overline{B}_1 = 0 \\ {}^tA_1\overline{B}_1 + {}^tA_2B_2 + {}^t\overline{B}_1A_1 + {}^tB_2\overline{A}_2 = 0 \\ {}^tA_2\overline{B}_1 - {}^t\overline{A}_1B_2 + {}^t\overline{B}_2A_1 - {}^tB_1\overline{A}_2 = 0 \end{array} \right\}$$

und die Untergruppe $\varphi(H)$ ist dann isomorph zu $Sp(p,q)$ via Konjugation mit der Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(I_n, -I_{p,q})$.

7.3 Die Kompaktifizierung von $SO(2,n-1)\times SO(2)/S(O(1)\times O(1,n-1))$

Wir arbeiten wie in Abschnitt 6.1 mit $G_1 = SO(2,n+1) =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(n+3,\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{array}{l} A \in M(2\times 2,\mathbb{R}),\ D \in M(n+1\times n+1,\mathbb{R}) \\ {}^tAA - {}^tCC = I,\ {}^tDD - {}^tBB = I,\ {}^tAB = {}^tCD \end{array} \right\}.$$

Für eine Diskussion der Implikationen wegen der nicht einfach zusammenhängenden Komplexifizierung von G_1 verweisen wie auf die entsprechenden Anmerkungen in demselben Abschnitt und wir können wieder $n \geq 2$ annehmen, so daß der reelle Rang von G_1 zwei ist.

Als Vektoren $E_{\pm j}$ verwenden wir wieder die in Abschnitt 6.1 eingeführten, so daß auch X^0, τ und H_1 bzw. $Z_{G_1}(X^0)$ identisch sind. Mit $Y_1 - Y_2 = 2(E_{n+2,1} + E_{1,n+2})$ haben wir $\exp i\frac{\pi}{2}(Y_1 - Y_2) = \operatorname{diag}(-1,1,\ldots,1,-1,1)$ und somit $\sigma(g) = \operatorname{Ad}(I_{n,2})(g)$, so daß wir als Fixpunktgruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B' & 0 \\ C' & D_1' & 0 \\ 0 & 0 & D_4 \end{pmatrix} \in SL(n+3,\mathbb{R}) \,\middle|\, \ldots \right\} \simeq S(O(2,n-1)\times O(2))$$

erhalten. Es ist jetzt trivial, denn Schnitt des Zentralisators von X^0 mit G zu bestimmen und wir erhalten $G/Z_G(X^0) = SO(2,n+1)\times SO(2)/Z(X^0)$, wobei

$$Z(X^0) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & B_2' & 0 & 0 \\ 0 & C_3' & D_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \in SL(n+3,\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{array}{l} a_1 \in \{\pm 1\}, \\ \\ \begin{pmatrix} a_4 & B_2' \\ C_3' & D_1' \end{pmatrix} \in O(1,n) \end{array} \right\}$$

$$\simeq S(O(1)\times O(1,n-1)).$$

7.4 Die Kompaktifizierung von $SO^*(2n)\times SO^*(2n)/SO^*(2n)$

$$G_1 = SU(2n,2n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(4n,\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{array}{l} {}^tA\overline{A} - {}^tC\overline{C} = I,\ {}^tD\overline{D} - {}^tB\overline{B} = I \\ {}^tA\overline{B} = {}^tC\overline{D} \end{array} \right\}$$

und mit $\rho(g)Ad\begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ -I_{2n} & 0 \end{pmatrix}(\overline{g})$ erhalten wir die Fixpunktgruppe

$$G_1' = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in SL(4n,\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{array}{l} {}^tA\overline{A} -{}^t\overline{B}B = I \\ {}^tA\overline{B} +{}^t\overline{B}A = 0 \end{array} \right\} \simeq SO^*(4n),$$

