Wahrscheinlichkeits-Inhalte, Nonstandard-Methoden und Zahlentheorie

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Bernd Beyerstedt
aus
Nordenham

Göttingen 1996

D7
Referent: **Prof. Dr. S. J. Patterson**
Korreferent: **Prof. Dr. U. Stuhler**
Tag der mündlichen Prüfung: 30. Januar 1997

Danksagung

Für seine stets freundliche und geduldige Betreuung gebührt mein großer Dank Herrn Prof. Dr. S. J. Patterson, der diese Dissertation ermöglicht hat. Seiner immer offenen und niemals einschränkenden Unterstützung verdanke ich die interessanten und spannenden Themen dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. U. Stuhler danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Ich danke meinen lieben Eltern und Geschwistern für ihre stete Zuversicht und für ihr immer spürbares Einverständnis.

Mein Dank gilt all meinen Freunden und Kollegen, die mich in der vielfältigsten Form unterstützt haben.

Nicht zuletzt danke ich Steffi, die mir in der langen Zeit des gedanklichen Werdens dieser Arbeit und in der kurzen Zeit ihres physischen Entstehens tagtäglich mit ihrer Liebe zur Seite stand.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation und Thematik

Asymptotische Mittelwertbildungen spielen in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle. Bezeichnet μ die Möbius-Funktion, so gilt z.B.

(I) Der Primzahlsatz von Hadamard & de la Vallée Poussin folgt aus der Tatsache, daß $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n\leq N} \mu(n)$ existiert.

(II) Die Riemannsche Vermutung ist genau dann richtig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \sum\limits_{n\leq N} \mu(n) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

Dieselben Aussagen sind richtig, wenn an Stelle der Möbius-Funktion μ die Liouville-Funktion λ betrachtet wird, welche jeder natürlichen Zahl den Wert 1 zuordnet, wenn die Anzahl ihrer Primfaktoren, mit Vielfachheit gezählt, gerade ist und sonst den Wert -1 hat.
In seinem 1931 erschienenen Artikel [Den] stellt A. Denjoy folgende heuristische Überlegungen an, die zu einer "wahrscheinlichkeitstheoretischen Interpretation" der Riemannschen Vermutung führen:

Betrachte ein faires Münzwurfexperiment nach "genügend vielen", sagen wir N, Würfen. Nach dem Satz von de Moivre Laplace ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz zwischen geworfenen "Köpfen" und geworfenen "Zahlen" dem Betrage nach kleiner ist als $K\sqrt{N}$, ungefähr $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K}^{K} \exp(\frac{y^2}{2})dy$. Setzen wir bei gegebenen $\varepsilon > 0$ $K := N^\varepsilon$, so ist also die Wahrscheinlichkeit, daß diese Differenz kleiner ist als $N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ungefähr $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N^\varepsilon}^{N^\varepsilon} \exp(\frac{y^2}{2})dy$. Dieser Wert konvergiert gegen 1 für $N \to \infty$. Aus diesem Grund können wir sagen:
Mit Wahrscheinlichkeit 1 wächst die Differenz zwischen geworfenen "Köpfen" und geworfenen "Zahlen" weniger schnell als $N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.
Betrachte jetzt eine "große" Zahl n. Im Allgemeinen wird n eine große Anzahl von Primteilern besitzen, da die Primzahlen relativ dünn gesäht sind. Es ist daher plausibel, daß die Werte 1 und -1 von λ mit derselben Wahrscheinlichkeit angenommen werden, nämlich $\frac{1}{2}$. Außerdem scheint der Wert von $\lambda(n)$ i.a. keinen Aufschluß auf andere Werte von λ zuzulassen, was zur Annahme berechtigt, daß die Ereignisse $\lambda(m)$, $m \in \mathbb{N}$, unabhängig voneinander sind. Zusammengefaßt können wir als plausibel annehmen:
Die sukzessive Berechnung der Werte von λ verhält sich wie ein faires Münzwurfexperiment mit Ausgängen 1 und -1.
Mit diesen Annahmen können wir aus der obigen Anmerkung über faire Münzwurfexperimente schließen:

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{n\leq N} \lambda(n) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad \text{"mit Wahrscheinlichkeit 1".}$$

Wir haben oben bemerkt, daß die Riemannsche Vermutung äquivalent ist zu

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{n \leq N} \lambda(n) = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Es besteht daher eine gewisse Berechtigung zu behaupten:

"Die Riemannsche Vermutung ist mit Wahrscheinlichkeit 1 richtig."

H.M. EDWARDS bemerkt dazu in seinem Buch [Edw]:
"*One of the things which makes the Riemann hypothesis so difficult is the fact that there is no plausibility argument, no hint of a reason, however unrigorous, why it should be true. This fact gives some importance to Denjoy's probabilistic interpretation of the Riemann hypothesis which, though it is quite absurd when considered carefully, gives a fleeting glimmer of plausibility to the Riemann hypothesis.*"

Wir kommen am Ende der Arbeit auf DENJOYS Interpretation der Riemannschen Vermutung zurück.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Ideen und Ergebnisse kommen in der Zahlentheorie schon seit langer Zeit zur Anwendung. Diese beschränken sich nicht auf heuristische Überlegungen oder auf adhoc-Methoden in speziellen Situationen.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, auch eine systematische Einbindung wahrscheinlichkeitstheoretischer oder ähnlicher Methoden in die Zahlentheorie zu erreichen. Wir nennen als Beispiele die Methoden von J. KUBILIUS (vgl. [Kub]) und die Theorie der "Symbolic flows" (vgl. z.B. [Fur]). Im erstgenannten Beispiel erwachsen die Methoden an Fragestellungen aus der Analytischen Zahlentheorie; insbesondere liegt ein Interesse vor am asymptotischen Verhalten gewisser Mittelwertbildungen. Im zweiten Beispiel betrachtet man geeignete, aus zahlentheoretischen Objekten konstruierte, Dynamische Systeme. Die resultierenden zahlentheoretischen Aussagen sind kombinatorischer Art.
Ein direkter, intuitiver Zugang, wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden in der Zahlentheorie anzuwenden, wäre durch ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$ gegeben. Die Abzählbarkeit von $\mathbb{N}$ stellt dem aber ein Hindernis entgegen. Ist man nämlich z.B. am asymptotischen Verhalten von Mittelwertbildungen interessiert, so sollte ein "gutes" Wahrscheinlichkeitsmaß endlichen Mengen das Maß Null zuordnen. Solch ein Maß kann es aber aufgrund der Maßstetigkeit nicht geben. Dieses Problem zu umgehen, werden in den oben genannten Beispielen verschiedene Wege gegangen.

