Fourierkoeffizienten von Thetafunktionen sechster Ordnung

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg–August–Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Gunther Wellhausen
aus
Hannover

Göttingen 1996

D7

Referent: Prof. Dr. S.J. Patterson
Korreferent: Prof. Dr. E. Maus

Tag der mündlichen Prüfung: 20.06.1996

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die klassische quadratische Thetareihe

$$\Theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} exp(2\pi i n^2 z) \qquad \text{mit} \qquad z \;=\; x + i\,y, \;\; y > 0$$

erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Theta(\gamma\, z) = j(\gamma, z)\Theta(z)$$

mit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4) \subset SL(2, \mathbb{Z})$, wenn $SL(2, \mathbb{Z})$ wie üblich auf der oberen Halbebene operiert. Das Multiplikatorsystem ist

$$j(\gamma, z) = \epsilon_d^{-1} \left(\frac{c}{d}\right) \sqrt{cz + d}\,, \qquad \epsilon_d = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & d \equiv 1(4) \\ i & d \equiv -1(4) \end{array} \right\} \;;$$

das Symbol $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ ist das Produkt aus dem quadratischen Restsymbol und einem Hilbertsymbol. Schon um 1950 herum war durch Ergebnisse von Siegel und anderen bekannt, daß die Kenntnis von $j(\gamma, z)$ ausreicht, um die Funktion $\Theta(z)$ zu rekonstruieren. Dazu baut man folgende Eisensteinreihe auf:

$$E(z, s) = y^s \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-1} |cz + d|^{-2s}.$$

$\Gamma_\infty \subset SL_2(\mathbb{Z})$ ist dabei die Untergruppe der Matrizen mit dem Eintrag 0 in der linken unteren Ecke. Die Reihe $E(z, s)$ genügt demselben Transformationsgesetz in z wie $\Theta(z)$. Sie konvergiert absolut für Re $s > \frac{3}{4}$, besitzt eine meromorphe Fortsetzung und hat einen einfachen Pol bei $s = \frac{1}{2}$. Bis auf eine Konstante erhält man Θ als das Residuum $Res_{s=\frac{1}{2}} E(z, s) = c\,\Theta(z)$ zurück.

Ebenso wie man eine automorphe Form auf der oberen Halbebene auch als automorphe Form auf $G = GL_2(\mathbb{R})$ betrachten kann, gibt es für $\Theta(z)$ eine Interpretation als automorphe Form auf $\widetilde{G}$, der 2–fachen metaplektischen Überlagerung von G. Man erhält diese Gruppe als $\widetilde{G} = \{(g, \epsilon) \mid g \in G, \, \epsilon^2 = 1\}$, wobei die Multiplikation $(g, \epsilon)(g', \epsilon') = (g\, g', \, \epsilon\, \epsilon' \sigma(g, g'))$ durch einen 2–Kozykel $\sigma(g, g')$ gegeben ist. Auf $\widetilde{G}$ kann mit $\sigma(g, g')$ eine Eisensteinreihe aufgebaut werden, und das Residuum dieser Eisensteinreihe ist die quadratische Thetafunktion.

Kubota (siehe [Ku]) untersuchte in den 60er Jahren die Existenz von Thetafunktionen auf der n–fachen Überlagerung von $GL_2(\mathbb{C})$ mit $n \geq 3$. Er definierte metaplektische Eisensteinreihen $E_n(z, s)$, deren konstanter Term an der Stelle $2s =$

$1+\frac{1}{n}$ einen Pol hat. Es ergaben sich Thetafunktionen n–ter Ordnung als $\Theta_n(z) = Res_{2s=1+\frac{1}{n}} E_n(z,s)$. Diese *metaplektischen Thetafunktionen* sind also eine Verallgemeinerung von Θ_2.

Als periodische Funktion besitzt Θ_n eine Fourierentwicklung. Die Koeffizienten $\rho_n(r)$ dieser Entwicklung erhält man als Residuen der Fourierkoeffizienten der entsprechenden Eisensteinreihen. Diese wiederum sind im wesentlichen Dirichletreihen mit Gaußschen Summen n–ter Ordnung als Koeffizienten.

In [KP] wird eine allgemeine Theorie von metaplektischen Formen auf der n–fachen Überlagerung von Gl_m entwickelt. Es stellt sich heraus, daß die Frage, für welche n die Koeffizienten berechnet werden können, von der Eindeutigkeit der Whittakermodelle spezieller Darstellungen der metaplektischen Gruppe $\widetilde{Gl_m}(\mathcal{A}_k)$ abhängt, dabei seien $\mathcal{A}_k$ die Adele eines globalen Körpers k. Diese tritt im Fall $m = n$ auf; für $m = n - 1$ gilt eine ähnliche Eigenschaft. Für $m = 2$ ergeben sich Relationen zwischen den Fourierkoeffizienten $\rho_n(r)$ (siehe Satz 2.9), die bei $n = 3$ für ihre vollständige Bestimmung ausreichen.

Deshalb war Patterson schon 1976 in der Lage, die kubische Thetafunktion Θ_3 zu berechnen ([P1],[P2]). Mit Hilfe dieses Resultats konnten Patterson und Heath–Brown beweisen, daß die Argumente kubischer Gaußscher Summen gleichverteilt sind (siehe [HBP]). Die in den Θ_n enthaltene Information über Gaußsche Summen ist also ein weiterer Grund für das Interesse an ihrer Untersuchung.

Für $n \geq 4$ gibt es bisher erst einzelne Ergebnisse über die Natur der $\rho_n(r)$. Im Fall $n = 4$ hat Patterson eine Vermutung aufgestellt, in der die Quadrate gewisser Linearkombinationen der ρ_4 beschrieben werden. Die genaue Form wird in [EP] angegeben. Suzuki konnte diese Vermutung für die Argumente beweisen (siehe [Su1], [Su2], [Su3]).

Bei einem Funktionenkörper ist die Situation einfacher, da dort eine Dirichletreihe eine Potenzreihe ist und eine Potenzreihe mit Funktionalgleichung und bekanntem Verhalten an den Polen eine rationale Funktion. Hoffstein hat in [Ho] allgemein für Funktionenkörper eine Methode zur Berechnung der Koeffizienten angegeben. Die Vermutung von Patterson für Funktionenkörper ist darin als Spezialfall enthalten. Hoffstein erwartet gewisse Analogien bei Zahlkörpern (siehe [Ho], Vermutung 4.10). Für $n \geq 5$ liegt die Situation bei Zahlkörpern allerdings noch im dunkeln.

Daher ist es interessant, für einen bisher unbekannten Fall die Koeffizienten mit Hilfe numerischer Methoden zu berechnen. Gegenstand dieser Arbeit ist die angenäherte Bestimmung der Koeffizienten für $k = \mathbb{Q}(\zeta_6), n = 6$.

Für Dirichletreihen, die einer Funktionalgleichung der üblichen Form $(s \to n - s)$ genügen, hat Ferrar in [F] eine Summationsformel entwickelt, die eine näherungsweise Bestimmung der Residuen ermöglicht. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der Poisson'schen Summationsformel. Für praktische Berechnungen wurde diese Methode zum ersten Mal von Eckhardt eingesetzt, der so in [E1] Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper bestimmte. In [W] ließ sich für einen speziellen Fall die

Hasse–Weil Vermutung überprüfen. Schließlich hat Eckhardt durch die Berechnung der ρ_4 zur genauen Formulierung der Vermutung von Patterson beigetragen (siehe [E2]).

In Kapitel 2 werden zunächst die grundlegenden Definitionen zusammengetragen und die Funktionalgleichung der Dirichletreihen angegeben. Die $\rho_n(r)$ werden dann als die entsprechenden Residuen definiert; für die Berechnungen spielt ihre Bedeutung als Fourierkoeffizienten keine weitere Rolle.

Die numerischen Techniken im allgemeinen Fall sind in [E2] und in [W] ausführlich beschrieben. Deshalb wird in Kapitel 3 nur noch kurz darauf eingegangen. Kapitel 4 enthält die Beschreibung der konkreten Situation im sextischen Fall. Schließlich werden im letzten Kapitel die Ergebnisse dargestellt und besprochen. Als Hauptresultat ergab sich in Übereinstimmung mit Hoffsteins Vermutung, daß ein wesentlicher Bestandteil der Koeffizienten $\rho_6(r)$ eine normierte kubische Gaußsche Summe bzw. die Wurzel daraus ist.

Die Methode eignet sich zwar nicht dazu, dieses Ergebnis zu beweisen, die numerischen Daten sprechen aber in so überzeugender Weise dafür, daß ein abweichendes Verhalten ausgesprochen unwahrscheinlich erscheint.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Patterson für die Vergabe dieses interessanten Themas und die Betreuung der Arbeit danken.

2 Funktionalgleichung

Es sei k ein total imaginärer algebraischer Zahlkörper, in dem die n–ten Einheitswurzeln liegen; die Menge

$$\mu_n(k) := \{\zeta \in k | \zeta^n = 1\}$$

hat also n Elemente. S sei eine endliche Menge von Primstellen von k, die alle unendlichen Stellen und alle v mit $v \,|\, n$ enthält. Mit der Bezeichnung k_v für die Vervollständigung von k bzgl. v sei

$$k_S := \prod_{v \in S} k_v \qquad \text{und} \qquad \|x\| = \|x\|_S := \prod_{v \in S} |x_v|_v$$

die Norm eines Elementes $x \in k_S$. Weiter sei

$$\mathcal{R}_S := \{x \in k : |x|_v \leq 1 \; \forall x \notin S\}$$

der Ring der S–ganzen Zahlen. Durch hinreichend große Wahl von S kann erreicht werden, daß $\mathcal{R}_S$ ein Hauptidealring ist. Dies sei im folgenden immer der Fall.
Auf k_S sei die Bilinearform

$$(\;,\;)_S : k_S^\times / k_S^{\times n} \;\times\; k_S^\times / k_S^{\times n} \;\longrightarrow\; \mu_n(k) \qquad \text{durch} \qquad (x,y)_S := \prod_{v \notin S, v | b} (b,a)_v$$

definiert mit dem lokalen Hilbertsymbol $(\;,\;)_v$ auf k_v:

$$(\;,\;)_v : k_v^\times / k_v^{\times n} \;\times\; k_v^\times / k_v^{\times n} \;\longrightarrow\; \mu_n(k) \qquad .$$

Entsprechend bildet man das zugehörige Legendresymbol:

$$\left(\frac{a}{b}\right)_S := \prod_{v \notin S, v | b} (b,a)_v \quad \text{für} \qquad a, b \in \mathcal{R}_S, \;\; a\mathcal{R}_S + b\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_S \qquad .$$

Es gilt das Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{a}{b}\right)_S = (a,b)_S \cdot \left(\frac{b}{a}\right)_S \qquad .$$

Es sei $\epsilon : \mu_n(k) \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein injektiver Homomorphismus. Weiter existiert ein Homomorphismus $e : k_S \to \mathbb{C}^\times$ mit $e(\mathcal{R}_S) = 1$ und $\{x \in k \;:\; e(x \cdot \mathcal{R}_S) \;= 1\} \subset \mathcal{R}_S$, da $\mathcal{R}_S$ Hauptidealring ist. Es sei für $x_v \in k_v$:

$$\lambda_v(x_v) := \left\{ \begin{array}{cl} -x_v & \text{falls } k_v = \mathbb{R} \\ -T_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(x_v) & \text{falls } k_v = \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

Für eine endliche Stelle v sei $\lambda_v(x_v) \in \mathbb{Q}$ der gebrochene Anteil der p-adischen Entwicklung der Spur von x_v. Definiert man für $x \in k_S$ weiter

$$\Lambda(x) := \sum_{v \in S} \lambda_v(x_v) \qquad ,$$

so genügt der Homomorphismus $e_0 : k_S \to \mathbb{C}$ mit

$$e_0(x) := exp(2\pi i \Lambda(x/\alpha))$$

den obigen Bedingungen. Dabei gelte für die absolute Differente $\mathcal{D}$ von k:

$$\mathcal{D} \cdot \mathcal{R}_S = (\alpha) \cdot \mathcal{R}_S \qquad .$$

Definition 2.1 *Für* $c \in \mathcal{R}_S \setminus \{0\}$ *heißt*

$$g_S(e, \epsilon, c) := \sum_{x \, mod^\times c} \epsilon\left(\left(\frac{x}{c}\right)_S\right) \cdot e\left(\frac{x}{c}\right) \qquad \textit{Gaußsche Summe} \qquad .$$

Für eine Einheit $u \in \mathcal{R}_S^\times$ folgt sofort

$$g_S(e, \epsilon, u \cdot c) = \epsilon\left(\frac{u}{c}\right)_S \cdot g_S(r, \epsilon, c) \qquad .$$

In dieser Form ist die Gaußsche Summe also keine Funktion auf den Idealen von $\mathcal{R}_S$. Mit (,) als 2–Kozykel erhält man die Gruppenerweiterung

$$1 \to \mu_n(k) \hookrightarrow \widetilde{k_S} \twoheadrightarrow k_S \to 1 \qquad .$$

Die Multiplikation in $\widetilde{k_S}$ wird durch

$$(x, \zeta)(x', \zeta') \ := \ (x\, x', \ \zeta\, \zeta'\, (x, x')_S^{-1}) \qquad \text{für} \quad x, x' \in k_S \ , \ \zeta, \ \zeta' \in \mu_n(k)$$

beschrieben. $\mathcal{S} : k_S \to \widetilde{k_S}$, $\mathcal{S}(x) := (x, 1)$ bezeichne den Standardschnitt.
Für $c \in \mathcal{R}_S \setminus \{0\}$ sei

$$\widetilde{g_S}(e, \epsilon, (c, \zeta)) := \epsilon(\zeta)\, g_S(e, \epsilon, c) \qquad .$$

Für eine S–Einheit $u \in (\mathcal{R}_S)^\times$ gilt dann

$$\widetilde{g_S}(e, \epsilon, (u, 1)(c, \zeta)) \ = \ \widetilde{g_S}(e, \epsilon, (c, \zeta)) \qquad .$$

Die Menge $\mathcal{S}({k_S^\times}^n \mathcal{R}_S^\times)$ ist eine abelsche Untergruppe von $\widetilde{k_S}$. Ω_ϵ sei die Menge der Quasicharaktere

$$\chi : \ \widetilde{({k_S^\times}^n \mathcal{R}_S^\times)} \to \mathbb{C}^\times \quad \text{mit} \qquad \chi|_{\mu_n(k)} = \epsilon, \quad \chi_{|\mathcal{S}(\mathcal{R}_S^\times)} = 1 \qquad .$$

$\widehat{\chi} \in \Omega_\epsilon$ sei der Quasicharakter mit $\chi\widehat{\chi}(\mathcal{S}({k_S^\times}^n)) = 1$. Durch die Parametrisierung $s \to \chi \| \, \|_S^s$ der Zusammenhangskomponente von χ erhält Ω_ϵ eine Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit. Für $\chi \in \Omega_\epsilon$ sei $\sigma(\chi^n)$ definiert durch

$$\|x\|_S^{\sigma(\chi^n)} := |\chi^n(x)| \qquad .$$

Definition 2.2 *Für $\chi \in \Omega_\epsilon$ sei*

$$H(\chi) := \left\{ \phi : \widetilde{k_S^\times} \to \mathbb{C} : \ \phi(hx) = (\chi(h)\|h\|_S)^{-1}\,\phi(x) \ \textit{für}\ h \in (\widetilde{k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times}), x \in \widetilde{k_S} \right\} \quad .$$

$H(\chi)$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum der Dimension

$$dim_{\mathbb{C}} H(\chi) = [k_S^\times : k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times] = n^{Card(S)} \quad .$$

Satz 2.3 *Für $v \notin S$ sei $\mathcal{P}_v$ das zugehörige Primideal in $\mathcal{R}_S$ und $\pi_v \in \mathcal{R}_S$ ein Erzeuger von $\mathcal{P}_v$. Für $\chi \in \Omega_\epsilon$, $\sigma(\chi^n) > \frac{1}{2}n$ und $\phi \in H(\chi)$ sei*

$$\psi(e,\chi,\phi) \ := \sum_{c \in \mathcal{R}_S \setminus \{0\} \, mod\, \mathcal{R}_S^\times} \widetilde{g_S}(e,\epsilon,\mathcal{S}(c))\phi(\mathcal{S}(c))\, L_S(\chi^n \| \ \|_S) \tag{1}$$

$$mit \qquad L_S(\chi^n\| \ \|_S) \ := \prod_{v \notin S} \left(1 \ - \ (\chi^n(\pi_v)\|\pi_v\|_S)^{-1}\right)^{-1} \quad .$$

Dann konvergiert die Reihe $\psi(e,\chi,\phi)$, betrachtet als Funktion von χ, absolut für $\sigma(\chi^n) > \frac{1}{2}n$. ψ besitzt eine Fortsetzung nach Ω_ϵ als meromorphe Funktion endlicher Ordnung. Im Bereich $\sigma(\chi^n) \geq 0$ hat ψ keine Pole außer an der Stelle $\chi^n = \| \ \|_S$ und dieser Pol ist höchstens einfach.