welche einfach ist mit G'_1/K'_1 Hermitesch vom Tubentyp. Als $E_{\pm j}$ wählen wir die von Beispiel 4.13 für $j = 1, \ldots, n$ bzw. die mit -1 multiplizierten für $j = n+1, \ldots, 2n$. Mit $E'_{\pm j'} = E_{\pm j'} + E_{\pm(j'+n)}$ erhalten wir dann Wurzelvektoren, welche in $\mathfrak{g}'_{1\mathbb{C}}$ liegen, und da der reelle Rang von $SO^*(4n)$ gleich n ist, so bilden diese Vektoren ein die Bedingungen (i) und (ii) aus Proposition 4.12 erfüllendes System. Sei jetzt $\epsilon_j = 1$ für $j = 1, \ldots, n$ bzw. -1 für $j = n+1, \ldots, 2n$, dann ist $\sigma(g) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} I_{n,n} & 0 \\ 0 & I_{n,n} \end{pmatrix}(g)$ und σ kommutiert mit ρ, da $\left[\begin{pmatrix} I_{n,n} & 0 \\ 0 & I_{n,n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ -I_{2n} & 0 \end{pmatrix}\right] = 0$. Für die Fixpunktgruppe von σ in G'_1 bzw. die dazu assoziierte Gruppe erhält man

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 & B_4 \\ -\overline{B}_1 & 0 & \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & -\overline{B}_4 & 0 & \overline{A}_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} {}^tA_i\overline{A_i} - {}^t\overline{B_i}B_i = I, \\ {}^tA_i\overline{B_i} + {}^t\overline{B_i}A_i = 0, \\ i \in \{1,4\} \end{array} \right\} \simeq SO^*(2n) \times SO^*(2n)$$

und

$$G'_a = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & A_4 & B_3 & 0 \\ 0 & -\overline{B}_2 & \overline{A}_1 & 0 \\ -\overline{B}_3 & 0 & 0 & \overline{A}_4 \end{pmatrix} \middle| \cdots \right\} \simeq U(n,n),$$

so daß, da der reelle Rang der assoziierten Gruppe n ist, auch Bedingung (iii) erfüllt ist. Mit $\tau(g) = \mathrm{Ad}(\exp i\frac{\pi}{2}X^0)(g) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix}(g)$ ist jetzt die durch diese Involution definierte Untergruppe der fixen Elemente in G'

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_1 & 0 & \overline{B}_1 \\ -\overline{B}_1 & 0 & \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & -B_1 & 0 & A_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} {}^tA_1\overline{A_1} - {}^t\overline{B_1}B_1 = I, \\ \\ {}^tA_1\overline{B_1} + {}^t\overline{B_1}A_1 = 0 \end{array} \right\} \simeq SO^*(2n).$$

Schließlich ergibt sich mit $c = \exp(\frac{\pi}{2}iY^0) = \cos\frac{\pi}{4}\,I - \sin\frac{\pi}{4}\,Y^0$ wie in Beispiel 4.13 als Kompaktifizierung

$$\begin{array}{rcl} SO^*(2n) \times SO^*(2n)/SO^*(2n) & \to & \check{S} \\ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -\overline{B}_1 & \overline{A}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{A}_4 & \overline{B}_4 \\ -B_4 & A_4 \end{pmatrix}\right)\Delta(SO^*(2n) \times SO^*(2n)) & \mapsto & \begin{pmatrix} B_1 & -A_1 \\ A_4 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{A}_1 & \overline{B}_1 \\ -\overline{B}_4 & \overline{A}_4 \end{pmatrix}^{-1}, \end{array}$$

wobei der Bergman-Šilov-Rand von $SO^*(4n)/U(2n) \subset SU(2n,2n)/S(U(2n) \times U(2n))$ hier durch $\check{S} = \{Z \in M(2n \times 2n, \mathbb{C}) | Z^*Z = I_{2n},\ \ {}^tZ = -Z\}$ gegeben ist [He, S. 527].

8 Anhang B

Wir geben hier einige nach dem in Abschnitt 5 gegebenen Verfahren konstruierte kausale Kompaktifizierungen. Für die Notation gilt das in Anhang A Gesagte analog.