Mit der vorliegenden Arbeit verfolgen wir verschiedene Anliegen.

Zum einen soll die Möglichkeit einer weiteren Methode aufgezeigt werden, wie prinzipiell wahrscheinlichkeitstheoretische Erkenntnisse innerhalb der Zahlentheorie zur Anwendung gebracht werden können. Der dargestellte Zugang ist dabei insofern "direkt", als die natürlichen Zahlen in gewisser Weise tatsächlich als Wahrscheinlichkeitsraum aufgefaßt werden. Der Hauptteil der Arbeit wird sich desweiteren damit beschäftigen, für diese Methodik eine theoretische Grundlage zu schaffen. Wir merken schon hier an, daß die bisherigen Anwendungen auf zahlentheoretische Probleme sich in einem bescheidenen Rahmen halten.

Wir erläutern nun die prinzipielle Idee. Wie oben schon angedeutet, steht dem direkten Zugang wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden in der Zahlentheorie die Tatsache im Wege, daß auf $\mathbb{N}$ kein "sinnvolles" Wahrscheinlichkeits-Maß existieren kann. Wir lassen daher die

Forderung nach Stetigkeit des Maßes fallen und betrachten stattdessen lediglich sogenannte Inhalte (vgl. [Bau]) auf der Algebra $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$. Für diese Inhalte stehen allerdings zunächst keine wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen zur Verfügung.
Durch Nonstandard-Methoden wird ein Zugang zu solchen Aussagen dennoch ermöglicht. Wir werden in der vorliegenden Arbeit intensiven Gebrauch von Nonstandard-Methoden machen und verweisen hier schon im voraus auf Kapitel 3. P. Loeb zeigt in seinen Artikeln [Loe1] und [Loe2] wie aus internen Inhalten externe Maße gewonnen werden können. Wir leiten hieraus eine Wahrscheinlichkeitstheorie für Wahrscheinlichkeits-Inhalte (W-Inhalte) her. Die Handhabung von W-Inhalten wird zudem durch Nonstandard-Methoden sehr vereinfacht. W-Inhalte werden stets durch *-endliche Summation über interne Wichtefunktionen dargestellt.

W-Inhalte, die endlichen Mengen den Inhalt Null zuordnen, sind auf der einen Seite hochgradig unkonstruktiv, auf der anderen Seite gibt es so viele, daß Aussagen über einzelne von ihnen kaum von Bedeutung sind. Aussagen, die für jeden W-Inhalt einer "genügend großen" Menge zutreffen, lassen sich aber i.a. als asymptotisches Ergebnis einer Mittelwertbildung deuten. Dieser Schritt stellt nun abschließend die Verbindung zur Zahlentheorie dar und eröffnet die prinzipielle Möglichkeit, Aussagen jener Art zu beweisen.
Eine solche Argumentation wird durch das *Transfer*-Axiom des Nonstandard-Modells ermöglicht. Wir geben dazu folgendes Beispiel an.
Im Abschnitt 5.4 werden "reguläre Inhalte" eingeführt. Satz 5.17 sagt aus: Ist $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, so gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n) = c \;\Leftrightarrow\; \forall \text{ regulären W-Inhalte } \lambda \text{ gilt } \lambda f = c.$$

Von besonderer Bedeutung werden in der Zahlentheorie W-Inhalte sein, die invariant sind unter der Shiftabbildung $\mathcal{S} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n) := n + 1$ (und unter diesen speziell die regulären W-Inhalte). Für Shift-invariante W-Inhalte sind die Bewertungsabbildungen v_p, p Primzahl, "unabhängige Zufallsvariable", weshalb eine wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung möglich wird.

Ein Hauptanliegen der Arbeit ist es, bei gegebener Transformation eines Raumes, die Strukturen der Menge der invarianten Inhalte zu untersuchen.

Geleitet von der Theorie invarianter Maße, haben wir versucht, die Existenz ergodischer Loeb-Maße, die von W-Inhalten induziert sind, nachzuweisen. Dieses gelang nicht, da die Loeb-Räume zu groß sind. Ein Ausweg konnte gefunden werden, indem wir zu der Stone-Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ bzgl. der diskreten Struktur übergegangen sind. Diese Räume sind in kanonischer Weise kompakt und W-Inhalte induzieren auf ihnen reguläre Borelmaße. Aufgrund der strukturellen Vorteile der Stone-Čech-Kompaktifizierungen stellen diese und die zugehörigen induzierten Borel-Maße ein geeignetes Mittel dar, um W-Inhalte zu untersuchen. Wir entwickeln daher Grundlagen, um Ergebnisse über diese Räume zu erhalten.
Neben der Möglichkeit, wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen durch die Borelmaße zu erhalten, eröffnet sich eine weitere Möglichkeit durch die Betrachtung der Stone-Čech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$. Da der Shift eine stetige Abbildung auf der Stone-Čech-Kompaktifizierung induziert, kann diese als Dynamisches System aufgefaßt werden. Im Rahmen der Arbeit werden wir auf diesen Aspekt nicht weiter eingehen; wir verweisen auf [Gla].

1.2 Das Programm der Arbeit

In Kapitel 2 stellen wir die Nonstandard-Modelle, deren Terminologie und Axiomatik, vor, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Bei der Beschreibung und Konstruktion dieser Modelle halten wir uns eng an den Artikel [Lind] von T. LINDSTRØM. Es werden im Verlauf der Arbeit lediglich die axiomatisch gegebenen Eigenschaften solcher Nonstandard-Modelle ausgenutzt, nicht deren spezielle Gestalt.