Beweis:
siehe [EP], Kapitel 5.

Wesentlich für alles weitere ist, daß ψ eine Funktionalgleichung erfüllt. Um diese formulieren zu können, benötigt man lokale Gammafunktionen. Die folgenden beiden Sätze von Tate ([T]) stellen diese bereit:

Satz 2.4 *Es sei f eine Testfunktion auf k_v und ω ein Quasicharakter auf k_v. dx sei das Maß auf k_v, das selbstdual ist bezüglich e, und es sei $d^\times x := |x|_v^{-1}\,dx$. Für $Re\,(s) > 0$ sei*

$$\zeta(f,\omega) \ := \int_{k_v^\times} f(x)\,\omega(x)\; d^\times x \quad .$$

$\hat{f}(t) = \int_{k_v} e(xt)f(x)dx$ sei die mit dem Charakter e gebildete Fouriertransformierte von f. Dann seien für alle Quasicharaktere ω mit $0 < \sigma(\omega) < 1$ und für alle Testfunktionen f auf k_v die lokalen Gammafunktionen $\Gamma_{1,v}$ wie folgt definiert :

$$\zeta(\hat{f},\omega) \ = \ \Gamma_{1,v}(e,\omega)\zeta(f,\omega^{-1}| \ |) \quad .$$

$\Gamma_{1,v}$ kann auf die Menge aller Quasicharaktere ω als meromorphe Funktion fortgesetzt werden.

Satz 2.5 *Es sei π ein Primelement für k_v. Es sei dx das bezüglich e_v selbstduale Maß auf k_v, und das Maß auf $k_v^\times$ sei $d^\times x := |\pi|\,(1-|\pi|)^{-1}|x|^{-1}\,dx$. Dann ist $\mu(r_v) = |\pi|_v^{\frac{d}{2}}$, wobei $\mathcal{D}_v = \pi_v^d$ die lokale Differente ist.*

(i) Für einen unverzweigten Charakter $\chi:\ k_v^\times \to \mathbb{C}^\times$ gilt

$$\Gamma_{1,v}(e,\chi) \;=\; \chi(\pi)^{-d}\frac{1-|\pi|_v\chi(\pi)^{-1}}{1-\chi(\pi)}\;\mu(r_v) \qquad .$$

(ii) Für einen verzweigten Quasicharakter von $k_v^\times$ mit Führer f ist

$$\Gamma_{1,v}(e,\chi) = \chi(\pi)^{-(d+f)}\,|\pi|_v^{\frac{d+f}{2}}\cdot \underbrace{|\pi|_v^{\frac{f}{2}}\sum_{U_v\,/\,(1+(\pi)^f\,)}\chi(x)\,e\left(\frac{x}{\pi^{d+f}}\right)}_{=:\,W(\chi)} \qquad .$$

Für $k_v = \mathbb{C}$ gilt mit $\chi_n\left(re^{i\phi}\right) = e^{in\phi}, n\in\mathbb{Z}$, und der gewöhnlichen Gammafunktion $\Gamma(s)$:

$$\Gamma_{1,v}(e_v,\chi_n\cdot|\;|_v^s) = (-i)^{|n|}\cdot\frac{(2\pi)^{1-s}\Gamma\left(s+\frac{|n|}{2}\right)}{(2\pi)^s\Gamma\left(1-s+\frac{|n|}{2}\right)} \qquad .$$

Ein Quasicharakter ω auf $k_v^{\times n}$ hat die Form $\omega = \omega_1|\;|^s$ mit einem Charakter ω_1 auf $U_v^{\times n}$. Es existiert eine Erweiterung ω_1' von ω_1 auf $k_v^\times$ (siehe z.B. [Po], Satz 35). Daher ist $\omega' := \omega_1'|\;|^s$ eine Erweiterung von ω auf $k_v^\times$. Zwei solcher Erweiterungen unterscheiden sich um einen Charakter, der auf $k_v^{\times n}$ verschwindet. Daher ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 2.6 *Es sei ω ein Quasicharakter auf $k_v^{\times n}$ und ω' eine Erweiterung von ω auf $k_v^\times$. Es sei*

$$\Gamma_{n,v}(e,\omega) \;:=\; [k_v^\times\;:\;k_v^{\times n}]^{-1}\sum_{\phi^n=1}\Gamma_{1,v}\left(e,\,\omega'\phi\right) \qquad .$$

Für Quasicharaktere χ auf $k_S^{\times n}$ sei $\Gamma_n(e,\chi) = \prod_{v\in S}\Gamma_{n,v}(e_v,\chi_v)$. Dabei seien e_v und χ_v die Komponenten von e und χ an der Stelle $v\in S$.

Man hat die übersichtliche Darstellung $\Gamma_n(e,\chi) = \int_{k_S^{\times n}} e(x)\chi(x)d^\times x$, wenn man das Integral gegebenenfalls im Sinne der Distributionentheorie interpretiert. Für $r\in k_S^\times$ sei $re(x) := e(rx)$. Dann folgt direkt aus der Definition die Beziehung

$$\Gamma_n(r\,e,\chi) = \chi(r)^{-1}\cdot\Gamma_n(e,\chi)$$

für $r\in k_S^{\times n}$.

Die angekündigte Funktionalgleichung hat folgende Form:

Satz 2.7 *Es sei* $\chi \in \Omega_\epsilon$. $\tau(e): \; H(\chi) \; \to \; H(\widehat{\chi})$ *sei definiert durch*

$$(\tau(e)\phi)(\mathcal{S}(x')) \;=\; \sum_{x\in k_S^\times \backslash k_S^{\times\,n}} \frac{\Gamma_n\left(-\frac{1}{x\cdot x'}\,e,\;\chi\circ\mathcal{S}\right)}{\Gamma_1\left(e,(\chi\circ\mathcal{S})^n\right)} \left\|\frac{x}{x'}\right\|_S \epsilon((x,-x')_S)\,\phi(\mathcal{S}(x)) \qquad .$$

Dann gilt für die Funktion ψ

$$\psi(e,\widehat{\chi},\tau(e)\psi) \;=\; \psi(e,\chi,\phi) \qquad .$$

Beweis:
siehe [EP], Kapitel 5.

Die folgende Basis des Raumes $H(\chi)$ eignet sich besonders gut für die durchzuführenden Rechnungen :

Definition 2.8 *Es sei* $\eta \in k_S^\times$. $\phi_n \in H(\chi)$ *sei definiert durch*

$$\phi_\eta((x,\zeta)) = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon\left(\zeta^{-1}(h,\eta)_S^{-1}\right)\,\chi^{-1}(x)\|x\|_S^{-1} & \textit{für } x = h\,\eta,\; h\in\, k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times \\ 0 & \textit{für } x\left(k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times\right) \,\neq\, \eta\left(k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times\right) \end{array} \right\}$$

Für $u \in k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times$ gilt $\phi_{u\eta}(x,\zeta) = \epsilon(\eta,u)_S^{-1}\phi_\eta(x,\zeta)$. Ist T ein Vertretersystem für $k_S^\times/(k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times)$, so bilden die $\{\phi_\eta|\; \eta\in T\}$ eine Basis von $H(\chi)$. Für ein $s\in\mathbb{C}$ und für $x \in k_S^{\times\,n}\mathcal{R}_S^\times$ sei $\chi_s(\mathcal{S}(x)) := \|x\|_S^s$. Von jetzt an sei immer der oben beschriebene Charakter e_0 zugrunde gelegt. Durch die Angabe von $r\in k_S^\times$ wird dann ein Charakter $e = re_0$ definiert.

ψ hat nun die Gestalt :

$$\begin{aligned} \psi(r,s,\eta) := \psi(re_0,\chi_s,\phi_\eta) \;&=\; \sum_{c\in\mathcal{R}_S\backslash\{0\}\, mod\, \mathcal{R}_S^\times} \widetilde{g_S}(r,\epsilon,\mathcal{S}(c))\,\phi_\eta(\mathcal{S}(c))\,L_S(\|\;\|_S^{ns+1}) \\ &=\; \sum_{c\in\eta k_S^{\times\,n}\cap\mathcal{R}_S\, mod\, \mathcal{R}_S^{\times\,n}} g(r,\epsilon,c)\|c\|_S^{-(s+1)}\,L_S(\|\;\|_S^{ns+1}) \end{aligned} \qquad ,$$

wobei

$$L_S(\|\;\|_S^s) = \prod_{v\notin S}(1-\|\pi_v\|_S^{-s})^{-1} = \prod_{v\notin S}(1-|\pi_v|_v^s)^{-1} = \prod_{v\in S\backslash S_\infty}(1-|\pi_v|_v^s)\,\zeta_k(s) \qquad .$$

$\zeta_k(s)$ bezeichnet die Zetafunktion von k.

Es folgt sofort, daß $\psi(r,s,\eta)$ nur von der Äquivalenzklasse von η modulo $k_S^{\times\,n}$ abhängt. Weiter erhält man für $u\in\mathcal{R}_S^\times$ die Beziehungen

$$\psi(r,s,\eta u) = \epsilon(u,\eta)_S\,\psi(r,s,\eta) \qquad ,$$

$$\psi(ru,s,\eta) = \epsilon(\eta,u)_S\, \psi(r,s,\eta) \qquad .$$

Die in der Einleitung beschriebenen Größen sind die folgenden Residuen:

$$\rho(r,\eta) = \rho_S(r,\eta) := Res_{s=\frac{1}{n}} \psi(r,s,\eta) \qquad .$$

Es ist

$$\rho(r,\eta) = \lim_{\chi' \to \chi_{\frac{1}{n}}} \left(\frac{\psi(re_0, \chi', \phi_\eta)}{L_S\left(\chi'^n\right)} \right) \cdot Res_{s=1}\zeta_k(s) \prod_{v \in S \setminus S_\infty} (1 - |\pi_v|_v) \qquad .$$

Die $\rho(r,\eta)$ haben folgende Eigenschaften:

Satz 2.9 *Für $u \in \mathcal{R}_S^\times$ gilt*

$$\rho_S(r,\eta u) = \epsilon(\eta,u)_S^{-1}\, \rho_S(r,\eta) \tag{2}$$

$$\rho_S(ru,\eta) = \epsilon(\eta,u)_S\, \rho_S(r,\eta) \tag{3}$$

$$\rho_S(r_1,\eta) = \rho_S(r_2,\eta) \quad , \textit{ wenn } r_1 r_2^{-1} \in k^{\times n} \qquad . \tag{4}$$

Es sei $r_0 \in \mathcal{R}_S$ und π sei ein Primelement aus $\mathcal{R}_S$ mit $\pi \not| \; r_0$. Dann ist

$$\rho_S(r_0\pi^j,\eta) = \|\pi\|_S^{-\frac{j+1}{n}} g_S(r_0,\epsilon^{j+1},\pi)\epsilon(-\eta,\pi^{j+1})_S \rho_S(r_0\pi^{n-2-j},\eta\pi^{-(j+1)}) \tag{5}$$

für $0 \leq j \leq n-2$, und es ist $\rho_S(r_0\pi^{n-1},\eta) = 0$.
Es sei $v \notin S$ eine Stelle von k und $S' := S \cup \{v\}$. Dann gilt

$$\rho_S(r,\eta) = \sum_{\eta_v \in r_v^\times \setminus r_v^{\times\, n}} \rho_{S'}(r,\eta \times \eta_v) \tag{6}$$

Beweis:

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition. Die Eigenschaften (4), (5) und (6) werden in [P5] bewiesen. Dabei ist anzumerken, daß man für den Beweis von (4) und (5) die allgemeine Theorie aus [KP] benötigt. $\square$

3 Algorithmus, numerische Techniken

3.1 Summationsformel

Die Abbildung $\tau(e)$ aus 2.7 zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen läßt sich durch die Matrix $T = (T_{ij})$ darstellen mit $\tau(e)\,\phi_i = \sum_{j=1}^{n^{\sharp S}} T_{ij}\phi_j$. Dabei sei $\{\eta_i\}$,$1 \leq i \leq n^{\sharp S}$, ein fest gewähltes Vertretersystem für $k_S^\times / k_S^{\times\, n} \mathcal{R}_S^\times$, und $\{\phi_i\} := \{\phi_{\eta_i}\}$ bzw. $\{\phi'_j\} := \{\phi'_{\eta_j}\}$ seien die entsprechenden Basen aus Definition 2.8 von $H(\chi_s)$ bzw. von $H(\chi_{-s})$.
Die Matrixelemente $T_{ij} = T_{ij}(r,s)$ erhält man wie folgt :

$$(\tau(e)\,\phi_i)\,((\eta_j,1)) \;= T_{ij} \cdot \widehat{\chi}^{-1}(\eta_j) \cdot \|\eta_j\|^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad T_{ij} = \|\eta_j\|^{1-s} \cdot \sum_{x \in k_S^\times / k_S^{\times\, n}} \frac{\Gamma_n\left(-\frac{r}{x\,\eta_j}, s\right)}{\Gamma_1(1,ns)} \cdot \left\|\frac{x}{\eta_j}\right\| \cdot \epsilon(x,-\eta_j) \cdot \phi_i((x,1))$$

$$\Longrightarrow \quad T_{ij} = G_\infty(s) \cdot \|r\|^{-s} \prod_{v \in S \setminus S_\infty} \frac{|\pi_v|_v^{d_v\left(ns-\frac{1}{2}\right)}}{1-|\pi_v|_v^{1-ns}} \cdot T'_{ij}(r,s)$$

$$\text{mit} \qquad G_\infty(s) = \left(n \cdot (2\pi)^{2s(n-1)} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(ns)} \cdot \frac{\Gamma(-ns)}{\Gamma(-s)}\right)^{\frac{N}{2}} \quad , N = [k:\mathbb{Q}] \qquad \text{und}$$

$$T'_{ij}(r,s) = \|r\|^s \cdot \|\eta_j\|^{-s+1} \cdot \sum_{x \in k_S^\times / k_S^{\times\, n}} \left\|\frac{r}{x \cdot \eta_j}\right\|_\infty^{-s} \cdot \left\|\frac{x}{\eta_j}\right\|_S \cdot \tau(r,s,x) \cdot \phi_i((x,1)) \qquad , \; (7)$$

$$\text{wobei} \qquad \tau(r,s,x) := \prod_{v \in S \setminus S_\infty} (1-|\pi_v|_v^{ns})\,\Gamma_{n,v}\left(\frac{-r}{x \cdot \eta_j}, s\right) \qquad .$$

Für die Umformungen wurde die explizite Form der Γ_n aus Satz 2.5 benutzt.

Die Funktionalgleichung nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\psi(r,s,\eta_i) = G_\infty(s) \cdot \|r\|^{-s} \prod_{v \in S} \frac{1}{1-|\pi_v|_v^{1-ns}} \cdot \prod_{v \in S} |\pi_v|_v^{d_v\left(ns-\frac{1}{2}\right)} \cdot \sum_j T'_{ij}(s) \cdot \psi(r,-s,\eta_j)$$

$$\text{oder} \qquad \Psi(r,s,\eta_i) = n^{\frac{N}{2}} \cdot G_f(s) \cdot \prod_v |\pi_v|_v^{\frac{-d_v}{2}} \cdot \sum_j T'_{ij}(s)\Psi(r,-s,\eta_j)$$

$$\text{mit} \qquad \Psi(r,s,\eta_i) := y_1^{-s} \cdot \left(\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot \psi(r,s,\eta_i)$$

und

$$y_1 := (2\pi)^{\frac{N}{2}(n-1)} \cdot \prod_v |\pi_v|_v^{n \cdot \frac{d_v}{2}} \cdot \|r\|_S^{-\frac{1}{2}} \quad , G_f(s) := \prod_{v \in S \setminus S_\infty} \frac{1}{1 - |\pi_v|_v^{1-ns}}$$

Als Folgerung aus Satz 2.7 ergibt sich

Korollar 3.1

i) $\Psi(r,s,\eta_i)$ *ist in der komplexen Ebene ohne den Punkt* $s = \frac{1}{n}$ *holomorph; an dieser Stelle hat die Funktion höchstens einen einfachen Pol.*

ii) Für $Im(s) \to \infty$ *fällt* Ψ *in senkrechten Streifen endlicher Breite exponentiell ab.*

iii) Im Bereich $Re(s) > \frac{1}{2}$ *hat man folgende Darstellungen als Dirichletreihen*

$$\psi(r,s,\eta_i) = \sum_{m=1}^{\infty} a(m) m^{-s}, \qquad G_f(-s)\psi(r,s,\eta_i) = \sum_{m=1}^{\infty} b(m) m^{-s} \qquad .$$

Für den Beweis von ii) benötigt man zusätzlich zu Satz 2.3 den Satz von Phragmén-Lindelöf.