8.1 Modifizierte Kompaktifizierung von $SU(p,p)/SL(p,\mathbb{C}) \cdot \mathbb{R}^+ I$

Für $p = q$ erhalten wir mit der analytischen Untergruppe zu $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ aus Abschnitt 7.1 einen irreduziblen kompakt-kausalen Raum, derart daß $G_1; = [G, G]$ vom Tubentyp ist,

$$G_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & B_3 \\ C_2 & D_1 \end{pmatrix} \right) \middle| \begin{pmatrix} A_k & B_l \\ C_m & D_n \end{pmatrix} \in SU(p,p) \right\},$$

und $\tau(g,h) = (\mathrm{Ad}(L_p)h, \mathrm{Ad}(L_p)g)$, mit $L_p = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Zur Vereinfachung der Notation ist hier die Gruppe gleich unter Verwendung des in Abschnitt 7.1 definierten Isomorpismus gegeben. Der reelle Rang ist $2p$ und wir definieren ein System stark-orthogonaler Wurzelvektoren der zweiten Art durch $E_j = (iE_{j,j+p}, 0)$, $E_{-j} = (-iE_{j+p,j}, 0)$, $E_{j+p} = (0, iE_{j,j+p})$ und $E_{-j-p} = (0, -iE_{j+p,j})$ für $j = 1, \ldots, p$. Damit ist $X^0 = (iJ_p, iJ_p)$ und

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_4 & B_3 \\ C_2 & D_1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} A_4 & -B_3 \\ -C_2 & D_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ -C_3 & D_4 \end{pmatrix} \right).$$

Für die Fixpunktgruppe dieser Involution ergibt sich

$$G = \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ -C_3 & D_4 \end{pmatrix} \right) \middle| \ \ldots \right\} \simeq SU(p,p),$$

wobei der Isomorphismus durch Projektion auf einen der Faktoren definiert wird.

Die assoziierte Gruppe $G_a := G_1^{\sigma\Theta}$ ist entsprechend

$$G_a = \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix} \right) \right\} \simeq SU(p,p)$$

und hat reellen Rang p. Damit ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_{1\sigma}$ maximal abelsch in $\mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{p}_1$, wie wir es für die Kompaktifizierung eines Raums mit einem System von Wurzelvektoren zweiter Art gefordert haben.

Wir wissen aus Abschnitt 7.1, daß die Untergrupppe H_1 durch die Gleichungen $C_3 = B_3$, $C_2 = B_2$, $D_4 = A_4$ und $D_1 = A_1$ definiert ist. Somit ist

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ B_2 & A_1 \end{pmatrix} \right) \in SL(2p,\mathbb{C}) \times SL(2p,\mathbb{C}) \middle| \begin{matrix} {}^tA_1\overline{A}_1 -{}^t B_2\overline{B}_2 = I \\ {}^tA_1\overline{B}_2 +{}^t B_2\overline{A}_1 = 0 \end{matrix} \right\}$$

und es gilt:

Lemma 8.1 *$\varphi : pr_1 H \to SL(p,\mathbb{C})\cdot \mathbb{R}^+ I$, $\begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} \mapsto A_1 + iB_2$, ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Trivialerweise ist φ ein Monomorphismus in $GL(p,\mathbb{C})$, wobei die definierenden Relationen äquivalent zu $(A_1+iB_2)^{-1} = {}^t\overline{A}_1 + i{}^t\overline{B}_2$ sind. Für die Liealgebren ist $\varphi : \mathrm{pr}_1\mathfrak{h} \to \mathfrak{sl}(p,\mathbb{C}) + \mathbb{R}I$ surjektiv und $\mathrm{pr}_1 H$ ist zusammenhängend, da $\mathrm{pr}_1 H \cap \mathrm{pr}_1 K \simeq SU(p)$, was zusammen die Behauptung beweist. $\square$

Schließlich ist dann mit $c = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -iI \\ -iI & I \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -iI \\ -iI & I \end{pmatrix}\right)$ und $\check{S}$ dem Bergman-Šilov-Rand von $SU(p,p)$ in der Harish-Chandra-Realisierung die Kompaktifizierung durch

$$\begin{aligned} SU(p,p)/\mathrm{pr}_1 H &\to \check{S}\times\check{S} \\ \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C_3 & D_4 \end{pmatrix}\mathrm{pr}_1 H &\mapsto ((-iA_1+B_2)(-iC_3+D_4)^{-1}, (-iA_1-B_2)(iC_3+D_4)^{-1}) \end{aligned}$$

gegeben.