Im anschließenden Kapitel 3 wird zunächst die Methode erläutert, auf welche Weise Nonstandard-Modelle Verwendung finden, d.h. wie prinzipiell die Methodik zur Untersuchung mathematischer Objekte mit Hilfe von Nonstandard-Modellen aussieht. Anschließend werden allgemeine technische Hilfsmittel zur Umsetzung einer solchen Methodik erstellt. Diese sind Übersetzungen der axiomatisch gegebenen Eigenschaften der Nonstandard-Modelle in die Begriffswelt der "üblichen" Mathematik. Ein Bindeglied wird dabei eine Verallgemeinerung des klassischen *Overflowprinzips* sein (Lemma 3.3).
Hiermit wird daraufhin die Theorie externer, Uniformer Strukturen untersucht. Ein großer Teil der axiomatischen Vorteile von Nonstandard-Modellen kann durch Aussagen über solche Uniforme Strukturen zum Ausdruck gebracht werden. Wir beweisen dazu u.a. den Satz, daß jede zulässige Uniforme Struktur vollständig ist (Satz 3.8), der den Begriff der *Saturiertheit* in eine handliche Form bringt. Abschließend stellen wir die Konstruktion der sogenannten Loeb-Maße von P. LOEB vor, die hier mit Hilfe der Theorie der zulässigen Uniformen Strukturen durchgeführt wird. Loeb-Maße spielen im weiteren Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle.

Durch die in Kapitel 3 getroffenen Vorbereitungen, sind wir in Kapitel 4 in der Lage, Stone-Čech-Kompaktifizierungen mittels Nonstandard-Methoden zu konstruieren, die im späteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels beweisen wir, ebenfalls mit Nonstandard-Methoden, eine weitere Interpretation von Stone-Čech-Kompaktifizierungen für Halbgruppen (Satz 4.10). Hier interessiert uns insbesondere die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$.

Kapitel 5 stellt das Kernstück der Arbeit dar. Wir untersuchen W-Inhalte auf einer gegebenen Menge X, das sind positive, normierte Linearformen μ auf dem Vektorraum der beschränkten, reellwertigen Funktionen $\mathcal{B}(X)$ (vgl. Seite 31).
Im ersten Teil geht es darum, mit Hilfe von Nonstandard-Modellen eine Wahrscheinlichkeitstheorie für W-Inhalte aufzubauen. Wir zeigen u.a., daß Grenzwertsätze wie z.B. der Satz von Berry-Esséen auch für W-Inhalte Gültigkeit besitzen (Satz 5.6).
Der Rest des Kapitels ist der Untersuchung der W-Inhalte als solcher und der strukturellen Beschaffenheit der Menge der W-Inhalte auf einer gegebenen Menge X gewidmet. Wir konstruieren dazu aus W-Inhalten Wahrscheinlichkeits-Maße auf der zugehörigen Stone-Čech-Kompaktifizierung, welche ein kompakter Raum ist. Dieses geschieht mit Hilfe der Theorie der Loeb-Maße. Die so induzierten Maße sind reguläre Borel-Maße im Sinne der Maßtheorie. Wir zeigen u.a., daß die guten Stetigkeitseigenschaften von Loeb-Maßen sich auf die induzierten Borelmaße übertragen (Satz 5.10). Der Vorteil der auf den Stone-Čech-Kompaktifizierungen induzierten Borel-Maßen gegenüber Loeb-Maßen wird bei der Untersuchung von W-Inhalten deutlich, die invariant sind unter einer gegebenen Transformation T des Raumes X. Wir zeigen u.a., daß der Raum der T-invarianten W-Inhalte aufgespannt wird von solchen

W-Inhalten, deren induzierte Borelmaße ergodisch sind (Korollar 5.29). Diese Ergodizität beinhaltet kontrollierbare Stetigkeitseigenschaften des zugehörigen W-Inhalts (vgl. z.B. Korollar 5.26).
Es stellt sich heraus, daß gewissen W-Inhalten auf $\mathbb{N}$ eine wichtige Rolle bei der Untersuchung invarianter W-Inhalte zukommen. Wir charakterisieren diese *regulären* W-Inhalte vollständig innerhalb eines Nonstandard-Modells (Satz 5.19).

In Kapitel 6 wird versucht, die Ergebnisse aus dem Vorangegangenen unter einem zahlentheoretischen Aspekt zu betrachten. Die Resultate aus Kapitel 5 können dabei allerdings bisher nur in geringfügigem Maße ausgenutzt werden. Wir erläutern im ersten Abschnitt anhand von Beispielen die Methodik, mit welcher man hoffen kann, zu Ergebnissen zu gelangen. Innerhalb zahlentheoretischer Anwendungen kommt den Shift-invarianten Inhalten eine Bedeutung zu, da in diesem Fall die Bewertungsabbildungen v_p, p Primzahl, unabhängige "Zufallsvariable" sind (s.o.). Wir zeigen dieses und leiten mit Hilfe des ersten Abschnittes ein einfaches Ergebnis her.
Im letzten Abschnitt zeigen wir, wie Denjoys Interpretation der Riemannschen Vermutung mittels der vorgestellten Methode gedeutet werden kann.

2 Superstrukturen und Nonstandard-Modelle

Es wird in diesem Kapitel der Rahmen festgelegt und beschrieben, in welchem sich die in der vorliegenden Arbeit benutzten Nonstandard-Methoden bewegen sollen. Dieser Rahmen wird gegeben durch ein Nonstandard-Modell einer geeigneten Superstruktur (zur Definition s.u.). Die Modelle selbst sollen in dieser Arbeit nicht von Interesse sein, sondern lediglich als sinnvolles Hilfsmittel eingesetzt werden. Wir werden daher ein adäquates (aber variabel gehaltenes) Modell wählen, welches den Ansprüchen und Bedürfnissen in hinreichender Weise genügt, ohne dabei Rücksicht zu nehmen, ob das eine oder andere Problem mit Hilfe schwächerer Modelle behandelt werden könnte. (An dieser Stelle erscheint es angebracht zu bemerken, daß Aussagen, die mit Hilfe des Umweges über Nonstandard-Modelle gewonnen werden können, prinzipiell auch ohne Nonstandard-Methoden bewiesen werden können.) Wir werden hierbei weiterhin einen axiomatischen Standpunkt einnehmen. Das bedeutet, daß nicht von der speziellen Struktur und Konstruktion gewisser Modelle Gebrauch gemacht werden wird, sondern lediglich die axiomatisch beschreibbaren Eigenschaften eines solchen Modells ausgenutzt werden. Aus diesen Gründen ist es nicht sinnvoll, hier eine ausführliche und formal korrekte Theorie dieser Nonstandard-Modelle darzubieten. Wir begnügen uns mit einer kurzen, auf unsere Bedürfnisse zugeschnittene, Einführung, ähnlich denen in einigen anwendungsbezogenen Artikeln. Ebenso sei darauf verzichtet, die Motivation zu erläutern, Nonstandard-Methoden als sinnvoll anzusehen.
Wir weisen darauf hin, daß der vorliegende Abriß über Nonstandard-Modelle ein unvollständiges Substrat aus dem Artikel [Lind] von T. Lindstrøm ist.