Es sei $a > \frac{1}{2}, b > 0$ und f sei eine in Streifen $-a \leq \sigma \leq a$ holomorphe Funktion mit der Eigenschaft

$$f(s) \cdot \left(\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma s}\right)^{\frac{N}{2}} = O\left(e^{-b|t|}\right) \qquad . \tag{8}$$

Es gilt mit einem Parameter $x > 0$:

$$V_i := \frac{1}{2\pi i} \int_{\square} \Psi(r,s,\eta_i) f(s) x^{-s} ds \;=\; res_{s=\frac{1}{n}} \Psi(r,s,\eta_i) f\left(\frac{1}{n}\right) x^{-\frac{1}{n}} \qquad ,$$

wenn das Integral über ein Rechteck mit den Ecken $-\sigma - i\,\tau$, $\sigma - i\,\tau$, $\sigma + i\,\tau$, $-\sigma + i\,\tau$, $a > \sigma > \frac{1}{2}, \tau > 0$ läuft. Eigenschaft ii) des Korollars ergibt dann

$$V_i \;=\; V_{1i} - V_{2i} \quad \text{mit}$$

$$V_{1i} := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \Psi(r,s,\eta_i) f(s) x^{-s} ds \quad \text{und} \quad V_{2i} := \frac{1}{2\pi i} \int_{(-\sigma)} \Psi(r,s,\eta_i) f(s) x^{-s} ds$$

Dabei bedeute (σ), daß die Integration über die Gerade $Re\,(s) = \sigma$ ausgeführt wird. Weiter sei

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \left(\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)}\right)^{\frac{N}{2}} f(s) \cdot x^{-s} ds \quad \text{und} \quad F_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \left(\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)}\right)^{\frac{N}{2}} f(-s) \cdot x^{-s} ds \quad .$$

Häufig wird $f \equiv 1$ gewählt. Dann sei $F(x) := F_1(x) = F_2(x)$. Man erhält durch Vertauschen von Integration und Summation

$$\begin{aligned} V_{1i} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma)} y_1^{-s}\left(\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)}\right)^{\frac{N}{2}} f(s)\psi(r,s,\eta_i)x^{-s}ds \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a(m)\cdot F_1(x\,y_1\,m) \qquad . \end{aligned} \tag{9}$$

Die Anwendung der Funktionalgleichung ergibt mit $y_2 := n^{\frac{N}{2}} \cdot \prod_v |\pi_v|_v^{-\frac{d_v}{2}}$:

$$\begin{aligned} V_{2i} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(-\sigma)} y_1^{-s}\cdot\left(\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)}\right)^{\frac{N}{2}} f(s)\psi(r,s,\eta_i)\cdot x^{-s}ds \\ &= y_2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(-\sigma)} G_f(s)\cdot f(s)\cdot x^{-s}\cdot\left(\sum_j T'_{ij}(s)\Psi(r,-s,\eta_j)\right)ds \\ &= y_2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma)} G_f(-s)\cdot f(-s)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{-s}\cdot\left(\sum_j T'_{ij}(-s)\Psi(r,s,\eta_j)\right)ds \\ &= y_2\cdot\sum_j\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma)} T'_{ij}(-s)G_f(-s)\cdot f(-s)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{-s} y_1^{-s}\left(\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)}\right)^{\frac{N}{2}}\psi(r,s,\eta_j)ds \qquad . \end{aligned}$$

Man hat eine Darstellung

$$T_{ij}(-s) = \sum_{w\in\mathbf{Z}^{\sharp(S\setminus S_\infty)}} c_{i,j,w}|\pi|^{ws} \qquad ,|\pi|^{ws} := \prod_{v\in S\setminus S_\infty}|\pi_v|_v^{w_v s} \qquad . \tag{10}$$

Dabei sind nur endlich viele $c_{i,j,w}$ von 0 verschieden. Es ergibt sich

$$V_{2i} = y_2\sum_{m=1}^{\infty}\cdot\sum_{j=1}^{n^{\sharp S}} b(m)\cdot\sum_w c_{i,j,w}F_2\left(x^{-1}\cdot y_1\cdot m\cdot|\pi|^w\right) \qquad . \tag{11}$$

Schließlich erhält man

$$V_i\cdot x^{\frac{1}{n}}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = Res_{s=\frac{1}{n}}\Psi(r,s,\eta_i) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{N}{2}} y_1^{-\frac{1}{n}}\cdot\rho(r,\eta_i) \qquad . \tag{12}$$

3.2 Auswertung

Um die Summationsformel einsetzen zu können, benötigt man Algorithmen für die Berechnung der verschiedenen Bestandteile. Diese sind im wesentlichen die Gaußschen Summen, die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen F_i und die Koeffizienten T'_{ij} in der Funktionalgleichung.
Zunächst muß man die lokalen Hilbertsymbole

$$(\ , \ )_v : \ k_v^\times / k_v^{\times n} \quad \times \quad k_v^\times / k_v^{\times n} \to \mathbb{C}^\times$$

für die endlichen Stellen $v \in S$ bestimmen. Da das Hilbertsymbol eine Bilinearform ist, muß man es nur auf einer Basis von $k_v^\times / k_v^{\times n}$ kennen. Wegen $k_v^\times = \langle \pi_v \rangle \times U_v$ reicht es, eine Basis für U_v / U_v^n zu berechnen. Für

$$m = \left[\frac{v(p)}{p-1} \right] + v(n) + 1$$

gilt $U_v^{(m)} \subset U_v^n$, dabei ist $U_v^{(m)} := 1 + (\pi_v)^m$ die m–te Einseinheitengruppe. Das Problem, für U_v / U_v^n in $U_v / U_v^{(m)}$ ein Vertretersystem zu finden und schließlich eine Basis zu bestimmen, läßt sich mit Hilfe der Beziehungen

$$U_v^{(k)} / U_v^{(k+1)} = \mathcal{O}_v / (\pi_v)$$

leicht lösen.
Wegen des Chinesischen Restsatzes kann man jede Klasse aus $k_v^\times / k_v^{\times n}$ durch ein Element aus $k^\times$ darstellen, das für alle $w \in S \backslash \{v\}$ in $k_w^{\times n}$ liegt. Auf dieser Basis lassen sich schließlich die Werte des lokalen Hilbertsymbols leicht berechnen, indem man die Produktformel für das Hilbertsymbol benutzt.

Die Werte des Legendresymbols $\left(\frac{a}{b}\right)$ kann man mit Hilfe eines Kettenbruchalgorithmus ausrechnen, wenn man das Reziprozitätsgesetz benutzt, das sich aus der Kenntnis der Hilbertsymbole ergibt. Die Ergebnisse für den Fall n = 6 finden sich im nächsten Kapitel.

Zur Berechnung der Gaußschen Summen sind folgende Eigenschaften wichtig, die das Problem auf den Fall $r = 1, \pi$ prim reduzieren:

Satz 3.2 *Für $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_S \backslash \{0\}$ mit ggt $(r_1, r_2 c) = (1)$ gilt*

$$g(r_1 r_2, \epsilon, c) = \epsilon \left(\frac{r_1}{c} \right)_S^{-1} g(r_2, \epsilon, c) \qquad .$$

Es seien $c_1, c_2 \in \mathcal{R}_S \backslash \{0\}$ mit ggt $(c_1, c_2) = (1)$. Dann ist

$$g(r, \epsilon, c_1 c_2) = \epsilon \left(\frac{c_1}{c_2} \right)_S \epsilon \left(\frac{c_2}{c_1}_S \right) g(r, \epsilon, c_1)\, g(r, \epsilon, c_2) \qquad .$$

Schließlich gilt für ein Primelement $\pi \in \mathcal{R}_S$:

$$g(\pi^k, \epsilon, \pi^l) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \textit{für} & k < l-1 \\ \mathcal{N}(\pi)^{l-1}\, g(1, \epsilon^l, \pi) & \textit{für} & k = l-1 \\ \phi(\pi^l) & \textit{für} & k \geq l, \epsilon^l = 1 \\ 0 & \textit{für} & k \geq l, \epsilon^l \neq 1 \end{array} \right\} \quad .$$

<u>Beweis</u>:

siehe [P4].

Um $g(1, \epsilon, \pi)$ zu berechnen, kann man ausnutzen, daß Gaußsche Summen als Residuen Dirichlet'scher L–Reihen auftreten. Mit Hilfe einer ähnlichen Summationsformel wie in Abschnitt 3.1 erreicht man, daß der Aufwand zu ihrer Berechnung nur $O\left(\mathcal{N}(\pi)\, log\, \mathcal{N}(\pi)\right)$ beträgt. Nach Eisenstein und Weil ist nämlich die n–te Potenz der Gaußschen Summe bekannt (siehe z.B. [P5]); daher muß die Approximation lediglich ausreichen, um n–te Einheitswurzeln voneinander zu trennen. Eine detaillierte Beschreibung der Methode findet man in [E2].

Bei den Funktionen F_1, F_2 handelt es sich um verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen. Für ihre Auswertung bieten sich zwei verschiedene Methoden an: Die direkte Auswertung des Integrals mittels einer Trapezformel und die Entwicklung der Funktion in eine Potenzreihe und anschließende Auswertung der Reihe. In [E1], [E2] werden Funktionen von ähnlichem Typ behandelt. Beide Methoden sind mit nicht unerheblichem Rechenaufwand verbunden, daher bietet es sich in jedem Falle an, nur eine Wertetabelle für die Funktion aufzustellen und dann zu interpolieren. Dies liefert sehr gute Ergebnisse, da die Funktion selbst und alle ihre Ableitungen exponentiell abfallen (siehe dazu [W]).

Für die Koeffizienten T'_{ij} schließlich erhält man nach Umformung aus (7) die Form

$$T'_{ij}(r,s) = \left\| \frac{r}{\eta_i \eta_j} \right\|_{S_f}^{s} \cdot \epsilon(\eta_i, -\eta_j) \cdot \frac{1}{(k_S^\times : {k_S^\times}^n)} \cdot \prod_v (1 - |\pi_v|_v^{ns}) \quad \cdot$$

$$\cdot \sum_{h \in \mathcal{R}_S^\times / {\mathcal{R}_S^\times}^n} \epsilon\left(h, \frac{-\eta_j}{\eta_i}\right) \cdot \prod_{v \in S \setminus S_\infty} \sum_{y \in k_v^\times / {k_v^\times}^n} \epsilon\left(\frac{-r_v}{h \cdot \eta_i \eta_j}, y\right) \cdot \Gamma_{1,v}(e, |\ |_v^s \cdot \epsilon(y, \cdot)) \qquad . \ (13)$$

$\|\ \|_{S_f}$ soll das Produkt über die lokalen Beträge an den endlichen Stellen sein. Bei entsprechender Wahl der $\{\eta_i\}$ und von r verschwindet daher der erste Faktor. Die Indizes i, j laufen hier von 1 bis $n^{\sharp S}$, sodaß die $\{\eta_i\}$ bzw. $\{\eta_j\}$ ein vollständiges Vertretersystem für $k_S^\times / {k_S^\times}^n \mathcal{R}_S^\times$ bilden. Mit Hilfe dieser Darstellung lassen sich die komplexen Zahlen $c_{i,j,w}$ aus (10) berechnen.

3.3 Abschätzungen

Für den praktischen Einsatz der Formel (12) sind Abschätzungen für die Summe

$$V_i(L) := \sum_{m=L}^{\infty} \left[a(r,\eta_i,m)F_1(xy_1m) - \sum_{j=1}^{n^{\sharp S}} b(r,\eta_i,m) \sum_{w} c_{i,j,w}\, F_2\left(\frac{1}{x}y_1|\pi|^w m\right)\right]$$

wünschenswert. Die Theorie der Mellintransformation ergibt für die Funktionen F_1, F_2 explizite Abschätzungen, die das exponentielle Fallen beschreiben. Der Betrag der Koeffizienten $a(r,\eta_i,m)$ bzw. $b(r,\eta_i,m)$ ist von der Größenordnung $O(m^\delta)$,$\delta > 0$. Insgesamt erhält man für $f \equiv 1$ Summen der Form

$$\sum_{m=L}^{\infty} m^{c_1} exp\left(-M(xc_2m)^{\frac{1}{M}}\right) \qquad , M = \frac{N}{2}(n-1) \quad \text{und} \quad c_1 > 0, c_2 > 0 \qquad .$$

Diese werden durch das entsprechende Integral abgeschätzt, das sich als Wert der unvollständigen Gammafunktion ermitteln läßt. Es ergibt sich:

$$|V_i(r,L)| = O\left(\|r\|_S^{C_3} exp\left(-C_4\left(\frac{L}{\sqrt{\|r\|_S}}\right)^{\frac{1}{M}}\right)\right) \tag{14}$$

mit positiven Konstanten C_3, C_4. Auch die in dem O–Ausdruck enthaltene Konstante kann explizit angegeben werden. Für die genauen Rechnungen sei auf [EP], [E1] und [W] verwiesen.

4 Der Fall n = 6

4.1 Vorbereitungen

Im folgenden soll der Körper der sechsten Einheitswurzeln

$$k = \mathbb{Q}(\zeta_6) = \mathbb{Q}\left(exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)\right) = \mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$$

behandelt werden. Es sei immer $\zeta_n := exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ und $\zeta = \zeta_6$. Der Ring der ganzen Zahlen von k ist $\mathcal{R} = \mathbb{Z}(\zeta)$. Es seien v_∞ die unendliche Stelle und v_2 bzw. v_3 die Stellen über 2 und 3, v_3 ist die einzige verzweigte Stelle. Es sei $S = \{v_\infty, v_2, v_3\}$ gewählt. Dieses ist die kleinste Menge, die die Anforderungen aus Kapitel 1 erfüllt. Die Primelemente seien $\omega = \pi_2 = 2$ für v_2 und $\pi = \pi_3 = \sqrt{-3} = 2\zeta - 1$ für v_3. Die lokale Differente $\mathcal{D}_{v_3}$ ist gleich der globalen Differente $\mathcal{D}$ und es gilt $\mathcal{D} = (\pi_3)$. Die Gruppe $\mathcal{R}_S^\times$ der S–Einheiten wird erzeugt von π, ω und ζ. Die im ersten Teil von 3.2 beschriebenen Rechnungen liefern folgende Ergebnisse:

Im Fall v_3 ist $U_v^\times / U_v^{\times 6} \cong U_v / U_v^{(4)}$. Es ist $[k_v^\times / k_v^{\times 6}] = 6^2 3^2 = 324$, und man hat

$$\begin{array}{rcccccccc} k_{v_3}^\times / k_{v_3}^{\times 6} & = & \langle \pi \cdot k_{v_3}^{\times 6} \rangle & \times & \langle (1+\pi)^2 \cdot k_{v_3}^{\times 6} \rangle & \times & \langle 2 \cdot k_{v_3}^{\times 6} \rangle & \times & \langle (1+\pi^3) \cdot k_{v_3}^{\times 6} \rangle \\ & = & \langle \alpha_1 \rangle & \times & \langle \alpha_2 \rangle & \times & \langle \alpha_3 \rangle & \times & \langle \alpha_4 \rangle \\ & \cong & \mathbb{Z}_6 & \times & \mathbb{Z}_3 & \times & \mathbb{Z}_6 & \times & \mathbb{Z}_3 \end{array}$$

Dabei haben also $\alpha_1 := \overline{\pi}$ und $\alpha_3 := \overline{2} = \overline{\omega} = \overline{(1+\pi^2)(2+\pi^2)}$ die Ordnung 6 und $\alpha_2 := \overline{(1+\pi)^2} = \overline{4\zeta - 4}$ und $\alpha_4 := \overline{(1+\pi^3)} = \overline{4 - 6\zeta}$ die Ordnung 3. Für ganze Zahlen $a \in r$, mit $|a|_{v_3} = 1$, die man mittels der natürlichen Einbettung als Elemente in $k_{v_3}^\times$ betrachten kann, bedeutet Rechnen modulo $k_{v_3}^{\times 6}$ (multiplikativ), daß man additiv modulo $\pi^4 = 9$ rechnet.