Der Cayleyraum $SU(p,p)/SL(p,\mathbb{C})\cdot\mathbb{R}^+ I$ besitzt natürlich auch eine Kompaktifizierung nach Abschnitt 3. Geht man wie in Beispiel 3.4 unter Verwendung der Resultate aus Abschnitt 7.1 vor, so erhält man mit $\tilde{H} = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in SU(p,p)\right\} \simeq SL(p,\mathbb{C})\cdot\mathbb{R}^+ I$ als Kompaktifizierung

$$SU(p,p)\tilde{H} \to \check{S}\times\check{S}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\tilde{H} \mapsto \left((A+B)(C+D)^{-1}, (-A+B)(-C+D)^{-1}\right).$$

Dabei sind diese Kompaktifizierungen durch Konjugation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ — es ist $\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\tilde{H} = \mathrm{pr}_1 H$ — und einer geeigneten komplexen Rotation in $\check{S}\times\check{S}$ —- es ist $\exp(\lambda Z^0)|_{\check{S}}$ ein Diffeomorphismus von $\check{S}$ — ineinander zu überführen, also äquivalent.

8.2 Die Kompaktifizierung von $Sp(2p, \mathbb{R})/Sp(p, \mathbb{C})$

Wie oben erhalten wir von Abschnitt 7.2 für $p = q$ einen kompakt-kausalen symmetrischen Raum

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & B_{12} & B_{22} \\ A_{31} & A_{41} & B_{32} & B_{42} \\ -\overline{B}_{13} & -\overline{B}_{23} & \overline{A}_{14} & \overline{A}_{24} \\ -\overline{B}_{33} & -\overline{B}_{43} & \overline{A}_{34} & \overline{A}_{44} \end{pmatrix} \in SL(4p, \mathbb{C}) \middle| \cdots \right\} \simeq SU(2p, 2p),$$

wobei G_1 vom Tubentyp ist, mit

$$\tau \left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & B_{12} & B_{22} \\ A_{31} & A_{41} & B_{32} & B_{42} \\ -\overline{B}_{13} & -\overline{B}_{23} & \overline{A}_{14} & \overline{A}_{24} \\ -\overline{B}_{33} & -\overline{B}_{43} & \overline{A}_{34} & \overline{A}_{44} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \overline{A}_{41} & -\overline{A}_{31} & \overline{B}_{42} & -\overline{B}_{32} \\ -\overline{A}_{21} & \overline{A}_{11} & -\overline{B}_{22} & \overline{B}_{12} \\ -B_{43} & B_{33} & A_{44} & -A_{34} \\ B_{23} & -B_{13} & -A_{24} & A_{14} \end{pmatrix},$$

d.h. $\tau(g) = \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} J_p & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix} (\overline{g})$. Der reelle Rang dieser Gruppe ist $2p$ und

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 & iE_{j,j+p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -iE_{j+p,j} & 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$E_{j+p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ iE_{j,j+p} & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-(j+p)} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_{j+p,j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

für $j = 1, \ldots, p$, gibt ein System von Wurzelvektoren zweiter Art. Damit ist $X^0 = \begin{pmatrix} 0 & iJ_p \\ iJ_p & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(g) = \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} (\overline{g})$ und die Fixpunktgruppe von σ

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in SU(2p, 2p) \right\} \simeq Sp(2p, \mathbb{R}).$$

Die assoziierte Gruppe $G_a = G_1^{\sigma\Theta}$ wird von den Elementen der Form $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}$ gebildet und diese Untergruppe von $SU(2p, 2p)$ ist isomorph zu $SO^*(4p)$, welche reellen Rang p hat. Die Fixpunktgruppe der Involution τ in G ist