2.1 Axiomatik

Definition: Sei S eine unendliche Menge. Wir definieren rekursiv:

$$\begin{aligned} V_0(S) &:= S \\ V_{n+1}(S) &:= V_n(S) \cup \mathfrak{P}(V_n(S)) \\ V(S) &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} V_n(S) \end{aligned}$$

Die Menge $V(S)$ heißt die *Superstruktur* über S. Für $x \in V(S)$ sei $\mathrm{rk}(x) := \min\{n \in \mathbb{N}_0,\ x \in V_n(S)\}$ der *Rang* von x.
(Hier und im Weiteren soll immer stillschweigend davon ausgegangen werden, daß wir uns innerhalb eines Modells der Mathematik befinden, welches z.B. durch die ZFC-Axiome bestimmt ist (Zermelo-Fraenkel & Axiom of Choice).)

Die Elemente von S sollen in der obigen Konstruktion stets als Urelemente aufgefaßt werden, nicht als Mengen. Hiermit werden Unklarheiten vermieden, welche entstehen könnten,

wenn Elemente von S eventuell als Elemente bestimmter anderer Elemente von S aufgefaßt würden. Die Elemente einer Superstruktur werden mitunter auch als *Objekte* bezeichnet.
Um sich von der Größe einer solchen Superstruktur ein Bild zu machen, ist es hilfreich, mathematische Objekte aus der Sichtweise des Mengentheoretikers zu betrachten, durch welche sie zu Mengen mit spezifischen Eigenschaften werden (eine Funktion ist z.B. eine Menge von geordneten Paaren, in der jede mögliche erste Komponente höchstens einmal auftritt). Ist dann z.B. $X \in V(S)$, so sind alle Funktionen, Funktionale, Funktionale von Funktionalen auf X, etc. auch Objekte von $V(S)$. Für ein geordnetes Paar $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, $x, y \in X$, gilt nämlich $\mathrm{rk}(\langle x, y\rangle) = \mathrm{rk}(X)+2$. Entprechend gilt für eine Funktion f auf X $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(X)+3$, etc.
Wir werden im Verlauf dieser Arbeit immer stillschweigend voraussetzen, daß unsere benutzten Superstrukturen groß genug sind, um alle uns interessierenden Objekte zu beinhalten (was stets durch geeignete Wahl von S erreicht werden kann).

Bevor der Begriff des Nonstandard-Modells einer Superstruktur eingeführt wird, wollen wir eine kurze Bemerkung über die Begriffe "Term", "Formel", "Aussage", etc. innerhalb einer Superstruktur machen. Wir erheben dabei keinerlei Anspruch auf Exaktheit oder Vollständigkeit. Diese aus der formalen Logik stammenden Begriffe entsprechen aber sehr genau denen der intuitiven Vorstellung.

(1) *Terme* erhält man durch wiederholtes Anwenden von Funktionen, ausgehend von Variablen $(v_1, v_2, ...)$ und Konstanten (den Elemente aus $V(S)$).

(2) *Formeln* sind syntaktisch sinnvolle Verknüpfungen von Termen mittels der Relationssymbole $=, \in$, der logische Symbole $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ und der Quantoren $\exists, \forall$.

(3) *Aussagen* sind Formeln ohne freie Variablen (d.h. alle vorkommenden Variablen liegen im Bereich eines Quantors).

Zwei Dinge sind in Bezug auf Superstrukturen zu beachten, wenn im Folgenden von Funktionen bzw. Formeln etc. gesprochen wird. Zum einen darf nur über die Elemente aus $V(S)$ quantifiziert werden. Zum anderen sind nicht beliebige Funktionen zugelassen, sondern lediglich solche, welche nicht zu ungestüm innerhalb der Superstruktur umherspringen. Genauer bedeutet dies, es werden nur (partiell definierte) Funktionen

$$f : V(S)^k \longrightarrow V(S), \quad k \in \mathbb{N},$$

berücksichtigt, für die gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ [(a_1, a_2, ...a_k) \in V_n(S) \Rightarrow f(a_1, a_2, ...a_k) \in V_m(S)].$$

Es stellt dies aber keine Einschränkung dar, wenn man mit "gewöhnlichen" mathematischen Sachverhalten zu tun hat.

Definition: Sei S eine unendliche Menge. Ist ${}^*S$ eine Menge und ${}^* : V(S) \longrightarrow V({}^*S)$ eine Abbildung, die S auf ${}^*S$ abbildet, so heißt das Tripel $(V(S), V({}^*S), {}^*)$ ein *Nonstandard-Modell* von $V(S)$, wenn die folgenden zwei Eigenschaften vorliegen:

(*Extension*) $S \subset {}^*S$, $S \neq {}^*S$ und $\forall s \in S\ {}^*s = s$.

(*Transfer*) Ist φ eine Aussage in $V(S)$, so gilt φ in $V(S)$ genau dann, wenn die transferierte Formel ${}^*\varphi$ in $V({}^*S)$ gilt.
(Ist φ z.B. die Formel $\exists v_1 \in X\ v_1 \neq a$ mit $a, X \in V(S)$, so ist ${}^*\varphi$ die Formel $\exists v_1 \in {}^*X\ v_1 \neq {}^*a$.)

Definition: Ein Objekt ${}^*x \in V({}^*S)$ mit $x \in V(S)$ heißt *Standard-Objekt* oder einfach *standard*. Die Menge der Standard-Objekte ist also gerade das Bild von $V(S)$ unter *.
Ein Objekt $a \in V({}^*S)$ heißt *intern*, falls es ein $X \in V(S)$ gibt mit $a \in {}^*X$. D.h. die internen Objekte sind gerade die Elemente der Standard-Objekte.