Die Exponenten der aus den Basiselementen gebildeten Hilbertsymbole setzen sich zur folgenden Matrix $A = (a_{ij})$ zusammen mit $(\alpha_i, \alpha_j)_v = \zeta^{a_{ij}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Für v_2 ist $U_v^\times / U_v^{\times 6} \cong (U_v / U_v^{(3)}) / \langle 5 \rangle$. Es ist $[k_v^\times / k_v^{\times 6}] = 6^2 2^2 = 144$, und es gilt

$$
\begin{array}{rcccccccc}
k_{v_2}^\times / k_{v_2}^{\times\,6} & = & \langle \omega \cdot k_{v_2}^{\times\,6} \rangle & \times & \langle (3+2\zeta) \cdot k_{v_2}^{\times\,6} \rangle & \times & \langle (5+3\zeta) \cdot k_{v_2}^{\times\,6} \rangle & \times & \langle (1+2\zeta) \cdot k_{v_2}^{\times\,6} \rangle \\
 & = & \langle \beta_1 \rangle & \times & \langle \beta_2 \rangle & \times & \langle \beta_3 \rangle & \times & \langle \beta_4 \rangle \\
 & \cong & \mathbb{Z}_6 & \times & \mathbb{Z}_2 & \times & \mathbb{Z}_6 & \times & \mathbb{Z}_2
\end{array}
$$

In diesem Fall muß man in $U_v^\times / U_v^{\times\,6}$ additiv modulo $8 = \omega^3$ und multiplikativ modulo 5 rechnen. Die ganzen Zahlen $1, 5, 9, 13, -7, -3$, usw. stellen also alle das neutrale Element $e = \beta_1^0 \cdot \beta_2^0 \cdot \beta_3^0 \cdot \beta_4^0 \in k_{v_2}^\times / k_{v_2}^{\times\,6}$ dar.
Die Matrix $B = (b_{ij})$ mit den Einträgen $(\beta_i, \beta_j)_v = \zeta^{b_{ij}}$ gibt den Wert der Hilbertsymbole an:

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}
$$

Die Darstellung $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4)$ für Elemente aus $k_S^\times / k_S^{\times\,6}$ soll bedeuten, daß $\xi = \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \alpha_3^{a_3} \alpha_4^{a_4} \cdot \beta_1^{b_1} \beta_2^{b_2} \beta_3^{b_3} \beta_4^{b_4}$, wobei natürlich $\alpha_i = (\alpha_i, 1, 1)$ als Element aus $k_S^\times = k_{v_3}^\times \times k_{v_2}^\times \times k_\infty^\times$ betrachtet wird.
Für die Erzeuger der Einheitengruppe gilt (via der natürlichen Einbettung):

$$
\begin{array}{rcl}
\pi & = & (1,0,0,0 \;\; ; \;\; 0,1,0,0) \\
\omega & = & (0,0,1,0 \;\; ; \;\; 1,0,0,0) \\
\zeta & = & (0,2,5,0 \;\; ; \;\; 0,0,5,0)
\end{array} \quad .
$$

Deshalb ist $\{\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ die Basis eines Vertretersystems für $k_S^\times / k_S^{\times\,6} \mathcal{R}_S^\times$. Es ergibt sich das Reziprozitätsgesetz:

Satz 4.1 *Es sei* $\gamma = (0, a_2, 0, a_4, 0; b_2, b_3, b_4)$ *und* $\delta = (0, a_2', 0, a_4'; 0, b_2', b_3', b_4')$. *Dann gilt*

$$
\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)_S = \zeta^{a_2+b_2+b_4} \qquad \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)_S = \zeta^{2a_2+b_2+4b_3} \qquad \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)_S = \zeta^{2a_4+b_2+3b_3}
$$

und

$$
(\gamma, \delta)_S = (-1)^{b_2 b_2' + det\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ b_2' & b_3' \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} b_3 & b_4 \\ b_3' & b_4' \end{pmatrix}} \qquad mit \quad \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_S = (\gamma, \delta)_S \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)_S \quad .
$$

Im folgenden werden zwei weitere Vertretersysteme von $k_S^\times / k_S^{\times 6} \mathcal{R}_S^\times$ von Interesse sein :

$$\mathcal{V}_1 := \{\eta \in k_S^\times / k_S^{\times 6} \mid a_1 = b_1 = a_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 \equiv 0 \; mod \; 2\} \qquad \text{und}$$

$$\mathcal{V}_2 := \left\{ \eta \in k_S^\times / k_S^{\times 6} \mid a_1 = b_1 = a_2 = 0 \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{ll} b_3 \equiv 0 \; mod \; 2 & \text{für } \; b_2 = 0 \\ b_3 \equiv 1 \; mod \; 2 & \text{für } \; b_2 = 1 \end{array} \right\} \right\} \qquad .$$

Für $\xi \in k_S^\times / k_S^{\times 6}$ mit $a_1 = 0$ und $b_1 = 0$ sei

$$M_\xi := \left\{ x \in \mathcal{R} \backslash \{0\} \mid x \equiv \xi \; mod \; k_S^{\times 6} \right\} \qquad ,$$

wobei wieder die Einbettung $\mathcal{R}\backslash\{0\} \hookrightarrow \mathcal{R}_S\backslash\{0\} \hookrightarrow k_S^\times$ benutzt wird. Sind $a, b \in M_\xi$, so gelten die additiven Kongruenzen

$$a \equiv b \; mod \; 9 \qquad \text{und}$$

$$a \equiv b \; mod \; 8 \qquad \text{oder} \qquad a \equiv 5b \; mod \; 8 \qquad .$$

Die speziellen Vertretersysteme $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ lassen sich daher auch anders charakterisieren:

$$\bigcup_{\eta \in \mathcal{V}_1} M_\eta = \{x \in \mathcal{R} \mid x \equiv 1 \; mod \; 3\} \qquad \text{und}$$

$$\bigcup_{\eta \in \mathcal{V}_2} M_\eta = \{x \in \mathcal{R} \mid x \equiv \pm 1 \; mod \; 3 \text{ und } x \equiv y \; mod \; 4\}$$

$$\text{mit} \quad y \in \{(2,1)\,,\,(3,1)\,,\,(1,2)\,,\,(0,3)\,,\,(1,1)\,,\,(1,0)\}$$

$$\text{oder} \bigcup_{\eta \in \mathcal{V}_2} M_\eta = \{x \in \mathcal{R} \mid x \equiv z \; mod \; 12\}$$

$$\text{mit} \quad z \in \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,0) & (5,0) & (4,3) & (8,3) & (1,6) & (5,6) \\ (1,9) & (2,9) & (5,9) & (7,9) & (10,9) & (11,9) \end{array} \right\} \qquad .$$

Dabei gelte wieder $(a, b) := a + b\zeta$.

Da $\mathcal{V}_1$ eindeutig durch die Mengen $\mathcal{M}_\eta, \eta \in \mathcal{V}_1$ gegeben ist, läßt sich die komplexe Konjugation von $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{V}_1$ fortsetzen. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \overline{(0,0,1,0\;;\;0,0,0,0)} & = & (0,0,1,0\;;\;0,0,0,0) \\ \overline{(0,0,0,1\;;\;0,0,0,0)} & = & (0,0,0,2\;;\;0,0,0,0) \\ \overline{(0,0,0,0\;;\;0,1,0,0)} & = & (0,0,0,0\;;\;0,1,3,0) \\ \overline{(0,0,0,0\;;\;0,0,1,0)} & = & (0,0,0,0\;;\;0,0,5,0) \\ \overline{(0,0,0,0\;;\;0,0,0,1)} & = & (0,0,0,0\;;\;0,0,3,1) \end{array}$$

Man hat also für alle $\eta \in \mathcal{V}_1 : \eta \cdot \overline{\eta} = (0,0,a_3,0\;;\;0,0,b_3,0)$, wobei $a_3 = 0,2,4$ und $b_3 = 0,3$. Es ergibt sich folgende Eigenschaft der $\rho_6(r,\eta)$:

Lemma 4.2 *Es gilt für $\eta \in \mathcal{V}_1, r \in \mathcal{R}$ mit $r \equiv 1 \, mod \, 3$*

$$\overline{\rho_6(\overline{r}, \eta)} = (-1)^n \cdot \rho_6(r, \overline{\eta}) \qquad ,$$

wobei $n = 1$, wenn bei $\eta \cdot \overline{\eta}$ $b_3 = 3$ gilt, und $n = 0$ sonst.

Beweis:
Aus der Gestalt der Hilbertsymbole folgt

$$\Gamma_{6,v}(re_0, \epsilon(x, \cdot)) = \Gamma_{6,v}(re_0, \epsilon(\overline{x}, \cdot))$$

für die endlichen Stellen v_3 und v_2. Einsetzen in die Darstellung (13) der T'_{ij} ergibt das entsprechende Verhalten der Summen (9),(11) und damit die Behauptung. □

4.2 Konkrete Berechnungen

4.2.1 Die Funktion F

Die Funktion $f(s) = \frac{1}{\Gamma(1+s)}$ erfüllt die Voraussetzung (8). Mit dieser Wahl erhält man, da $n = 6, N = 2$:

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\Gamma(6s)}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1+s)} \cdot x^{-s} ds \quad \text{und} \quad F_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\Gamma(6s)}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s)} \cdot x^{-s} ds$$

Anwendung des Residuensatzes ergibt die Entwicklung

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{N} Res_{s=-\frac{k}{6}} \left(\frac{\Gamma(6s)}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1+s)} \cdot x^{-s} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\left(-\frac{N+\frac{1}{2}}{6}\right)} \frac{\Gamma(6s)}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1+s)} \cdot x^{-s} ds \qquad .$$

Für $N \to \infty$ verschwindet das Restglied wegen der Eigenschaften der Gammafunktion. Man erhält also

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{(\sigma)} \frac{\Gamma(6s)}{\Gamma(s)\, \Gamma(1+s)} \, x^{-s} \, ds = \sum_{6|j,\, j>0} \frac{-1}{j \cdot j!} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-j}{6}\right)^2} \cdot \left(-x^{\frac{1}{6}}\right)^j$$

$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{-z^k}{\Gamma\left(\frac{-k}{6}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot k!} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{z^6}{6^2}\right)^i \cdot \frac{\prod_{l=1}^{i-1} (k+6l)^2}{(k+6i-1)!} \right) \qquad \text{mit} \quad z = -x^{\frac{1}{6}}$$

Nach [Mar],S.160 Formel 8(4) gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{(\sigma)} \frac{\Gamma(6s)}{\Gamma(s)\, \Gamma(1-s)} \, x^{-s} \, ds = \frac{1}{6\pi} \, exp \left(-\sqrt{3} \cdot \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2} \right) \right) \cdot sin \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2} \right)$$

Dies kann man auch sofort durch Vergleich der Potenzreihenentwicklungen sehen. Diese einfache Form von F_2 ist günstig, da diese Funktion bei der Summation nach (11) besonders oft ausgewertet werden muß.
Bei der Auswertung der F_1 darstellenden Potenzreihe bereitet die große Auslöschung Probleme. Daher ist es sinnvoll, eine Wertetabelle anzulegen und dann zu interpolieren. Mit Hilfe des Systems REDUCE wurde die Reihe mit einer Genauigkeit von 500 Dezimalstellen ausgewertet. Dies reichte aus, um die Funktionswerte auf 25 Dezimalstellen zu berechnen. Für die Interpolation wurde die Methode der Tschebyscheffpolynome angewendet. Eine gute Beschreibung dieses Algorithmus findet man z.B. in [PFTV].

4.2.2 Gaußsche Summen

Wegen Satz 3.2 reicht es aus, die Summen $g(1, \epsilon^l, \pi)$ zu berechnen. Für träge Primzahlen $p \equiv 2\, mod\, 3$ kann man die $g(1, \epsilon, p)$ direkt ausrechnen und erhält

$$g(1, \epsilon, p) = p \cdot \epsilon \left(\frac{1 - 2\zeta}{p} \right)_S = \left\{ \begin{array}{cc} p & p \equiv 3\ mod\ 4 \\ -p & p \equiv 1\ mod\ 4 \end{array} \right\}$$

Für die anderen π mit $p = \mathcal{N}(\pi), p$ Primzahl, berechnet man

$$g(1, \epsilon, \pi) = \epsilon \left(\frac{-\overline{\pi}}{\pi} \right)^{-1} \cdot g_6(\pi) \quad \text{mit} \quad g_6(\pi) = \sum_{x\, mod^\times\, p} \epsilon \left(\frac{x}{\pi} \right) \cdot exp \left(2\pi i \frac{x}{p} \right) \qquad .$$

Der Satz von Eisenstein und Weil besagt in diesem Fall, daß

$$g_6(\pi)^3 = \pi^2 \cdot \sqrt{p} \cdot \left\{ \begin{array}{cc} 1 & p \equiv 1\ mod\ 4 \\ -i & p \equiv 3\ mod\ 4 \end{array} \right\} \qquad , \tag{15}$$

wenn $\pi \equiv -1\ mod\ 3$ normiert ist. Die Summen $g_6(\pi)$ lassen sich daher mit der in 3.2 angesprochenen Methode bestimmen. Es ist

$$\begin{array}{rcl} g(1, \epsilon^5, \pi) & = & \overline{g(1, \epsilon, \pi)} \cdot \epsilon \left(\dfrac{-1}{\pi} \right) \\ g(1, \epsilon^4, \pi) & = & \overline{g(1, \epsilon^2, \pi)} \cdot \epsilon \left(\dfrac{-1}{\pi} \right) \\ g(1, \epsilon^2, \pi) & = & g_3(1, \epsilon, \pi) \\ g(1, \epsilon^3, \pi) & = & g_2(1, \epsilon, \pi) \end{array}$$

Die quadratische Gaußsche Summe ist bekannt. Schließlich gilt für die kubische Summe $g_3(\pi) := \sum_{x\, mod^\times\, p} \epsilon^2 \left(\frac{x}{\pi} \right) exp \left(2\pi i \frac{x}{p} \right)$:

$$g_3(\pi)^3 = \mathcal{N}(\pi) \cdot \pi, \qquad \text{wenn} \qquad \pi \equiv -1\, mod\, 3 \qquad .$$

4.2.3 Koeffizienten der Funktionalgleichung

In der Darstellung (13) der Koeffizienten T'_{ij} sind die lokalen Gammafunktionen $\Gamma_{1,v}$ für die endlichen Bewertungen v_2, v_3 wichtigster Bestandteil. Die Wurzelzahlen $W(\chi)$ aus Satz 2.5 sind 36–te Einheitswurzeln für v_3 und 12–te Einheitswurzeln für v_2. Aus diesem Grund haben die T'_{ij} eine spezielle Form:

$$T'_{ij}(r,s) = 6 \cdot \sum_{w_1=-4}^{5} \sum_{w_2=-5}^{3} \left(\frac{1}{3^s}\right)^{w_1} \cdot \left(\frac{1}{4^s}\right)^{w_2} c_{i,j,w_1,w_2}$$

$$\text{mit} \qquad c_{i,j,w_1 w_2} := \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{5} \cdot \sqrt{3}^{k_1} \cdot \zeta_{36}^{k_2} \cdot a_{k_1,k_2}$$

Dabei sind die a_{k_1,k_2} Elemente aus dem Ring $\mathcal{R}$ und modulo Einheiten treten nur die Werte

$$\begin{array}{cccccccccc} (1,1), & (2,0), & (3,0), & (2,2), & (4,0), & (1,4), & (4,1), & (3,3), & (2,4), & (4,2) \\ (6,0), & (4,4), & (3,6), & (6,3), & (8,0), & (9,0), & (6,6), & (12,0), & (9,9), & (18,0) \\ (24,0), & (27,0), & (36,0) & & & & & & & \end{array}$$

auf, wobei (a,b) immer $a+b\zeta$ bedeuten soll. Es ist sinnvoll, die Koeffizienten im voraus zu berechnen, damit der nicht unerhebliche Rechenaufwand zu ihrer Bestimmung nicht in die eigentliche Summation eingeht. Von dem Faktor $\epsilon(\eta_i, -\eta_j)$ abgesehen, hängen die T'_{ij} nur von η_i^2 und $\eta_i\eta_j$ ab, so daß nur $27 \cdot 216$ Werte benötigt werden. Wegen ihrer speziellen Form kann man die T'_{ij} recht kompakt speichern. Allerdings entsteht dann ein gewisser Rechenaufwand, um sie in komplexe Zahlen umzuwandeln. Es hat sich herausgestellt, daß es günstiger ist, sie direkt als komplexe Zahlen darzustellen.

4.2.4 Summation

Vor der eigentlichen Summation sollten neben den T'_{ij} auch alle benötigten Gaußschen Summen $g(1,\epsilon,\pi), \mathcal{N}(\pi) = p$ berechnet werden, da trotz der günstigen Methode aus 3.2 der Aufwand recht hoch ist. Nach (15) sind sie durch Angabe einer dritten Einheitswurzel eindeutig bestimmt. Die Ergebnisse können daher sehr gut gespeichert werden.

Um den Rechenaufwand bei der Summation (siehe (9),(11)) möglichst gering zu halten, ist es sinnvoll, die Hauptschleife über alle Primzahlen $p < L$ laufen zu lassen, wenn L wieder die obere Grenze ist; das entspricht der Eulerproduktentwicklung einer Dirichletreihe und wird in unserem Fall durch das multiplikative Verhalten der Gaußschen Summen unterstützt. So werden aufwendige Primfaktorzerlegungen vermieden. Weiterhin ist darauf zu achten, daß die Funktionen F_1, F_2 möglichst selten ausgewertet werden müssen. Wenn man die Koeffizienten $l_1(k)$ und $l_2(k)$ der Dirichletreihen $L_1(s) := L_S(\| \|_S^{6s+1})$ bzw. $L_2(s) := G_f(-s) \cdot L_S(\| \|_S^{6s+1}) = \zeta_k(6s+1)$ getrennt berechnet, so kann man etwa folgendermaßen vorgehen:

Für jede Primzahl $p \in \mathbb{Z},\ p < L$:

  Für jedes $\pi \in \mathcal{R}$ mit $\mathcal{N}(\pi) = p$ oder $\mathcal{N}(\pi) = p^2$:

    Berechne $g(r, \epsilon, \pi)$.