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & B_{12} & B_{22} \\ -\overline{A}_{21} & \overline{A}_{11} & -\overline{B}_{22} & \overline{B}_{12} \\ \overline{B}_{12} & \overline{B}_{22} & \overline{A}_{11} & \overline{A}_{21} \\ -B_{22} & B_{12} & -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \in SL(4p, \mathbb{C}) \middle| \begin{array}{l} {}^t\overline{A}_{11} A_{11} + {}^t A_{21} \overline{A}_{21} - {}^t B_{12} \overline{B}_{12} - {}^t \overline{B}_{22} B_{22} = I, \\ {}^t\overline{A}_{11} A_{21} - {}^t A_{21} \overline{A}_{11} - {}^t B_{12} \overline{B}_{22} + {}^t \overline{B}_{22} B_{12} = 0, \\ {}^t A_{11} \overline{B}_{12} + {}^t A_{21} B_{22} - {}^t B_{12} A_{11} - {}^t B_{22} \overline{A}_{21} = 0, \\ {}^t\overline{A}_{11} B_{22} - {}^t A_{21} B_{12} - {}^t \overline{B}_{12} A_{21} + {}^t B_{22} \overline{A}_{11} = 0 \end{array} \right\}$$

und durch direkte Rechnung beweist man

Lemma 8.2 *$\varphi : H \to Sp(p,\mathbb{C})$, $h \mapsto \begin{pmatrix} A_{11}+iB_{22} & A_{21}-iB_{12} \\ -\overline{A}_{21}+i\overline{B}_{12} & \overline{A}_{11}+i\overline{B}_{22} \end{pmatrix}$, ist ein Isomorphismus, wobei $Sp(p,\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2p,\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^tAD - {}^tCB = I \\ {}^tAC = {}^tCA,\ {}^tBD = {}^tDB \end{array} \right\}$.*

8.3 Kompaktifizierung von $SO(2,q)/SO(1,q) \times SO(p+1)/S(O(p)\times O(1))$

Sei $G_1 = SO(2,n+1)$ und die $E_{\pm j}$ sowie τ wie in Abschnitt 6.1 definiert, dann ist $\tau(E_{\pm j}) = E_{\mp j}$ und indem wir wie in Beispiel 5.3 $\tilde{E}_{\pm j} = \pm i E_{\pm j}$ setzen, erhalten wir ein System erster Art. Es gilt dann wieder $\sigma = \Theta_r$ und man erhält einen kausalen Diffeomorphismus $K_1/Z_{K_1}(\tilde{X}^0) \to \check{S}$. Wie im zitierten Beispiel angemerkt, ist hier $H = H_1 \cap K_1$ durch $Z_{K_1}(\tilde{X}^0)$ zu ersetzen, da $G_{1\mathbb{C}}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Das Verfahren läßt sich modifizieren, wenn für τ die Konjugation mit $\mathrm{diag}(1,-1,\ldots,-1,1,\ldots,1)$, wobei -1 von der zweiten bis zur $(p+2)$-ten Stelle steht, wählen. Man erhält

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & a_4 & B_3 & 0 \\ 0 & C_2 & D_1 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & D_4 \end{pmatrix} \in SL(n+3,\mathbb{R}) \;\middle|\; \ldots \right\} \simeq S(O(1,p)\times O(1,q+1))$$

und somit ist G_1/H_1 kompakt-kausal [H'O, Thm. 3.3.7]. In diesem Fall ist

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \ldots & -i & -1 & & \\ \vdots & & -1 & i & & \\ -i & -1 & & & & \\ -1 & i & & & & \vdots \\ & & & & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \ldots & i & -1 & & \\ \vdots & & 1 & i & & \\ i & 1 & & & & \\ -1 & i & & & & \vdots \\ & & & & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

zu wählen, wobei der erste nichtverschwindende Eintrag $-i$ bzw. i in der ersten Zeile in der $(p+1)$-ten Spalte auftritt und die E_j symmetrisch sind. Die Vektoren zu den negativen Wurzeln sind dann durch $E_{-j} = -\Theta E_j$ gegeben. Bei dieser Wahl ist $\tau(E_{\pm j}) = E_{\mp j}$, so daß man mit $\tilde{E}_{\pm j} := \pm i E_{\pm j}$ wieder ein System erster Art erhält. Damit ist $\sigma(g) = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2} i \tilde{X}^0)\tau(g) = \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1,1,-1,\ldots,-1,1,\ldots,1))(g)$, wobei hier -1 von der dritten bis zur $(p+3)$-ten Position steht, und

$$G := G_1^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & B' \\ 0 & D_1' & 0 \\ C' & 0 & D_4' \end{pmatrix} \in SO(2,n+1) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in M(2\times 2,\mathbb{C}), \\ D_1' \in M(p+1\times p+1,\mathbb{C}), \\ D_4' \in M(q\times q,\mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