(*Saturiertheit*) Ein Nonstandard-Modell $(V(S), V({}^*S), {}^*)$ heißt bei gegebener Kardinalzahl κ *κ-saturiert*, falls gilt:
Ist card(Γ)$< \kappa$ und $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ eine Familie interner Mengen mit der *finite-intersection-property*, d.h. der Durchschnitt je endlich vieler Mengen aus $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ist nicht leer, so gilt
$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset.$$
$(V(S), V({}^*S), {}^*)$ heißt *polysaturiert*, falls $(V(S), V({}^*S), {}^*)$ card($V(S)$)-saturiert ist.

Satz 2.1. *Zu jeder unendlichen Menge S existiert ein polysaturiertes Nonstandard-Modell der zugehörigen Superstruktur $V(S)$.*

Beweis. [Lind] $\square$

Es sei bemerkt, daß solche Modelle in keiner Weise eindeutig bestimmt sind.

Hinreichend saturierte Nonstandard-Modelle, insbesondere polysaturierte Modelle, sind die in der vorliegenden Arbeit verwendeten. Wir fordern card($\mathbb{N}$)$^+$-*Satutiertheit* von jedem von uns benutzten Modell. Zur Nutzbarmachung solcher Modelle sei auf das folgende Kapitel verwiesen.
Im Sinne der eingangs gemachten Bemerkungen werden wir an manchen Stellen *Polysaturiertheit* fordern, wenn es aus Gründen der einfacheren Darstellung angebracht erscheint, ohne Rücksicht darauf, ob dies notwendig ist. Um uns die Mengen S und ${}^*S$ in diesem Sinne variabel zu halten, werden wir eine andere Notation bevorzugen, und zwar wird für den weiteren Verlauf der Arbeit folgende Bezeichnung gewählt:
$$\mathfrak{M} := V(S) \quad {}^*\mathfrak{M} := V({}^*S).$$
Es wird dann auch von dem Nonstandard-Modell ${}^*\mathfrak{M}$ (und seinen Eigenschaften) gesprochen, wenn $(\mathfrak{M}, {}^*\mathfrak{M}, {}^*)$ gemeint ist.
Es wird außerdem aus Gründen der Übersichtlichkeit und Einfachheit vorkommen, daß nicht immer strikt zwischen den Objekten von $V(S)$ und $V({}^*S)$ unterschieden wird. Ist z.B. $X \in V(S)$ und $x \in X$, so wird gelegentlich x mit ${}^*x$ identifiziert. In keinem Fall kann es dabei zu Verwechselungen oder Unklarheiten führen, sondern es wird im Gegenteil zu einer größeren Übersicht beitragen. Das Entfallen des * kann auch bei "Symbolen" oder Verknüpfungszeichen auftreten; auch hier wird dies nicht zu Verwechselungen führen können.

2.2 Kurze Skizze einer Konstruktion

In diesem Abschnitt soll in knapper Form eine mögliche Konstruktion für Nonstandard-Modelle von Superstrukturen gegeben werden (eine ausführliche Beschreibung findet sich z.B. im Artikel [Lind] von T. LINDSTRØM).
Diese Konstruktion ist eine Ultrapotenzkonstruktion und benötigt zu ihrer Beschreibung den Begriff des freien Ultrafilters (wir verweisen auf [Rich]). Wir wollen hier einen äquivalenten Begriff benutzen, der auch im obigen Artikel Verwendung findet und dem Anliegen der vorliegenden Arbeit entgegenkommt. In Ermangelung eines besseren Ausdrucks nennen wir diesen *Ultrainhalt*.

Definition: Ist I eine unendliche Menge, so heißt ein endlich-additiver Inhalt μ auf $(I, \mathfrak{P}(I))$ ein *Ultrainhalt*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(I) $\forall A \subset I \; \mu(A) \in \{0,1\}$

(II) $\mu(I) = 1$

(III) für alle endlichen $A \subset I \; \mu(A) = 0$.

Bemerkung: Freie Ultrafilter und Ultrainhalte korrespondieren miteinander durch

$$\begin{aligned} \mu &\mapsto \mathcal{F} := \{A \subset I, \; \mu(A) = 1\} \\ \mathcal{F} &\mapsto \mu, \; A \mapsto \begin{cases} 1, & A \in \mathcal{F} \\ 0, & A \notin \mathcal{F}. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese existieren, wie man mit Hilfe des Zornschen Lemmas nachprüfen kann; es gibt sogar "sehr viele".

Wir wenden uns jetzt der eigentlichen Konstruktion eines Nonstandard-Modells zu. Sei also S eine unendliche Menge und $V(S)$ die zugehörige Superstruktur. Es soll zunächst eine Menge ${}^*S$ konstruiert werden (die in keiner Weise eindeutig bestimmt ist). Als Hilfsobjekte ziehen wir dazu eine unendliche Menge I und einen Ultrainhalt μ auf I heran.
Auf $S^I := \{(s_i)_{i \in I}, \; s_i \in S\}$ betrachte die folgende Äquivalenzrelation

$$(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \;\; :\Leftrightarrow \;\; \mu(\{i \in I, a_i = b_i\}) = 1,$$

und definiere

$${}^*S := S^I / \sim .$$

D.h. zwei Familien werden als gleich angesehen, wenn sie sich lediglich auf kleinen Mengen (solche vom μ-Inhalt 0) unterscheiden bzw. wenn sie "fast überall" gleich sind. ${}^*S$ trägt dieselben Strukturen wie S. Das ist die Aussage des Ultrapotenzsatzes von ŁOS und der entscheidende Grund dafür, weshalb das im Weiteren genauer beschriebene Tripel $(V(S), V({}^*S), {}^*)$ das Transferaxiom erfüllt und ein Nonstandard-Modell ist.