    Für jedes schon behandelte $a \in \mathcal{R}$ mit $\mathcal{N}(\pi a) < L$:

      Bestimme $g(r, \epsilon, a \cdot \pi)$ nach Satz 3.2 .

      Wenn $\mathcal{N}(a\pi) < \sqrt{L}$,

        speichere $a\pi$ und $g(r, \epsilon, a \cdot \pi)$.

      Bestimme j so, daß $a\pi = \eta_j$ als Element von $k_S^\times / {k_S^\times}^6 \mathcal{R}_S^\times$.

      Für $w \in \mathbb{Z}^2$ mit $c_{i,j,w} \neq 0$:

        Für alle k mit $l_2(k) \neq 0$, bis der Summand klein ist:

          Summiere $F_2(x^{-1} y_1 \mathcal{N}(\pi a) |\pi|^w k) \cdot l_2(k)$.

        Diese Summe sei f_2 .

        Für $i = 1$ bis 216 :

          $V_2(i) = V_2(i) + c_{i,j,w} \cdot f_2 \cdot \frac{g(r,\epsilon,a \cdot \pi)}{\mathcal{N}(\pi a)}$.

      Für alle k mit $l_1(k) \neq 0$, bis der Summand klein ist:

        Summiere $F_1(x y_1 \mathcal{N}(\pi a)) \cdot l_1(k)$.

      Diese Summe sei f_1 .

      $V_1(j) = V_1(j) + f_1 \cdot \frac{g(r,\epsilon,a \cdot \pi)}{\mathcal{N}(\pi a)}$.

Die Wahl des Parameters x in der Summationsformel beeinflußt die Konvergenz. Er sollte so gewählt werden, daß das Konvergenzverhalten der Summen V_1 und V_2 möglichst gleich ist. Der Wert $x = \frac{1}{300}$ hat sich als günstig erwiesen.

Die Rechnungen wurden auf einer DEC Workstation vom Typ 3000/600(ALPHA) mit 320 MB Hauptspeicher durchgeführt. Bei einer oberen Grenze von $L = 5 \cdot 10^7$ wurden für die Bestimmung der $\rho(r, \eta)$ für ein r zwischen 20 und 35 Stunden CPU–Zeit benötigt. Für die Berechnung der Gaußschen Summen $g_6(1, \pi)$ für alle π mit $\mathcal{N}(\pi) < 5 \cdot 10^7$ waren ca. 120 Stunden CPU–Zeit notwendig.

Die $\rho(r, \eta)$ wurden für alle $r \in \mathcal{R}, r \equiv 1\, mod\, 3$ mit $\mathcal{N}(r) < 110$ bestimmt und für einige weitere interessant erscheinende, insbesondere alle $r = r_1^2, \mathcal{N}(r_1) \leq 37$. Von zwei konjugierten Werten wurde dabei wegen der Beziehung 4.2 nur jeweils einer gewählt. Bei den Rechnungen war stets $\eta \in \mathcal{V}_1$.

5 Ergebnisse

5.1 Die Koeffizienten $\rho_6(r,\eta)$

Für die Darstellung des eigentlichen Ergebnisses hat sich das Vertretersystem $\mathcal{V}_2$ als günstiger erwiesen. Die Umrechnung bereitet wegen (2) keine Schwierigkeiten. Es sollen für einen Charakter χ von $k_S^\times / {k_S^\times}^6 \mathcal{R}_S^\times$ die Fouriertransformierten

$$\hat{\rho}(r,\chi) := \sum_{\eta \in \mathcal{V}_2} \chi(\eta)\rho(r,\eta)$$

betrachtet werden. Man erhält daraus die $\rho(r,\eta)$ durch

$$\rho(r,\eta) = \frac{1}{216} \sum_{\chi \in \widehat{\left(k_S^\times / {k_S^\times}^6 \mathcal{R}_S^\times\right)}} \chi(\eta)^{-1}\hat{\rho}(r,\chi)$$

zurück. Die Charaktere $\chi_\pi = \epsilon(\pi,\cdot), \chi_\omega = \epsilon(\omega,\cdot), \chi_\zeta = \epsilon(\zeta,\cdot)$ bilden eine Basis von $\widehat{\left(k_S^\times / {k_S^\times}^6 \mathcal{R}_S^\times\right)}$. Aufgrund der erhaltenen Werte läßt sich folgende Vermutung aufstellen:

Vermutung 5.1 *Es sei $\eta \in \mathcal{V}_2$ und $\hat{\rho}(r,\chi)$ sei definiert wie oben. Dann gilt für $\chi = \chi_\pi^{a_1}\chi_\omega^{a_2}\chi_\zeta^{a_3}$ mit $0 \leq a_i \leq 5$*

$$\hat{\rho}(r,\chi) = n(\chi) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)(2\pi)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot$$

$$\cdot \frac{\overline{r}^{\frac{1}{6}}}{\|r\|^{\frac{1}{6}}} \underbrace{3^{\frac{1}{12}t_1(a_1)} \cdot 2^{\frac{1}{6}(a_2-6)}}_{A(r,\chi)} \cdot \underbrace{\zeta_{12}^{k(r,\chi)}\,\zeta_{72}^{3t_2(a_1)+2a_3}\zeta_6^{p(\chi,r)}}_{Z(r,\chi)} \cdot R(r,\chi) \qquad .$$

- Es ist $R(r,\chi) = {\pi_3'}^{k_1}\pi_2^{k_2}\pi_7^{k_3}\overline{\pi_7}^{k_4}\pi_{13}^{k_5}\overline{\pi_{13}}^{k_6}$. Dabei ist ist $\pi_3' = 1+\zeta$ normiert; in diesem Fall gilt $\frac{\pi_3'}{|\pi_3'|} = \zeta_{12}$. Es ist $\pi_2 = 2$, $\pi_7 = 1-3\zeta$, $\pi_{13} = 1+3\zeta$.

  Die k_i sind ganze Zahlen mit $-1 \leq k_i \leq 2$ für $i = 1,2$ und $k_i = 0$ oder 1 für $3 \leq i \leq 6$.

- $n(\chi)$ ist 0 oder 1. Insbesondere verschwindet $\hat{\rho}(r,\chi)$ für $a_1 = 2$, für $a_2 = 1$ und für $a_1 = 3, a_3 = 1,2,4,5$ stets, unabhängig von r.

- Bei dem Faktor $\overline{r}^{\frac{1}{6}}$ sei die Wurzel mit Hilfe des Hauptzweigs des Logarithmus gewählt, also $-\frac{\pi}{6} < arg\left(\overline{r}^{\frac{1}{6}}\right) \leq \frac{\pi}{6}$. r ist immer $\equiv 1\, mod\, 3$ normiert. Das Argument von $\overline{r}^{\frac{1}{6}}$ ist für quadratfreie r nach 4.2.2 bis auf zwölfte Einheitswurzeln das der Wurzel aus einer Gaußschen Summe dritter Ordnung $g(1, \epsilon^2, \overline{r})$. Ist $r = r_0 \cdot r_1^2$, so gilt bis auf zwölfte Einheitswurzeln $arg\left(\overline{r}^{\frac{1}{6}}\right) = arg\left(\sqrt{g(1, \epsilon^2, \overline{r_0})} \cdot g(1, \epsilon^2, \overline{r_1})\right)$.

- Es gilt $t_1(a_1) = a_1 + 9$ für $0 \leq a_1 \leq 3$ und $t_1(a_1) = a_1 + 3$ sonst.

- Es ist $t_2(a_1) = 1$ für $a_1 \equiv 1\ mod\ 2$ und $t_2(a_1) = 0$ sonst.

- $k(r, \chi) = \left\{ \begin{array}{lllll} 1 & \text{für} & a_1 = 0 & \text{und} & a_3 = 0, 1, 2 \\ & \text{und für} & a_1 = 1 & \text{und} & a_3 = 0, 1 \\ -1 & \text{für} & a_1 = 0 & \text{und} & 3 \leq a_3 \leq 5 \\ & \text{und für} & a_1 = 1 & \text{und} & 2 \leq a_3 \leq 5 \\ -2 & \text{für} & a_1 = 3, 5 & \text{und} & a_3 = 5 \\ 0 & \text{sonst} & & & \end{array} \right\}$

- Die Exponenten $p(\chi, r)$ sind ganze Zahlen mit $0 \leq p(\chi, r) \leq 5$. Sie sind für die behandelten r in den Tabellen in 5.4 angegeben.

5.2 Genauigkeit der ermittelten Daten

Die in 3.3 angegebene Abschätzung liefert in unserem Fall auch für $r = 1$ nur eine relative Genauigkeit der ermittelten Werte von 3 Stellen. Tatsächlich scheint sie aber deutlich höher zu liegen (in Abhängigkeit von r zwischen 5 und 10 Dezimalstellen). Im wesentlichen ist das darauf zurückzuführen, daß die Argumente der Summanden offenbar gleichmäßig verteilt sind; weil ein wesentlicher Bestandteil der Summanden Gaußsche Summen sind, ist dies nicht überraschend (siehe [P4]). In der Abschätzung kommt dieses Verhalten natürlich nicht zur Geltung, da die Beträge summiert werden. Zur Kontrolle der ermittelten Daten sind folgende Punkte wichtig:

- Das Verfahren wurde im Fall $n = 3$ überprüft, wo man nach [P1] eine explizite Beschreibung der $\rho_3(r, \eta)$ zur Verfügung hat. Die ermittelten Werte stimmten im Rahmen der Rechengenauigkeit mit den zu erwartenden überein.

- Die Rechnungen sind sehr sensibel gegenüber Störungen. Wie beschrieben gehen viele verschiedene Elemente in die Summation ein. Die Unabhängigkeit des Wertes V_i von dem Parameter x ist daher ein sicheres Mittel zur Überprüfung der tatsächlichen Genauigkeit. Variation von x im Bereich $\frac{1}{500} < x < \frac{1}{120}$ für einige r ergab, daß die Schwankungen der Werte etwa im Bereich der Abweichungen zwischen den vermuteten und den berechneten Werten der $\hat{\rho}(r, \chi)$ lagen.

– Die Daten wurden zunächst mit geringerer Genauigkeit ermittelt; auf dieser Grundlage wurde die Vermutung aufgestellt. Bei späterer Überprüfung mit größerer Genauigkeit konnten die Ergebnisse bestätigt werden.

– Die von den $\rho_6(r,\eta)$ erfüllte Formel (5) folgt nicht direkt aus den Eigenschaften der Funktion $\psi(r,\eta)$. Daher bietet sie eine weitere gute Möglichkeit zur Kontrolle der Werte. Für $r_0 = 1, \pi = 1-3\zeta, j = 4$ und für $r_0 = 1, \pi = 1-3\zeta, j = 3$ konnte sie im Rahmen der allgemeinen Genauigkeit bestätigt werden.

– Schließlich deutet die geschlossene Form für die $\hat{\rho}(r,\chi)$, die nicht unbedingt zu erwarten war und sich erst allmählich aus einer großen Datenmenge ergab, auf die Richtigkeit der Vermutung 5.1 hin.

5.3 Analyse und Ausblick

Bei den auftretenden Werten der $p(\chi,r)$ konnte keine Regelmäßigkeit festgestellt werden, insbesondere keinerlei Beziehung zu den Charakterwerten $\chi(r)$. Die oben angegebenen Normierungen der π_i und von r und die Wahl der Wurzel in $\overline{r}^{\frac{1}{6}}$ sind natürlich willkürlich. Mit dieser Wahl konnte aber zumindest bis auf sechste Einheitswurzeln eine geschlossene Form der $\hat{\rho}(r,\chi)$ angegeben werden.
Die Beziehung aus 4.2 setzt sich auf die $\hat{\rho}(r,\chi)$ fort. Dies bedeutet für $r \in \mathbb{Z}$ einen Zusammenhang zwischen den $p(\chi,r)$. Es gilt

$$p(a_1,a_2,a_3) + p(a_1,a_2,q(a_3)) + \frac{1}{2}\cdot(k_1(a_1,a_2,a_3) + k_1(a_1,a_2,q(a_3))) \equiv \left\{ \begin{array}{lll} 0 \bmod 6 & \text{für} & r > 0 \\ 5 \bmod 6 & \text{für} & r < 0 \end{array} \right\}$$

dabei ist $q(a_3) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{für} & a_3 = 0 \\ 6 - a_3 & \text{für} & a_3 > 0 \end{array} \right\}$, wenn $a_1 \equiv 0 \bmod 2$ und
$q(a_3) = \left\{ \begin{array}{lll} 3 - a_3 & \text{für} & 0 \le a_3 \le 3 \\ 9 - a_3 & \text{für} & a_3 \ge 4 \end{array} \right\}$, wenn $a_1 \equiv 1 \bmod 2$.
Für die untersuchten Quadrate läßt sich als Besonderheit feststellen, daß nur hier negative Werte für k_1 auftreten.

Die Suche nach weiteren Regelmäßigkeiten scheint aber schon deshalb aussichtslos zu sein, weil die Verteilung der Nullen offenbar keinem Schema genügt.
Auch der Faktor $R(r,\chi)$ erscheint mysteriös. Während die Primelemente π_3' und π_2 zu den "schlechten" Stellen gehören, ist das Auftreten von π_7 und π_{13} eigenartig. Allerdings ist nur für wenige χ ein $k_i, 3 \le i \le 6$, von Null veschieden, wie aus den Tabellen ersichtlich ist.
Aus der Summationsformel und aus der Abschätzung 3.3 geht hervor, daß sich ein größerer Körpergrad N verheerend auf die Konvergenz auswirkt. Daher ist es unwahrscheinlich, daß sich für einen weiteren interessanten Fall (z.B. $n = 5$) mit der beschriebenen Methode die ρ_n untersuchen lassen.

5.4 Tabellen

Die folgenden Tabellen enthalten die Werte der $p(r, \chi)$ und die k_i für $i = 0, 1$. Die Fälle, in denen $k_i = 1$ für ein $i \geq 3$, sind jeweils gesondert angegeben.

Der Wert Null ist durch – gekennzeichnet. Da in den oben angegebenen 86 Fällen $\rho(r, \chi) = 0$ für alle r war, sind in den Tabellen die Einträge für $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ ausgelassen. Die Zahl der insgesamt auftretenden Nullen ist als n_{ges} angegeben.

Für die Werte ungleich 0 wurden die relativen Fehler $\frac{|\hat{\rho}(r,\chi) - \hat{\rho}(r,\chi)_{ang}|}{|\hat{\rho}(r,\chi)|}$ zwischen den berechneten und den angenommenen Daten bestimmt. In den Tabellen ist, jeweils für das betreffende r, f_{max} der maximale dieser Fehler, f_{min} der minimale und f_d der durchschnittliche.

Schließlich sind die Charakterwerte $\chi_\pi(r), \chi_\omega(r), \chi_\zeta(r)$ angegeben. Es wurden alle behandelten Fälle mit aufgenommen in der Hoffnung, daß die Daten eventuell für einen Leser von Nutzen sind.