$$\simeq S(O(2,q) \times O(p+1)).$$

Der Schnitt mit der Fixpunktgruppe von τ liefert

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & B_2' \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ C_3' & 0 & 0 & 0 & D_4' \end{pmatrix} \in SL(n+3, \mathbb{R}) \;\middle|\; \dots \right\}$$

$$\simeq S(O(1,q) \times O(1) \times O(p) \times O(1))$$

und der Zentralisator von $\tilde{X}^0 = -2(E_{2,p+3} + E_{p+3,2})$ wird von den Elementen in H mit $a_1 d_4 = 1$ gebildet — $Z_G(\tilde{X}^0) \simeq S(O(1,q) \times O(1) \times O(p))$ —, so daß wir eine Kompaktifizierung für $G/Z_G(\tilde{X}^0) = SO(2,q)/SO(1,q) \times SO(p+1)/S(O(1) \times O(p))$ erhalten.

Literatur

[FK] J. Faraut und A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford 1994

[He] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York 1978

[H'O] J. Hilgert und G. 'Olafsson, *Causal symmetric spaces*, Buch in Vorbereitung, Zitate nach der Version vom 10.3.95

[H'OØ] J. Hilgert, G. 'Olafsson und B. Ørsted, *Hardy spaces on affine symmetric spaces*, J. reine angew. Math. **415** (1991), 189–218

[Ka 87] S. Kaneyuki, *On orbit structure of compactification of parahermitian symmetric spaces*, Japan J. Math. **13** (1987), 333–370

[Ka 89] S. Kaneyuki, *On the causal structures of the Šilov boundary of symmetric bounded domains*, in „Prospects in Complex Geometry", Springer LN 1468, New York 1989

[KW] A. Korányi und J.A. Wolf, *Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half planes*, Ann. of Math. **81** (1965), 265–288

[Ko] K. Koufany, *Semi-groupe de Lie associé à une algèbre de Jordan euclidienne*, Doktorarbeit, Université de Nancy I, 1993

[KØ] K. Koufany und B. Ørsted, *Function spaces on the Ol'shanskiĭ semigroup and the Gelf'and-Gindikin program*, Preprint Odense University

[M] B. O. Makarevič, *Open symmetric orbits of reductive groups in symmetric R-spaces*, Math. USSR Sbornik **20** (1973), 406–418

[Ma 79] T. Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 331–357

[Ma 82] T. Matsuki, *Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups*, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 307–320

[Mo] V. F. Molchanov, *Holomorphic discrete series for hyperboloids of Hermitian type*, Preprint Mathematical Institute, University of Leiden

['Ol] G. 'Olafsson, *Causal symmetric spaces*, Mathematica Gottingensis, Heft 15, 1990

['OØ 88] G. 'Olafsson und B. Ørsted, *The holomorphic discrete series for affine symmetric spaces*, J. Funct. Anal. **81** (1988), 126–159

['OØ] G. 'Olafsson und B. Ørsted, *Harmonic analysis on some symmetric spaces*, Artikel in Vorbereitung

[Va] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, 2nd edition, Springer, New York 1984

[Wa] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*, Springer Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 188, Berlin 1972

[Wo] J. A. Wolf, *Fine Structure of Hermitian Symmetric Spaces*, in ,,Symmetric Spaces", S. 271–357, Dekker, New York 1972

Lebenslauf

2.6.1966	geboren in Menden (Kreis Iserlohn); Staatsangehörigkeit deutsch Eltern Dr. Hans-Gerd Betten und Dr. Bärbel Betten
ab 1972	Besuch der Grundschule in Spardorf
ab 1976	Besuch des Emil-von-Behring-Gymnasiums in Spardorf
Juni 1985	Abitur am Emil-von-Behring-Gymnasium
Okt. 1986	Beginn des Physikstudiums zum Wintersemester 86/87 an der Georg-August-Universität zu Göttingen
27.10.88	Vordiplom in Physik
11.2.92	Diplom in Physik
ab 4.92	Promotion am Mathematischen Institut der Georg-August-Universität