In einem zweiten Schritt wird jetzt die Abbildung $^* : V(S) \to V({}^*S)$ konstruiert.
Eine Familie $(a_i)_{i \in I} \in V(S)^I$ heißt *beschränkt*, falls es ein $p \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß $\forall i \in I \; a_i \in V_p(S)$. Aufgrund der Eigenschaften des Ultrainhalts gibt es dann ein $n \leq p$, so daß $\mu(\{i \in I, \; \mathrm{rk}(a_i) = n\}) = 1$, und es kann der Rang von $(a_i)_{i \in I}$ definiert werden durch

$$\mathrm{rk}((a_i)_{i\in I}) := n.$$

Durch Induktion über den Rang wird nun jeder beschränkten Familie $(a_i)_{i\in I}$ ein Element $\langle a_i\rangle_{i\in I} \in V({}^*S)$ zugeordnet.
Sei $\mathrm{rk}((a_i)_{i\in I}) = 0$. Dann kann $(a_i)_{i\in I}$ eventuell auf einer Menge von μ-Inhalt 0 so abgeändert werden, so daß $\forall i \in I \; a_i \in S$ ist, und es sei definiert

$$\langle a_i\rangle_{i\in I} := (a_i)_{i\in I}/\sim \quad \in {}^*S.$$

Ist für alle $(b_i)_{i\in I}$ mit $\mathrm{rk}((b_i)_{i\in I}) \leq n$ $\langle b_i\rangle_{i\in I}$ bereits erklärt, so sei für $\mathrm{rk}((a_i)_{i\in I}) = n+1$

$$\langle a_i\rangle_{i\in I} := \{\langle b_i\rangle_{i\in I},\ \mathrm{rk}((b_i)_{i\in I}) \leq n \text{ und } \mu(\{i \in I,\ b_i \in a_i\}) = 1\}.$$

Schließlich kann * definiert werden durch

$$^* : V(S) \to V({}^*S), \quad a \mapsto \langle a\rangle_{i\in I}.$$

Wie schon angedeutet, läßt sich nun mittels des Ultrapotenzsatzes von Łos (s. z.B. [Rich] oder [Lind]) der folgende in [Lind] bewiesene Satz zeigen.

Satz 2.2. *Das soeben konstruierte Tripel* $(V(S), V({}^*S), {}^*)$ *ist ein Nonstandard-Modell der Superstruktur* $V(S)$.

Hierbei ist dann die Menge der wie oben definierten $\langle a_i\rangle_{i\in I}$ mit $((a_i)_{i\in I}) \in S^I$ beschränkt, gerade die (externe) Menge der internen Objekte von $V({}^*S)$.

Die zusätzliche Forderung nach *Saturiertheit* kann durch die Wahl geeigneter Ultrainhalte erfüllt werden, die bei der Konstruktion benutzt werden. Wir wollen abschließend lediglich angeben, was das genauer bedeutet. Dabei sind die Bedingungen, die an die Ultrainhalte gestellt werden müssen, ihrem Äußeren nach von technischer Natur. Wir bedienen uns der englischen Ausdrücke.
Definition: Sei I eine unendliche Menge. Ein Ultrainhalt μ auf I heißt *countably incomplete*, falls es eine strikt fallende Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen in I gibt, so daß

$$\forall n \in \mathbb{N}\; \mu(I_n) = 1 \quad \text{und} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Definition: Bezeichnet $\mathfrak{P}_0(\Gamma)$ die Menge der endlichen Teilmengen der Menge Γ, so sei ein *reversal* eine Abbildung

$$f : \mathfrak{P}_0(\Gamma) \longrightarrow \{A \subset I,\ \mu(A) = 1\} \quad \text{mit} \quad \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \;\Rightarrow\; f(\Gamma_1) \subset f(\Gamma_2).$$

Ein *strict reversal* ist eine Abbildung

$$g : \mathfrak{P}_0(\Gamma) \longrightarrow \{A \subset I,\ \mu(A) = 1\} \quad \text{mit} \quad g(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = g(\Gamma_1) \cap g(\Gamma_2).$$

Definition: Sei card$(I)=\kappa$. Ein Ultrainhalt μ auf I heißt *κ-good*, falls für alle Γ mit card$(\Gamma)<\kappa$ gilt:
Für alle reversal $f : \mathfrak{P}_0(\Gamma) \longrightarrow \{A \subset I,\ \mu(A) = 1\}$ gibt es ein strict reversal $g : \mathfrak{P}_0(\Gamma) \longrightarrow \{A \subset I,\ \mu(A) = 1\}$ derart, daß

$$\forall \Gamma' \in \mathfrak{P}_0(\Gamma)\; g(\Gamma') \subset f(\Gamma').$$

Mit den beiden folgenden ebenfalls in [Lind] bewiesenen Sätzen schließen wir dieses Kapitel.

Satz 2.3. *Ist card(I)=* κ*, so gibt es einen countably incomplete,* κ^+*-good Ultrainhalt auf* I.

Satz 2.4. *Wird das oben beschriebene Nonstandard-Modell mittels eines countably incomplete,* κ*-good Ultrainhalts konstruiert, so ist es* κ*-saturiert.*

3 Externe Strukturen

Im vorigen Kapitel wurden Nonstandard-Modelle eingeführt. Es soll kurz die Methodik erläutert werden, wie mit ihrer Hilfe mathematische Objekte untersucht werden können.
Sei dazu $(\mathfrak{M}, {}^*\mathfrak{M}, {}^*)$ ein solches Nonstandard-Modell und $X \in \mathfrak{M}$ ein uns interessierendes Objekt. Man wird dann ${}^*X$ untersuchen; ein entscheidender Schritt liegt nun darin, bei dieser Untersuchung den Rahmen der internen Mengen zu verlassen und auch mit externen Mengen zu operieren (in der Sprache der Logik bedeutet dies, wir können das Prädikat *standard* in unseren Formeln verwenden). Dies ermöglicht es, auf ${}^*X$ externe Strukturen zu definieren mit denen "ganz normal" gearbeitet werden kann. Dabei werden die internen Eigenschaften von ${}^*X$ benutzt, die sich durch *Transfer* von X vererben. Außerdem spiegelt sich eine hinreichende *Saturiertheit* von ${}^*\mathfrak{M}$ in gewissen Vollständigkeitseigenschaften externer Strukturen auf ${}^*X$ wieder (was der Name schon suggeriert), die daher (i.a.) für eine Vereinfachung der Situation sorgen. Sind schließlich aufgrund externer Untersuchungen (externe) Aussagen über ${}^*X$ bewiesen worden, ist es möglich, sie durch Transfer auf Aussagen über X zurück zu interpretieren.
Es erscheint daher zweckmäßig, zunächst zu untersuchen, welche Konsequenzen und Vorteile aus der *Saturiertheit* gezogen werden können und welcher Art diese sind. Die Behandlung dieses Problems stellt ein wesentliches Anliegen des nachfolgenden Abschnitts dar und wird dort in einem relativ allgemeinen Zusammenhang behandelt. Wir halten dazu ein Nonstandard-Modell $(\mathfrak{M}, {}^*\mathfrak{M}, {}^*)$ fest. Ein geeigneter Rahmen, Ergebnisse zu gewinnen und festzuhalten, stellt die Terminologie und Theorie der Filter dar, was nicht überraschend ist, da die *Saturiertheits*-Bedingung gerade besagt, daß gewisse Filterbasen einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. Diese Idee ist z.B. schon bei MACHOVER & HIRSCHFELD [Mach-Hir] zu finden, die sich allerdings auf Filterbasen einschränken, deren Elemente Standard-Mengen sind. Der Grund liegt darin, daß der Begriff der *Saturiertheit* nicht in seiner Allgemeinheit Verwendung findet.