$r = 1 \qquad \mathcal{N}(r) = 1$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0000; 0000)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5	1		0		1	0		1	3			5		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			0			3			0			2			5		
	4	–			0			0			0			5			5		
	5	–			4			5			0			0			1		
	0	4	1		0	-1		0	-1		0	1		0	-1		0	-1	
	2	0			5	-1		1	-1		5			1	-1		5	-1	
1	3	5			–			–			0			1			4		
	4	5			2	-1		4	-1		0			0	-1		0	-1	
	5	5			–			–			0			5			0		
	0	2	-1		–			–			4	-1		–			–		
	2	1	-1		–			–			5	-1		–			–		
3	3	0			–			–			5			–			–		
	4	0	-1		–			–			0	-1		–			–		
	5	0			–			–			5			–			–		
	0	0			0	1		5			5	1		0			4	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	0			–			5			–			0			–		
	4	3			–			0			–			5			–		
	5	0			–			1			–			4			–		
	0	1	-1	2	5	-1	1	1	-1	1	5	-1	2	0	-1	1	0	-1	1
	2	1	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	5	-1	1	1	-1	1	5	-1	1
5	3	5			1			4			0			5			0		
	4	1	-1		4	-1		2	-1		5	-1		5	-1		1	-1	
	5	5			5			0			0			3			2		

$\chi = 101 \ : \ k_6 = 1;$

$\chi = 102 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi = 300 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 303 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^0; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 1.587E - 09 \quad f_{max} = 1.897E - 08 \quad f_{min} = 5.256E - 12$

$n_{ges} = 114$

$r = 1 - 3\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 7$

$r \in k_S^{\times}/k_S^{\times 6} = (0022; 0041)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
0	0	0			–			5		1	5			–			4		1
	2	4			0		1	–			0			5		1	–		
	3	2			–			4			0			–			0		
	4	–			5			5			1			4			4		
	5	0			–			4			4			–			0		
1	0	5	1		2			5			0			3			1		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	1			5			0			–			–			5		
	4	–			5			0			5			0			2		
	5	5			1			0			–			–			5		
3	0	5	1		–			–			5			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	0			–			–			0			–			–		
	4	–			–			–			4			–			–		
	5	4			–			–			4			–			–		
4	0	4			5			1			2			0			5		
	2	5			1			4			0			5			5		
	3	2			4			5			1			4			4		
	4	0			–			1			–			4			–		
	5	0			0			5			5			0			4		
5	0	0		1	5		1	1		1	4		1	0		1	0		1
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	–			–			4	1		–			–			0	1	
	4	0			1			5			4			2			4		
	5	–			–			4	1		–			–			0	1	

$\chi = 104 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = 105 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^4; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^1;$

$f_d = 7.055E-09 \quad f_{max} = 7.634E-08 \quad f_{min} = 2.290E-09$

$n_{ges} = 126$

$r = 4 - 3\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 13$

$r \in k_S^{\times}/k_S^{\times 6} = (0042; 0121)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
0	0	5			–			0		1	2			–			5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	–			4			5			4			0			1		
	4	4			–			0			1			–			5		
	5	–			4			3			0			0			5		
1	0	0			4	1		5			5			0	1		3		
	2	5			0			4	1		1			5			5	1	
	3	4			5			–			1			0			0		
	4	4			4			0			–			1			0		
	5	0			5			–			3			0			4		
3	0	0			–			–			4			–			–		
	2	5			–			–			0			–			–		
	3	–			–			–			4			–			–		
	4	4			–			–			–			–			–		
	5	–			–			–			0			–			–		
4	0	1			0			2			1			5			2		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	0			–			1			–			4			–		
	4	0			1			5			0			0			5		
	5	2			–			5			–			4			–		
5	0	2		1	5		1	5		1	0		1	0		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	3			1			0			4			5			2		
	4	0			5			1			4			0			0		
	5	5			1			4			0			5			0		

$\chi =\ 003\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 400\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 402\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 404\ :\ k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^1; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^5; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^2;$

$f_d = 5.000E-08 \quad f_{max} = 4.462E-07 \quad f_{min} = 8.141E-09$

$n_{ges} = 122$

$r = -5 + 3\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 19$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0001; 0140)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	1	1		1		1	1		1	4			0		1	0		1
	2	1			–			0		1	0			–			5		1
0	3	0			3			5			–			5			1		
	4	5			5			0			–			4			5		
	5	4			5			5			–			1			1		
	0	4	1		4	2		1	1		2			5	1		4		
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	0			–			–			–			4			5	1	
	4	–			–			–			1			0	1		1		
	5	4			–			–			–			0			5	1	
	0	1			–			–			0	1		–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	–			–			–			2			–			–		
	4	0			–			–			–			–			–		
	5	–			–			–			0			–			–		
	0	5			0	1		4			5	1		5			4	1	
	2	1			4			2			5			5			0		
4	3	–			2			–			1			–			0		
	4	–			0			–			3			–			0		
	5	–			4			–			5			–			0		
	0	2		1	5		1	5		1	0		1	0		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	3			5			0			4			3			2		
	4	0			5			1			4			0			0		
	5	1			1			0			2			5			2		

$\chi = \ 003 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = \ 400 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = \ 402 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = \ 404 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^5; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^1; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^3;$

$f_d = 9.412E-08 \quad f_{max} = 7.480E-07 \quad f_{min} = 1.423E-08$

$n_{ges} = 126$

$r = -5 \qquad \mathcal{N}(r) = 25$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0020; 0030)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	2			1		1	4		1	5	1		0		1	3		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			–			–			5	1		–			–		
	4	5			5			0			–			4			5		
	5	–			–			–			5	1		–			–		
	0	3			0	1		3	1		1			3			1		
	2	4			0			4			0			5			5		
1	3	5			–			–			5			1			3		
	4	5			4			0			5			–			–		
	5	5			–			–			5			5			5		
	0	0			–			–			4			–			–		
	2	4	1		–			–			5	1		–			–		
3	3	5			–			–			5			–			–		
	4	5			–			–			5			–			–		
	5	5			–			–			5			–			–		
	0	2	1		5			5	1		2			4	1		5		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	5	1		–			2	1		–			1	1		–		
	4	–			4			–			5			–			0		
	5	5	1		–			4	1		–			5	1		–		
	0	0		1	5		1	5		1	4		1	0		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	4	1		–			–			5	1		–			–		
	4	0			1			3			4			2			2		
	5	4	1		–			–			5	1		–			–		

$\chi = 100 \;:\; k_4 = 1;$

$\chi = 103 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi = 104 \;:\; k_4 = 1;$

$\chi = 105 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 1.005E-07 \quad f_{max} = 9.633E-07 \quad f_{min} = 1.303E-08$

$n_{ges} = 138$

$r = -5 + 6\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 31$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0042; 0031)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
0	0	4	1		–			–			0	1		–			–		
0	2	0			–			1		1	5			–			0		1
0	3	0			5			5			–			1			1		
0	4	4			–			0			1			–			5		
0	5	0			3			1			–			5			3		
1	0	0	2		5	1		0			4	1		0			5	1	
1	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	0			1		1	4	1		1			0			–		
1	4	–			–			1			1	1		5			–		
1	5	0			5		1	0	1		1			4			–		
3	0	5	1		–			–			2			–			–		
3	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	0			–			–			0			–			–		
3	4	–			–			–			5			–			–		
3	5	0			–			–			0			–			–		
4	0	5	1		5	1		0	1		0	1		3	1		1	1	
4	2	4			5			1			2			0			5		
4	3	–			4			–			5			–			0		
4	4	0			1			5			0			0			5		
4	5	–			2			–			5			–			2		
5	0	1		1	0		1	0		1	5		1	1		1	5		1
5	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	–			–			0			–			–			–		
5	4	3			4			0			1			5			5		
5	5	–			–			–			–			–			–		

$\chi_\pi(r) = \zeta^1; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^5;$

$f_d = 9.385E-08 \quad f_{max} = 1.595E-07 \quad f_{min} = 3.016E-08$

$n_{ges} = 134$

$r = 4 + 3\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 37$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0001; 0151)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	1			1		1	–			1			0		1	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	4			5			5			–			1			1		
	4	0			5			–			0			4			–		
	5	0			5			3			–			1			5		
	0	4			0			4			0			5			5		
	2	0			0			0	1		5			2			4	1	
1	3	2			–			2			5			5			1		
	4	–			–			1			4			5			0		
	5	4			–			0			1			5			5		
	0	0	1		–			–			1	1		–			–		
	2	1			–			–			5			–			–		
3	3	5			–			–			–			–			–		
	4	5			–			–			5			–			–		
	5	1			–			–			–			–			–		
	0	2			0			1			5			2			4		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	–			0			–			5			–			4		
	4	1			1			4			4			3			1		
	5	–			0			–			1			–			2		
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	1		1	4		1	0		1	5		1	5		1	5		1
5	3	3			1			0			4			5			2		
	4	0			1			1			4			2			0		
	5	5			1			4			0			5			0		

$\chi =\ 003\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 400\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 402\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 404\ :\ k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^2; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^5; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 2.363E-07 \quad f_{max} = 1.342E-06 \quad f_{min} = 2.891E-08$

$n_{ges} = 122$

$r = 7 - 6\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 43$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0021; 0100)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5			5		1	5	1	1	1			4		1	4	1	1
	2	0	1		–			–			5	1		–			–		
0	3	5			0			2			–			2			4		
	4	0			1			–			0			0			–		
	5	5			4			4			–			0			0		
	0	3	1		0			0			1			4			5	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	4			4			0			5			1			–		
	4	–			1			1			4			5			–		
	5	4			2			2			5			5			–		
	0	1			–			–			4			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	0			–			–			–			–			–		
	4	2			–			–			5			–			–		
	5	0			–			–			–			–			–		
	0	2			0			5			3			4			0		
	2	0	1		5	1		5	1		4	1		0	1		3	1	
4	3	–			3			–			0			–			3		
	4	1			3			2			4			5			5		
	5	–			1			–			0			–			5		
	0	–			–			0	1	1	–			–			5	1	1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	4			0			3			5			4			5		
	4	–			–			0	1		–			–			5	1	
	5	4			4			5			5			2			1		

$\chi = 104 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = 300 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^5; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^3; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^1;$

$f_d = 3.188E-07 \quad f_{max} = 1.669E-06 \quad f_{min} = 6.768E-08$

$n_{ges} = 128$

$r = 7 \qquad \mathcal{N}(r) = 49$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0040; 0030)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5	1		1		1	5		1	0			0		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			0			3			0			2			5		
	4	–			5			1			3			4			0		
	5	–			4			5			0			0			1		
	0	0			4	1		0	1		5			0			5		
	2	4	1		1			4			0	1		0			5		
1	3	5			–			–			0			5			0		
	4	5			5			0			0			–			–		
	5	5			–			–			0			3			2		
	0	4			–			–			1			–			–		
	2	5			–			–			0			–			–		
3	3	0			–			–			5			–			–		
	4	0			–			–			5			–			–		
	5	0			–			–			5			–			–		
	0	3			4	1		4			5	1		1			0	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	0			–			1			–			4			–		
	4	0			–			5			–			0			–		
	5	0			–			3			–			2			–		
	0	0	1	1	–			–			4	1	1	–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	5			1			4			0			5			0		
	4	0	1		–			–			4	1		–			–		
	5	5			5			0			0			3			2		

$\chi = 104 \; : \; k_3 = 1;$

$\chi = 105 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi = 300 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi = 303 \; : \; k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^2;$

$f_d = 3.797E-07 \quad f_{max} = 2.083E-06 \quad f_{min} = 5.861E-08$

$n_{ges} = 130$

$r = -5 - 3\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 49$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0042; 0040)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4		1	5		1	–			0		1	4		1	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	0			–			4			2			–			0		
	4	4			1			–			0			0			–		
	5	4			–			4			0			–			0		
	0	0		1	5	-1	2	0	-1	1	5		1	1	-1	2	4	-1	1
	2	–			3	-1	1	1	-1	1	–			5	-1	1	5	-1	1
1	3	2			3			0			1			5			4		
	4	–			5	-1		1	-1		–			1	-1		5	-1	
	5	0			5			0			5			1			4		
	0	0	-1	1	–			–			4	-1	1	–			–		
	2	1	-1	1	–			–			5	-1	1	–			–		
3	3	–			–			–			–			–			–		
	4	5	-1		–			–			3	-1		–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	5		1	5		1	0		1	0		1	3		1	1		1
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	4			4			5			5			2			0		
	4	5			1			4			0			5			5		
	5	2			0			5			3			4			0		
	0	1	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	5	-1	1	1	-1	1	5	-1	1
	2	2	-1	1	5	-1	1	0	-1	2	0	-1	1	0	-1	1	5	-1	2
5	3	–			–			–			–			–			–		
	4	0	-1		1	-1		0	-1	1	4	-1		2	-1		5	-1	1
	5	–			–			–			–			–			–		

$\chi = 501 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi = 504 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^4; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^2;$

$f_d = 2.339E-07 \quad f_{max} = 4.864E-07 \quad f_{min} = 4.681E-08$

$n_{ges} = 126$

$r = -5 + 9\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 61$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0020; 0111)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	0			5		1	0		1	0	1		4		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	5			–			5			3			–			1		
	4	5			1			2			–			0			1		
	5	3			–			5			1			–			1		
	0	5			1	1		0			1			0	1		1		
	2	0			5			0			5			1			4		
1	3	–			4			0			1			4			–		
	4	1			5			–			–			5			1		
	5	–			0			0			5			0			–		
	0	4			–			–			5			–			–		
	2	0	1		–			–			4	1		–			–		
3	3	2			–			–			1			–			–		
	4	1			–			–			0			–			–		
	5	0			–			–			5			–			–		
	0	3	1		3			0	1		0			5	1		3		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	3			5			0			2			5			5		
	4	–			4			–			5			–			0		
	5	1			1			0			0			1			5		
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	–			5	1	1	–			–			0	1	1	–		
5	3	1			1			4			2			5			0		
	4	–			4	1		–			–			5	1		–		
	5	5			3			4			0			1			0		

$\chi_\pi(r) = \zeta^0; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^1; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 4.945E-07 \quad f_{max} = 2.628E-06 \quad f_{min} = 8.306E-08$

$n_{ges} = 126$

$r = 7 - 9\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 67$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0040; 0140)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4			–			5		1	5			–			4		1
	2	1			–			0		1	0			–			5		1
0	3	1			–			5			1			–			1		
	4	0			–			0			3			–			5		
	5	5			–			5			5			–			1		
	0	5			0			5	1		5	1		1			2		
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	–			3			0			1			0			0		
	4	4			5			–			–			0			5		
	5	–			5			0			5			2			0		
	0	4			–			–			4			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	–			–			–			5			–			–		
	4	5			–			–			5			–			–		
	5	–			–			–			3			–			–		
	0	2			3			3			4			0			5		
	2	3			4			0			1			5			4		
4	3	1			3			2			4			5			5		
	4	0			1			5			0			0			5		
	5	5			5			2			2			1			5		
	0	0		1	5		1	1		1	4		1	0		1	0		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	0			0			5			1			4			1		
	4	4			5			3			2			0			2		
	5	4			2			5			5			0			1		

$\chi = \ 000 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi = \ 101 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = \ 303 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = \ 401 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi = \ 403 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi = \ 405 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^1; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^5;$

$f_d = 5.798E-07 \quad f_{max} = 3.016E-06 \quad f_{min} = 1.880E-07$

$n_{ges} = 116$

$r = -8 + 9\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 73$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0000; 0050)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4			0		1	–			4			5		1	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			5	1		–			5	1		1	1		–		
	4	1			2			–			1			1			–		
	5	–			5	1		–			1	1		1	1		–		
	0	5	1		5	2		1			5			5			5		
	2	3			0			0	1		5			5			1	1	
1	3	–			–			1			4	1		5			–		
	4	5			0			4			–			–			0		
	5	–			–			5			0	1		5			–		
	0	0			–			–			5			–			–		
	2	5			–			–			0			–			–		
3	3	–			–			–			4			–			–		
	4	0			–			–			3			–			–		
	5	–			–			–			0			–			–		
	0	1			5			0			4			1			3		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	5	1		–			4	1		–			5	1		–		
	4	4			4			1			1			0			4		
	5	1	1		–			2	1		–			5	1		–		
	0	–			4	1	1	–			–			5	1	1	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	5			1			4			0			5			0		
	4	–			4	1		–			–			5	1		–		
	5	1			1			2			2			5			4		

$\chi = \; 000 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi = \; 103 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi = \; 303 \; : \; k_5 = 1;$

$\chi = \; 401 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi = \; 403 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi = \; 405 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^2; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 7.035E - 07 \quad f_{max} = 3.357E - 06 \quad f_{min} = 2.511E - 07$

$n_{ges} = 138$

$r = 7 + 3\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 79$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0021; 0011)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4			0		1	–			0			5		1	–		
	2	0	1		–			–			5	1		–			–		
0	3	1			2			4			–			4			0		
	4	1			4			–			1			3			–		
	5	5			4			4			–			0			0		
	0	2	1		5			2			0			2			1	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	–			4			0			0			2			5		
	4	–			4			5			5			1			–		
	5	–			0			0			4			4			5		
	0	4			–			–			0			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	–			–			–			3			–			–		
	4	5			–			–			1			–			–		
	5	–			–			–			1			–			–		
	0	1			5			4			2			3			5		
	2	0	1		5	1		5	1		4	1		0	1		3	1	
4	3	–			5			–			2			–			5		
	4	2			4			3			5			0			0		
	5	–			1			–			0			–			5		
	0	2		1	5		1	5		1	0		1	0		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	0			4			5			1			2			1		
	4	0			5			1			4			0			0		
	5	4			0			5			5			4			1		

$\chi = 104 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 300 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^5; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^1;$

$f_d = 7.281E-07 \quad f_{max} = 3.393E-06 \quad f_{min} = 9.914E-08$

$n_{ges} = 122$

$r = 10 - 9\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 91$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0000; 0120)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	1			0		1	1		1	3	1		5		1	0		1
	2	5			–			0		1	4			–			5		1
0	3	–			5			0			5			1			2		
	4	–			0			4			0			5			3		
	5	–			5			4			1			1			0		
	0	5			5	1		5			5	1		0			4	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	–			5			5			4			5			–		
	4	0			–			4			–			3			–		
	5	–			5			3			0			5			–		
	0	5	1		–			–			4	2		–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	5			–			–			4			–			–		
	4	0	1		–			–			–			–			–		
	5	1			–			–			0			–			–		
	0	0	1		2			5	1		1			0	1		0		
	2	1			4			2			5			5			0		
4	3	5			–			4			–			5			–		
	4	3			–			0			–			5			–		
	5	1			–			2			–			5			–		
	0	–			3	1	1	–			–			4	1	1	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	4			0			5			5			4			1		
	4	–			5	1		–			–			0	1		–		
	5	0			0			3			1			4			5		

$\chi = 000 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 401 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 403 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 405 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^5; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^3;$