Es seien folgende Bezeichnungen und Definitionen vereinbart:
Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ heiße *Pseudo-Filterbasis*, falls gilt: $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists H \in \mathcal{F},\ H \subset F \cap G$. Eine Pseudo-Filterbasis F heißt *Filterbasis*, falls $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Eine Filterbasis $\mathcal{F}$ heißt *Filter*, falls gilt: $F \in \mathcal{F} \ \wedge \ A \supset F \ \Rightarrow \ A \in \mathcal{F}$. (Dies deckt sich mit der allgemein üblichen Bezeichnungsweise.) Wir sagen, daß eine Filterbasis $\mathcal{F}$ *feiner* ist als eine Filterbasis $\mathcal{G}$, wenn der von $\mathcal{F}$ erzeugte Filter eine Obermenge des von $\mathcal{G}$ erzeugten Filters ist.

3.1 Das Overflowprinzip

Das klassische *Overflowprinzip* für natürliche Zahlen (vgl. [Cutl1], [Cutl2]) und sein logisches Äquivalent, das *Underflowprinzip*, stellen ein wichtiges Hilfsmittel in der Nonstandard-Analysis dar. Sie zeigen, daß interne Mengen starken Einschränkungen unterworfen sind.

Dieses *Overflowprinzip* ist eigentlich keine Konsequenz einer *Saturiertheit*, sondern Ausdruck gewisser struktureller Gegebenheiten auf $\mathbb{N}$. Die Art der Aussage ist jedoch typisch für ein durch *Saturiertheit* gewonnenes Ergebnis, wie im Folgenden ersichtlich wird. Der hier gegebene Beweis nutzt daher bewußt aus, daß ${}^*\mathfrak{M}$ card$(\mathbb{N})^+$-saturiert ist.

Lemma 3.1. *(Overflowprinzip,* Robinson*) Ist $A \subset {}^*\mathbb{N}$ intern und ist $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \in A$, so gibt es ein $H \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ mit $\{n,\ n_0 \leq n \leq H\} \subset A$.*

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $F_m := \{H \in {}^*\mathbb{N},\ H \geq m,\ \{n,\ n_0 \leq n \leq H\} \subset A\}$. $\{F_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ ist eine Filterbasis aus internen Mengen wegen der an A gestellten Voraussetzungen. Da $\mathfrak{M}$ card$(\mathbb{N})^+$-saturiert ist, gibt es ein $H \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$, so daß $H \notin \mathbb{N}$ und $\{n,\ n_0 \leq n \leq H\} \subset A$. $\square$

Definition: Es sei X eine interne Menge und $I \in \mathfrak{M}$ eine Indexmenge. Eine Mengenfamilie $(A_i)_{i\in I}$ mit internen $A_i \subset X$ heiße *zulässig* in X, falls $\mathfrak{M}$ card$(I)^+$-saturiert ist. Eine interne Mengenfamilie $(B_i)_{i\in {}^*I}$ heiße *interne Erweiterung* von $(A_i)_{i\in I}$, falls für alle $i \in I$ $A_i = B_i$ gilt. Allgemein wollen wir ein Mengensystem *zulässig* nennen, wenn es mit den Elementen einer Menge $I \in \mathfrak{M}$ (extern) indiziert werden kann, so daß ${}^*\mathfrak{M}$ card$(I)^+$-saturiert ist. In naheliegender Weise seien dann Filterbasen als zulässig bezeichnet, wenn sie als Mengensysteme zulässig sind. Interne Bilder und Urbilder und allgemein interne Operationen zulässiger Mengensysteme liefern wieder zulässige Mengensysteme.

Lemma 3.2. *Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine zulässige Mengenfamilie. Dann besitzt $(A_i)_{i\in I}$ eine interne Erweiterung.*

Beweis. Für $i \in I$ sei Σ_i die interne Menge $\Sigma_i := \{(C_j)_{j\in {}^*I},\ (C_j)_{j\in {}^*I} \subset {}^*\mathfrak{P}(X),\quad C_i = A_i\}$. Es reicht zu zeigen, daß das System $(\Sigma_i)_{i\in I}$ die finite-intersection-property hat, denn dann ist $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i \neq \emptyset$ aufgrund der card$(I)^+$-*Saturiertheit* von ${}^*\mathfrak{M}$, und jedes Element von $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ hat die gewünschte Eigenschaft. Es seien also $i_1, ..., i_n \in I,\ n \in \mathbb{N}$ gegeben. Setze für $j = 1, ..., n$ $C_{i_j} := A_{i_j}$ und $C_i := \emptyset$ sonst. Es ist $(C_i)_{i\in {}^*I}$ intern und für $j = 1, ..., n$ gilt $(C_i)_{i\in {}^*I} \in \Sigma_{i_j}$. $\square$

Wir bemerken, daß eine interne Erweiterung nicht eindeutig ist, sofern I nicht endlich ist.

Definition: Die *Monade* $\boldsymbol{\mu}_F$ einer Pseudo-Filterbasis $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ ist die (i.a. externe) Menge $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} := \bigcap_{i\in I} F_i$.