$f_d = 9.005E-07 \quad f_{max} = 3.090E-06 \quad f_{min} = 2.154E-07$

$n_{ges} = 130$

$r = -11 + 6\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 91$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0002; 0130)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5			0		1	1		1	0	2		5		1	0		1
	2	5			1		1	–			1			0		1	–		
0	3	1			–			1			5			–			3		
	4	–			5			5			1			4			4		
	5	1			–			3			5			–			5		
	0	3			3	1		5	2		0	1		1			5	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	–			1			0			2			2			–		
	4	0			–			–			–			0			0	1	
	5	–			5			2			2			0			–		
	0	4	1		–			–			4			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	5			–			–			5			–			–		
	4	–			–			–			1			–			–		
	5	5			–			–			5			–			–		
	0	5	2		2			4	2		1			5	2		0		
	2	0			0			1			1			4			2		
4	3	1			1			0			0			1			5		
	4	0			–			3			–			2			–		
	5	1			5			2			0			5			1		
	0	1		1	0		1	4		1	5		1	1		1	3		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	–			–			3	1		–			–			5	1	
	4	5			0			0			3			1			5		
	5	–			–			5	1		–			–			1	1	

$\chi_\pi(r) = \zeta^4; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^3; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^3;$

$f_d = 7.701E-07 \quad f_{max} = 2.806E-06 \quad f_{min} = 2.210E-07$

$n_{ges} = 126$

$r = -8 - 3\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 97$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0022; 0050)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
0	0	4	1		0		1	0		1	5			5		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	4			4			–			1			0			–		
	4	–			2			0			0			1			5		
	5	0			4			–			3			0			–		
1	0	1			0			3	1		0			3			1		
	2	4	1		5			0			0	1		4			1		
	3	5			4			5			5			2			–		
	4	0			4			4			3			5			–		
	5	1			4			3			1			2			–		
3	0	5	1		–			–			4			–			–		
	2	3			–			–			4			–			–		
	3	4			–			–			–			–			–		
	4	5			–			–			–			–			–		
	5	0			–			–			–			–			–		
4	0	4			3	1		1			0	1		0			3	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	3			0			0			3			5			0		
	4	5			–			0			–			3			–		
	5	5			0			4			5			5			4		
5	0	1		1	4		1	4		1	5		1	5		1	3		1
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	4			0			5			5			4			1		
	4	5			4			0			3			5			5		
	5	0			0			3			1			4			5		

$\chi = 101 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 104 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = 105 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 303 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^1; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^2; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 9.614E-07 \quad f_{max} = 2.875E-06 \quad f_{min} = 3.193E-07$

$n_{ges} = 118$

$r = -2 - 9\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 103$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0040; 0051)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
0	0	1			5		1	–			3			4		1	–		
	2	0			–			5		1	5			–			4		1
	3	–			4			5			0			0			1		
	4	5			5			0			–			4			5		
	5	–			4			3			2			0			5		
1	0	0			3			0	1		0			0			5	2	
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	4			0			3			4			–			5		
	4	5			4			5	1		5			1			–		
	5	0			0			1			0			–			3		
3	0	4			–			–			5			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	–			–			–			3			–			–		
	4	0		1	–			–			4			–			–		
	5	–			–			–			5			–			–		
4	0	0			0			1			1			4			2		
	2	2			3			5			0			4			3		
	3	0			–			1			–			4			–		
	4	–			0			–			5			–			4		
	5	2			–			5			–			4			–		
5	0	–			–			–			–			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	4			0			1			5			4			3		
	4	–			–			–			–			–			–		
	5	0			0			5			1			4			1		

$\chi =\ 103\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 104\ :\ k_3 = 1;$

$\chi =\ 300\ :\ k_4 = 1;$

$\chi =\ 303\ :\ k_6 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^2; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^5;$

$f_d = 1.036E-06 \quad f_{max} = 2.838E-06 \quad f_{min} = 3.093E-07$

$n_{ges} = 133$

$r = -5 + 12\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 109$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0001; 0101)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	2			3		1	0		1	5	1		2		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	5		1	0			–			1			2			–		
	4	5			1			2			–			0			1		
	5	5		1	4			–			1			0			–		
	0	5			4			5			4			0			3		
	2	2			5			5	1		4			4			0	1	
1	3	0			4			3			0			–			5		
	4	5			0			4			–			–			0		
	5	0			2			5			0			–			1		
	0	1	1		–			–			5	1		–			–		
	2	0			–			–			1			–			–		
3	3	–			–			–			1			–			–		
	4	2			–			–			5			–			–		
	5	–			–			–			1			–			–		
	0	0	1		1			5	1		0			0	1		5		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	5			1		1	4			0		1	5			5		1
	4	–			0			–			3			–			0		
	5	5			5		1	0			0		1	3			1		1
	0	–			–			0	1	1	–			–			5	1	1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	0			2			3			1			0			5		
	4	–			–			4	1		–			–			3	1	
	5	0			0			5			1			4			1		

$\chi_\pi(r) = \zeta^5; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^3; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 1.074E-06 \quad f_{max} = 3.202E-06 \quad f_{min} = 2.775E-07$

$n_{ges} = 126$

$r = -11 \qquad \mathcal{N}(r) = 121$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0040; 0000)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	2			5		1	0		1	2	1		4		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	5			0			2			–			2			4		
	4	5			5			0			–			4			5		
	5	5			4			4			–			0			0		
	0	0			3	2		5	2		4			0			4		
	2	5	1		2			2			4	1		4			0		
1	3	5			–			–			5			3			1		
	4	5			0			4			5			–			–		
	5	5			–			–			5			1			3		
	0	1			–			–			3			–			–		
	2	0			–			–			4			–			–		
3	3	5			–			–			5			–			–		
	4	5			–			–			5			–			–		
	5	5			–			–			5			–			–		
	0	5	1		1			0	1		2			3	1		3		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	–			1			–			2			–			3		
	4	–			0			–			5			–			4		
	5	–			5			–			2			–			5		
	0	3		1	4		1	0		1	1		1	5		1	5		1
	2	0		1	5		1	5		1	4		1	0		1	4		1
5	3	4	1		–			–			5	1		–			–		
	4	0			3			1			4			4			0		
	5	4	1		–			–			5	1		–			–		

$\chi = \; 100 \; : \; k_6 = 1;$

$\chi = \; 103 \; : \; k_5 = 1;$

$\chi = \; 300 \; : \; k_3 = 1;$

$\chi = \; 303 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^0; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^2;$

$f_d = 1.107E-06 \quad f_{max} = 3.086E-06 \quad f_{min} = 1.477E-07$

$n_{ges} = 124$

$r = 4 + 9\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 133$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0020; 0121)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4			5		1	0		1	1	1		4		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	0			–			0			4			–			2		
	4	5			1			0			–			0			5		
	5	2			–			4			0			–			0		
	0	1	1		4			4			0	1		0			2		
	2	5			1			5			1			0			0		
1	3	4	1		5			1			–			5			2		1
	4	5			4			0			5			–			–		
	5	0	1		5			5			–			5			0		1
	0	2			–			–			0			–			–		
	2	5	1		–			–			0	1		–			–		
3	3	4			–			–			4			–			–		
	4	5			–			–			5			–			–		
	5	0			–			–			0			–			–		
	0	4	1		1			1	1		4			0	1		1		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	4			0			1			3			0			0		
	4	–			4			–			5			–			0		
	5	0			0			5			5			0			4		
	0	0		1	5		1	5		1	4		1	0		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	–			–			–			–			–			–		
	4	4			5			1			2			0			0		
	5	–			–			–			–			–			–		

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^5; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 1.407E-06 \quad f_{max} = 3.348E-06 \quad f_{min} = 3.233E-08$

$n_{ges} = 128$

$r = -11 + 12\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 133$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0021; 0131)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5	1		0		1	0		1	3			5		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	0			4			–			1			0			–		
	4	–			0			0			0			5			5		
	5	0			2			–			1			4			–		
	0	4			0	1		5			0			5	1		0		
	2	4			4	1		1			3			0	1		5		
1	3	0			0			–			4			0			3		
	4	–			–			–			0			1	1		4		
	5	0			4			–			4			4			5		
	0	5			–			–			0			–			–		
	2	2			–			–			0			–			–		
3	3	–			–			–			0			–			–		
	4	5			–			–			–			–			–		
	5	–			–			–			0			–			–		
	0	4			0	1		1			3	1		0			0	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	5			4			2			1			1			4		
	4	1			–			2			–			5			–		
	5	5			2			4			1			5			0		
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	0		1	5		1	1		1	4		1	0		1	0		1
5	3	5			3			4			0			1			0		
	4	3			0			0			1			1			5		
	5	5			1			0			0			5			2		

$\chi_\pi(r) = \zeta^2; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^3; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 1.395E-06 \quad f_{max} = 4.106E-06 \quad f_{min} = 3.898E-07$

$n_{ges} = 120$

$r = -8 + 15\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 169$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0022; 0020)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	4	1		5		1	5			2			1		1	1		
	4	–			–			–			–			–			–		
	5	0	1		5		1	3			4			1		1	5		
	0	1		1	5	-1	1	5	-1	1	0		1	5	-1	1	5	-1	1
	2	–			0	-1	1	2	-1	1	–			2	-1	1	0	-1	1
1	3	–			–			–			–			–			–		
	4	–			2	-1		1	-1	1	–			0	-1		3	-1	1
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	5	-1	1	–			–			1	-1	1	–			–		
	2	0	-1	1	–			–			4	-1	1	–			–		
3	3	–			–			–			–			–			–		
	4	4	-1		–			–			4	-1		–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	4			0	1		1			3	1		0			0	1	
	4	–			–			–			–			–			–		
	5	0			0	1		5			5	1		0			4	1	
	0	2	-1	1	5	-1	1	3	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	2	-1	1
	2	1	-1	1	5	-1	2	4	-1	1	5	-1	1	0	-1	2	3	-1	1
5	3	–			–			–			–			–			–		
	4	3	-1		5	-1	1	2	-1		1	-1		0	-1	1	1	-1	
	5	–			–			–			–			–			–		

$\chi =$ 104 : $k_5 = 1$;
$\chi =$ 105 : $k_4 = 1$;
$\chi =$ 141 : $k_3 = 1$;
$\chi =$ 300 : $k_4 = 1$;
$\chi =$ 343 : $k_4 = 1$;
$\chi =$ 502 : $k_3 = 1$;
$\chi =$ 505 : $k_3 = 1$;

$\chi_\pi(r) = \zeta^4; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^2; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 2.205E-06 \quad f_{max} = 3.927E-06 \quad f_{min} = 9.134E-07$
$n_{ges} = 154$

$r = 5 - 15\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 175$

$r \in k_S^{\times}/k_S^{\times 6} = (0012; 0041)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4			5		1	–			3			1		1	–		
	2	5			–			4		1	1			–			0		1
0	3	–			4			0			0			3			5		
	4	0			3			1			–			5			3		
	5	–			0			0			4			5			5		
	0	2			5			5			5	1		5	1		5		
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	0			4			–			0			2			5		
	4	1			0			0			–			–			0		
	5	4			0			–			4			4			5		
	0	4			–			–			3			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	–			–			–			3			–			–		
	4	5			–			–			4			–			–		
	5	–			–			–			1			–			–		
	0	5			2			0			3			3			4		
	2	3			1			0			4			5			1		
4	3	5			–			0			–			3			–		
	4	–			0			–			5			–			4		
	5	3			–			0			–			5			–		
	0	0		1	0		1	5		1	1		1	4		1	1		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	3			4			0			1			5			5		
	4	4			0			1			5			4			3		
	5	1			0			0			5			1			5		

$\chi = 102 \; : \; k_3 = 1;$

$\chi = 300 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^1; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^5;$

$f_d = 2.022E-06 \quad f_{max} = 3.537E-06 \quad f_{min} = 5.624E-07$

$n_{ges} = 122$

$r = -17 \qquad \mathcal{N}(r) = 289$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0000; 0030)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5			0		1	5		1	2	1		5		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			–			–			5	1		–			–		
	4	2			4			1			–			3			0		
	5	–			–			–			5	1		–			–		
	0	3			5	2		3	2		1			5			5		
	2	4			4			0			0			3			1		
1	3	5			–			–			5			5			5		
	4	5			2			2			5			–			–		
	5	5			–			–			5			3			1		
	0	4			–			–			0			–			–		
	2	4	1		–			–			5	1		–			–		
3	3	5			–			–			5			–			–		
	4	5			–			–			5			–			–		
	5	5			–			–			5			–			–		
	0	5	1		0			4	1		5			5	1		4		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	5	1		–			4	1		–			5	1		–		
	4	–			5			–			2			–			5		
	5	5	1		–			0	1		–			3	1		–		
	0	0		1	3		1	1		1	4		1	4		1	0		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	4	1		–			–			5	1		–			–		
	4	0			5			5			4			0			4		
	5	4	1		–			–			5	1		–			–		

$\chi = 100 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = 103 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 300 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi = 303 \ : \ k_6 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 7.039E-06 \quad f_{max} = 1.138E-05 \quad f_{min} = 7.191E-07$

$n_{ges} = 138$

$r = 7 - 21\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 343$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0002; 0011)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4		1	1		1	–			0		1	0		1	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			–			3	1		–			–			5	1	
	4	0			5			–			2			4			–		
	5	–			–			3	1		–			–			5	1	
	0	5		1	–			0		1	1		1	–			1		1
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	1			5			5			3			4			0		
	4	5			–			4			1			–			5		
	5	5			1			5			1			0			0		
	0	4		1	–			–			5		1	–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	–			–			–			–			–			–		
	4	4			–			–			5			–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	5		1	1		1	4		1	0		1	5		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	–			–			–			–			–			–		
	4	1			5			4			2			3			5		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	5	1		–			4	1		0	1		–			0	1	
	4	–			–			–			–			–			–		
	5	3	1		–			4	1		4	1		–			0	1	

$\chi_\pi(r) = \zeta^1; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^3;$

$f_d = 5.256E-06 \quad f_{max} = 1.233E-05 \quad f_{min} = 1.849E-06$

$n_{ges} = 160$

$r = 19 \qquad \mathcal{N}(r) = 361$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0000; 0030)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5	1		–			–			2	2		–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			0			3			0			2			5		
	4	2	1		–			–			–			–			–		
	5	–			4			5			0			0			1		
	0	4			4	2		5	2		1			4			1		
	2	4	1		3			2			0	1		2			3		
1	3	5			0			5			0			0			5		
	4	5			1			4			0			–			–		
	5	5			4			1			0			4			1		
	0	4			–			–			1			–			–		
	2	5			–			–			0			–			–		
3	3	5	1		–			–			5	1		–			–		
	4	0			–			–			5			–			–		
	5	5	1		–			–			5	1		–			–		
	0	5	2		0	1		4	2		5	1		5	2		4	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	0			–			5			–			0			–		
	4	–			5	1		–			2	1		–			5	1	
	5	0			–			1			–			4			–		
	0	0	1	1	–			–			4	1	1	–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	–			–			–			–			–			–		
	4	0	1		–			–			4	1		–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		

$\chi = \ 100 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi = \ 103 \ : \ k_6 = 1;$

$\chi = \ 300 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = \ 303 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 6.531E-06 \quad f_{max} = 1.168E-05 \quad f_{min} = 1.818E-06$

$n_{ges} = 146$

$r = -5 + 21\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 361$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0001; 0040)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	1		1	–			5		1	0		1	–			4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	0			–			5		1	2			–			1		1
	4	5			–			1			4			–			0		
	5	4			–			5		1	0			–			1		1
	0	–			4	-1	1	0	-1	1	–			0	-1	1	4	-1	1
	2	0		1	5	-1	1	1	-1	1	5		1	1	-1	1	5	-1	1
1	3	–			0			5			–			5			0		
	4	4			1	-1		1	-1		3			3	-1		5	-1	
	5	–			2			5			–			1			0		
	0	2	-1	1	–			–			0	-1	1	–			–		
	2	3	-1	1	–			–			1	-1	1	–			–		
3	3	1			–			–			2			–			–		
	4	1	-1		–			–			5	-1		–			–		
	5	5			–			–			0			–			–		
	0	1		1	0		1	0		1	5		1	1		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	0			2			5			1			0			0		
	4	5			0			2			3			1			0		
	5	4			4			5			5			2			0		
	0	1	-1	1	2	-1	1	4	-1	1	5	-1	1	3	-1	1	3	-1	1
	2	2	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	2	-1	1	0	-1	1
5	3	0			5		1	5			1			3		1	1		
	4	0	-1		3	-1		1	-1		4	-1		4	-1		0	-1	
	5	4			1		1	5			5			5		1	1		

$\chi =$ 501 : $k_3 = 1;$

$\chi =$ 502 : $k_4 = 1;$

$\chi =$ 504 : $k_3 = 1;$

$\chi =$ 505 : $k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^2; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 6.223E-06 \quad f_{max} = 1.219E-05 \quad f_{min} = 4.751E-07$

$n_{ges} = 112$

$r = -23 \qquad \mathcal{N}(r) = 529$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0020; 0000)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5			0		1	5		1	5	1		5		1	4		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	2			5			3			–			1			5		
	4	2			0			5			–			5			4		
	5	2			3			5			–			5			1		
	0	4			2			2			0			1			3		
	2	5	1		4	1		5	1		4	1		0	1		3	1	
1	3	5			–			–			5			1			3		
	4	5			3			1			5			4			0		
	5	5			–			–			5			5			5		
	0	4	1		–			–			5	1		–			–		
	2	5	2		–			–			3	2		–			–		
3	3	5			–			–			5			–			–		
	4	5	1		–			–			4	1		–			–		
	5	5			–			–			5			–			–		
	0	2	1		2			5	1		5			4	1		2		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	–			2			–			5			–			2		
	4	–			1			–			2			–			3		
	5	–			0			–			5			–			4		
	0	5	2	1	–			–			3	2	1	–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	4	1		–			–			5	1		–			–		
	4	–			–			–			–			–			–		
	5	4	1		–			–			5	1		–			–		

$\chi_\pi(r) = \zeta^0; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 1.067E-05 \quad f_{max} = 2.033E-05 \quad f_{min} = 3.369E-06$

$n_{ges} = 138$

$r = 25 \qquad \mathcal{N}(r) = 625$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0040; 0000)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			–			–			–			–			–		
	4	–			–			–			–			–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	0		1	5	-1	2	1	-1	2	5		1	5	-1	2	1	-1	2
	2	–			1	-1	1	5	-1	1	–			3	-1	1	3	-1	1
1	3	5		1	0	1		4	1		0		1	4			1		
	4	–			1	-1		5	-1		–			5	-1		1	-1	
	5	5		1	4	1		0	1		0		1	2			3		
	0	2	-1	1	–			–			4	-1	1	–			–		
	2	1	-1	1	–			–			5	-1	1	–			–		
3	3	5			–			–			0			–			–		
	4	0	-1	1	–			–			0	-1	1	–			–		
	5	5			–			–			0			–			–		
	0	–			–			–			–			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	–			–			–			–			–			–		
	4	–			–			–			–			–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	1	-1	3	0	-1	1	0	-1	1	5	-1	3	1	-1	1	5	-1	1
	2	1	-1	2	1	-1	1	5	-1	1	5	-1	2	2	-1	1	4	-1	1
5	3	2			2			3			3			0			5		
	4	1	-1	1	5	-1		1	-1		5	-1	1	0	-1		0	-1	
	5	2			0			5			3			4			1		

$\chi = 144 \;:\; k_4 = 1;$

$\chi = 145 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi = 300 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi = 303 \;:\; k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^0; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^2;$

$f_d = 1.311E-05 \quad f_{max} = 2.238E-05 \quad f_{min} = 3.570E-06$

$n_{ges} = 150$

$r = -11 + 33\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 847$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0002; 0041)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
0	0	2	1		–			–			1	1		–			–		
	2	5			1		1	–			1			0		1	–		
	3	1			4			4			–			0			0		
	4	5			0			–			3			5			–		
	5	5			0			4			–			2			0		
1	0	0	1		2			2			1			0			4	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	–			2			1			4			5			1		
	4	–			1			5			0			5			–		
	5	–			4			1			2			1			1		
3	0	5			–			–			2			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	–			–			–			0			–			–		
	4	0			–			–			3			–			–		
	5	–			–			–			4			–			–		
4	0	0	1		5	1		5	1		4	1		0	1		3	1	
	2	0			0			1			1			4			2		
	3	–			1			–			0			–			5		
	4	2			4			5			1			4			4		
	5	–			3			–			4			–			5		
5	0	1	1	1	–			–			5	1	1	–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	5			5			4			0			3			0		
	4	1	1		–			–			5	1		–			–		
	5	3			1			4			4			5			0		

$\chi = 101 \; : \; k_3 = 1;$

$\chi = 303 \; : \; k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^4; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^3;$

$f_d = 2.058E-05 \quad f_{max} = 3.264E-05 \quad f_{min} = 4.465E-06$

$n_{ges} = 130$

$r = -11 - 24\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 961$

$r \in k_S^\times / {k_S^\times}^6 = (0021; 0000)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	4		1	0		2	–			0		1	5		2	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	4			–			4			0			–			0		
	4	2			0		1	–			4			5		1	–		
	5	4			–			0			0			–			2		
	0	4		1	0	-1	1	2	-1	1	3		1	2	-1	1	0	-1	1
	2	–			3	-1	1	5	-1	1	–			5	-1	1	3	-1	1
1	3	0			5			0			5			1			4		
	4	–			1	-1		1	-1		–			3	-1		5	-1	
	5	0			3			2			5			5			0		
	0	1	-1	2	–			–			5	-1	2	–			–		
	2	1	-1	1	–			–			5	-1	1	–			–		
3	3	–			–			–			–			–			–		
	4	1	-1		–			–			5	-1		–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	1		1	5		1	4		1	2		1	3		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	4			2			1			5			0			2		
	4	5			5			0			0			3			1		
	5	4			0			3			5			4			4		
	0	0	-1	2	0	-1	1	1	-1	2	4	-1	2	1	-1	1	0	-1	2
	2	0	-1	1	1	-1	1	0	-1	2	4	-1	1	2	-1	1	5	-1	2
5	3	–			–			–			–			–			–		
	4	0	-1		5	-1		2	-1	1	4	-1		0	-1		1	-1	1
	5	–			–			–			–			–			–		

$\chi_\pi(r) = \zeta^2; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 2.471E-05 \quad f_{max} = 4.354E-05 \quad f_{min} = 1.586E-06$

$n_{ges} = 126$

$r = 31 \qquad \mathcal{N}(r) = 961$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0020; 0030)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	2	1		–			–			5	2		–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			4			5			0			0			1		
	4	5	1		–			–			–			–			–		
	5	–			2			1			0			4			3		
	0	0			1			4			5			3			2		
	2	4	1		0	1		4	1		0	1		5	1		5	1	
1	3	5	1		5			0			5	1		2			3		
	4	5			4			1			0			4			1		
	5	5	1		3			2			5	1		0			5		
	0	0	1		–			–			4	1		–			–		
	2	4	2		–			–			5	2		–			–		
3	3	0			–			–			5			–			–		
	4	5	1		–			–			5	1		–			–		
	5	0			–			–			5			–			–		
	0	2	2		5	1		5	2		2	1		4	2		5	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	0			–			3			–			2			–		
	4	–			4	1		–			5	1		–			0	1	
	5	0			–			5			–			0			–		
	0	0	1	1	–			–			4	1	1	–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	5			3			2			0			1			4		
	4	0	1		–			–			4	1		–			–		
	5	5			1			4			0			5			0		

$\chi_\pi(r) = \zeta^3; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^4;$

$f_d = 2.550E-05 \quad f_{max} = 4.230E-05 \quad f_{min} = 1.156E-05$

$n_{ges} = 132$

$r = 13 - 39\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 1183$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0042; 0041)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	0			–			5		1	5			–			4		1
	2	4			0		1	–			0			5		1	–		
0	3	5			3			–			0			5			–		
	4	–			5			5			1			4			4		
	5	3			5			–			4			1			–		
	0	2			3			4	1		3			0			4		
	2	–			–			–			–			–			–		
1	3	–			–			0			1	1		0			–		
	4	5			0			–			0			3			1		
	5	–			–			0			5	1		2			–		
	0	5	1		–			–			5			–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
3	3	–			–			–			5			–			–		
	4	–			–			–			4			–			–		
	5	–			–			–			3			–			–		
	0	4			1			5			2			2			3		
	2	5			3			2			0			1			3		
4	3	2			3			3			4			0			5		
	4	0			–			5			–			0			–		
	5	0			5			3			2			2			5		
	0	0		1	5		1	1		1	4		1	0		1	0		1
	2	–			–			–			–			–			–		
5	3	0			2			5			1			0			1		
	4	0			1			5			4			2			4		
	5	4			4			5			5			2			1		

$\chi = \ 100 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = \ 101 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^4; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^5;$

$f_d = 3.530E-05 \quad f_{max} = 5.881E-05 \quad f_{min} = 3.512E-06$

$n_{ges} = 122$

$r = -35 \qquad \mathcal{N}(r) = 1225$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0000; 0000)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
0	0	4	2		–			–			2	1		–			–		
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	–			–			–			5	1		–			–		
	4	–			–			–			5	1		–			–		
	5	–			–			–			5	1		–			–		
1	0	0			5	2		3	2		4			2			2		
	2	5	1		4			0			4	1		0			4		
	3	5			–			–			5			5			5		
	4	5			2			2			5			–			–		
	5	5			–			–			5			3			1		
3	0	1			–			–			3			–			–		
	2	0			–			–			4			–			–		
	3	5			–			–			5			–			–		
	4	5			–			–			5			–			–		
	5	5			–			–			5			–			–		
4	0	5	1		5	2		4	1		4	2		5	1		3	2	
	2	–			–			–			–			–			–		
	3	5	1		–			4	1		–			5	1		–		
	4	2	1		–			5	1		–			4	1		–		
	5	5	1		–			0	1		–			3	1		–		
5	0	3		1	4		1	0		1	1		1	5		1	5		1
	2	0		1	5		1	5		1	4		1	0		1	4		1
	3	4	1		–			–			5	1		–			–		
	4	0			3			1			4			4			0		
	5	4	1		–			–			5	1		–			–		

$\chi = 100 \ : \ k_6 = 1;$

$\chi = 103 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi = 300 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 303 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^0; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 3.552E-05 \quad f_{max} = 6.183E-05 \quad f_{min} = 2.140E-05$

$n_{ges} = 140$

$r = 37 \qquad \mathcal{N}(r) = 1369$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0000; 0000)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	5	1		0		1	0		1	3			5		1	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	2	1		–			–			–			–			–		
	4	–			0			0			0			5			5		
	5	2	1		–			–			–			–			–		
	0	1			4	2		5	2		4			1			4		
	2	0			3			2			5			5			0		
1	3	5	1		3			2			5	1		0			5		
	4	5			1			4			0			–			–		
	5	5	1		1			4			5	1		4			1		
	0	1			–			–			4			–			–		
	2	0	1		–			–			4	1		–			–		
3	3	0			–			–			5			–			–		
	4	0			–			–			5			–			–		
	5	0			–			–			5			–			–		
	0	0			0	1		5			5	1		0			4	1	
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	–			0	1		–			5	1		–			4	1	
	4	3			–			0			–			5			–		
	5	–			4	1		–			5	1		–			0	1	
	0	3	1	1	–			–			1	1	1	–			–		
	2	0	1	1	–			–			4	1	1	–			–		
5	3	5			3			2			0			1			4		
	4	0	1		–			–			4	1		–			–		
	5	5			1			4			0			5			0		

$\chi = 100 \ : \ k_3 = 1;$

$\chi = 103 \ : \ k_4 = 1;$

$\chi = 300 \ : \ k_6 = 1;$

$\chi = 303 \ : \ k_5 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^0; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^0; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 4.223E-05 \quad f_{max} = 7.793E-05 \quad f_{min} = 1.623E-05$

$n_{ges} = 132$

$r = 7 + 33\zeta \qquad \mathcal{N}(r) = 1369$

$r \in k_S^\times / k_S^{\times 6} = (0002; 0040)$

	a_3	0			1			2			3			4			5		
a_1	a_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2		k_1	k_2
	0	–			5		2	0		1	1		2	4		2	5		1
	2	–			–			–			–			–			–		
0	3	–			–			–			–			–			–		
	4	5	1		1		1	2			0			0		1	1		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	–			3	-1	1	0	-1	2	–			3	-1	1	0	-1	2
	2	1		1	0	-1	1	2	-1	1	0		1	2	-1	1	0	-1	1
1	3	–			–			–			–			–			–		
	4	5			1	-1	1	0	-1		4			5	-1	1	2	-1	
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	3	-1	1	–			–			5	-1	1	–			–		
	2	0	-1	1	–			–			4	-1	1	–			–		
3	3	–			–			–			–			–			–		
	4	0	-1		–			–			0	-1		–			–		
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	0		2	–			5		2	–			0		2	–		
	2	–			–			–			–			–			–		
4	3	–			–			–			–			–			–		
	4	5			4	1		2			1	1		1			4	1	
	5	–			–			–			–			–			–		
	0	0	-1	1	1	-1	1	3	-1	1	4	-1	1	2	-1	1	2	-1	1
	2	1	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	5	-1	1	1	-1	1	5	-1	1
5	3	–			–			–			–			–			–		
	4	5	-1		2	-1		0	-1		3	-1		3	-1		5	-1	
	5	–			–			–			–			–			0		

$\chi = 104 \;:\; k_3 = 1; \qquad \chi = 145 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi = 300 \;:\; k_4 = 1; \qquad \chi = 343 \;:\; k_4 = 1;$

$\chi = 501 \;:\; k_4 = 1; \qquad \chi = 502 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi = 504 \;:\; k_4 = 1; \qquad \chi = 505 \;:\; k_3 = 1;$

$\chi_\pi(r) = \zeta^4; \quad \chi_\omega(r) = \zeta^4; \quad \chi_\zeta(r) = \zeta^0;$

$f_d = 3.855E-05 \quad f_{max} = 7.376E-05 \quad f_{min} = 1.788E-05$

$n_{ges} = 156$

Literatur

[E1] C. Eckhardt: *Eine neue analytische Methode zur Berechnung der Klassenzahl*

Diplomarbeit, Göttingen 1986

[E2] C. Eckhardt: *Eine Vermutung über biquadratische Thetareihen und ihre numerische Untersuchung*

Dissertation, Göttingen 1989

[EP] C. Eckhardt and S.J. Patterson: *On the Fourier coefficients of biquadratic theta series*

Proc. London Math. Soc. (3) **64**, 1992, S. 225 - 264

[F] W.L. Ferrar: *Summation formulae and their relation to Dirichlet's series II*

Comp. Math. **4**, 1937, S. 394 – 405

[HBP] D.R. Heath–Brown and S.J. Patterson: *The distribution of Kummer sums at prime arguments*

Journal für die reine und angewandte Mathematik **310** (1979), S. 111 – 130

[Ho] J. Hoffstein: *Theta functions on the n–fold metaplectic cover of* $SL(2)$ *— the function field case*

Invent. Math. **107** No. 1 (1992), S. 61 - 86

[KP] D.A. Khazdan and S.J. Patterson: *Metaplectic forms*

Publ. Math. I.H.E.S. **59** (1984), S. 35 – 142

[Ku] T. Kubota: *On automorphic forms and the reciprocity law in a number field*

Kinokuniya Book Store Co., Tokio, 1969

Lecture Notes Math. No. **348**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1973

[Mar] O.I. Marichev: *Handbook of integral transforms of higher transcendental functions*

Ellis Horwood, Chichester 1983

[P1] S.J. Patterson: *A cubic analogue of the Theta series*

Journal für die reine und angewandte Mathematik **296** (1977), S. 125 – 161

[P2] S.J. Patterson: *A cubic analogue of the Theta series II*
Journal für die reine und angewandte Mathematik **296** (1977), S. 217 – 220

[P3] S.J. Patterson: *Whittaker models of generalized Theta series*
in Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1982–83
Birkhäuser, Boston 1984 , S. 199–232

[P4] S.J. Patterson: *The distribution of general Gauss sums and similar arithmetic functions at prime arguments*
Proc. London Math. Soc. (3) **54** (1987), S. 193–215

[P5] S.J. Patterson: *A heuristic principle and applications to Gauss sums*
Journal of the Indian Math. Soc. **52** (1987), S. 1 – 22

[Po] L. Pontrjagin: *Topological groups*
Princeton University Press, 1946

[PFTV] W.H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical recipes in C* The Art of Scientific Computing
Cambridge University Press 1988

[Su1] T. Suzuki: *Some results on the coefficients of the biquadratic theta series*
Journal für die reine und angewandte Mathematik **340** (1982), S. 70–117

[Su2] T. Suzuki: *Rankin–Selberg convolutions of generalized theta series*
Journal für die reine und angewandte Mathematik **414** (1991), S. 149–205

[Su3] T. Suzuki: *On the biquadratic theta series*
Journal für die reine und angewandte Mathematik **438** (1993), S. 31–85

[T] J. Tate: *Fourier analysis in number fields and Heckes zeta function*
Algebraic Number Theory
edd.: J.W.S. Cassels, A. Fröhlich, Academic Press 1967

[W] G. Wellhausen: *Überprüfung der Hasse–Weilschen Vermutung für eine algebraische Kurve vom Geschlecht 3*
Diplomarbeit, Göttingen 1993

Lebenslauf

geboren am	25.08.1966	in Hannover
Eltern		Heinz Wellhausen und Renate Wellhausen, geb. Gerhold
Schulausbildung	1972 – 1976	Grundschule Neuhof (Hildesheim)
	1976 – 1985	Gymnasium Andreanum in Hildesheim
Studium	1985 – 1993	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Georg–August–Universität Göttingen Abschluß: Diplom am 21.04.1993. Thema der Diplomarbeit: " Überprüfung der Hasse–Weilschen Vermutung für eine algebraische Kurve von Geschlecht 3"
	1993 – 1996	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Sonderforschungsbereich 170