Sind z.B. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Pseudo-Filterbasen auf einer Menge X, so sind durch $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} := \{F \cap G,\ f \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$ und $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} := \{F \cup G,\ f \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$ zwei weitere Pseudo-Filterbasen auf X definiert. Für ihre Monaden gilt $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \cap \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}\wedge\mathcal{G}}$ und $\boldsymbol{\mu}_F \cup \boldsymbol{\mu}_G = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}\vee\mathcal{G}}$. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Pseudo-Filterbasen auf X bzw. Y, so ist $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ eine Pseudo-Filterbasis auf $X \times Y$. Es gilt $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \times \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}$.
Jede nicht-(standard-endliche), interne Menge X trägt einen kanonischen Filter, den Filter $\mathbf{Co}(X)$ der co-(standard-endlichen) Mengen,

$$\mathbf{Co}(X) := \{X\backslash S,\ S \subset X \text{ standard und endlich}\}.$$

Für seine Monade $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Co}(X)}$ gilt $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Co}(X)} = \{x \in X, x \text{ nicht standard}\}$. Ist $I \in \mathfrak{M}$, so bedeutet dies $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Co}({}^*I)} = {}^*I\backslash I$.
Monaden sind geeignete Objekte, um extern topologische Sachverhalte zu beschreiben.

Wir beweisen nun ein allgemeineres *Overflowprinzip*, durch welches *Saturiertheit* in nutzbare Form gebracht wird. In Gestalt von Korollar 3.5 kann es wirkungsvoll z.B. in externen topologischen Strukturen eingesetzt werden, in denen relevante topologische Aussagen über Monaden beschrieben werden.

Wenn im weiteren Verlauf dieser Arbeit davon gesprochen wird, daß *Overflow* angewandt wird, nehmen wir damit i.a. Bezug auf das nachfolgende Lemma. Wir werden diese Sprechweise auch dann ohne weitere Referenz und Ausführung benutzen, wenn wir einfache Folgerungen dieses Prinzips verwenden. Einige von diesen sind in den nachstehenden Korollarien aufgelistet.

Lemma 3.3. *(Overflow & Underflow) Es sei $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ eine zulässige Filterbasis auf X und I_0 eine interne Menge, $I \subset I_0 \subset {}^*I$. Es sei R eine interne Relation auf I_0 und $(F_i)_{i\in {}^*I}$ irgendeine interne Erweiterung von $\mathcal{F}$. Dann gilt:*

Overflow: $\forall i \in I\ R(i) \quad \Rightarrow \quad \exists i \in I_0[F_i \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \wedge R(i)]$

Underflow: $\forall i \in I_0[F_i \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \Rightarrow R(i)] \quad \Rightarrow \quad \exists i \in I\ R(i)$

Beweis. Wir beweisen *Overflow* (*Underflow* ist das logische Äquivalent zu *Overflow*, hier mit $\neg R$ statt R). Sei $\forall i \in I\ R(i)$. Für alle $j \in I$ sei A_j die interne Menge $A_j := \{i \in I_0,\ F_i \subset F_j \wedge R(i)\}$. Da $\mathcal{F}$ eine zulässige Filterbasis ist, ist auch $(A_j)_{j\in I}$ eine zulässige Filterbasis. Insbesondere gibt es aufgrund der $\mathrm{card}(I)^+$-*Saturiertheit* von ${}^*\mathfrak{M}$ ein $i \in \bigcap_{j\in I} A_j \neq \emptyset$. Dieses i hat die gewünschte Eigenschaft. □

Korollar 3.4. *Für eine zulässige Filterbasis $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ gilt: Für jede interne Erweiterung $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in {}^*I}$ und jedes interne I_0 mit $I \subset I_0 \subset {}^*I$ ist*

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{\substack{i\in I_0\\ F_i \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}}} F_i.$$

Beweis. Sei $x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}$. Wir wenden *Overflow* auf die Relation $R(i) :\Leftrightarrow x \in F_i$ an und erhalten ein $i \in I_0$ mit $F_i \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}$ und $x \in F_i$. □

Korollar 3.5. *Es seien X, Y intern und $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ bzw. $\mathcal{G} = (G_j)_{j\in J}$ zwei zulässige Filterbasen auf X bzw. Y. Für jede interne Relation R auf $X \times Y$ gilt dann:*

(1) $\forall x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}\ \exists y \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}\ R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \forall j \in J\ \exists i \in I\ [\forall x \in F_i\ \exists y \in G_j\ R(x,y)]$

(2) $\forall x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}\ \exists y \notin \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}\ R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists j \in J\ \exists i \in I\ [\forall x \in F_i\ \exists y \notin G_j\ R(x,y)]$

(3) $\forall x \notin \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}\ \exists y \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}\ R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \forall j \in J\ \forall i \in I\ [\forall x \notin F_i\ \exists y \in G_j\ R(x,y)]$

(4) $\forall x \notin \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}\ \exists y \notin \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}\ R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I\ \exists j \in J\ [\forall x \notin F_i\ \exists y \notin G_j\ R(x,y)]$

Beweis. Es seien $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in {}^*I}$ und $\mathcal{G} = (G_j)_{j\in {}^*J}$ jeweils interne Erweiterungen sowie I_0, J_0 intern mit $I \subset I_0 \subset {}^*I$ und $J \subset J_0 \subset {}^*J$.
(1) "$\Rightarrow$": Sei $\forall x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \exists y \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}} R(x,y)$. Dann haben wir $\forall j \in J[\forall x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \exists y \in G_j R(x,y)]$. Insbesondere gilt $\forall j \in J[\forall i \in I_0[F_i \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \Rightarrow \forall x \in F_i \exists y \in G_j R(x,y)]]$. Nun kann *Underflow* angewandt werden auf die Relation $R_0(i) :\Leftrightarrow \forall x \in F_i \exists y \in G_j R(x,y)$ und die Behauptung

folgt.
(1) "$\Leftarrow$": Sei $\forall j \in J \exists i \in I[\forall x \in F_i \exists y \in G_j R(x,y)]$. Dann gilt auch $\forall x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}[\forall j \in J \exists y \in G_j R(x,y)]$. Auf den Ausdruck in eckigen Klammern wenden wir *Overflow* an auf die Relation $R_0(j) :\Leftrightarrow \exists y \in G_j R(x,y)$. Wir erhalten $\forall x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}[\exists j \in J_0[G_j \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}} \exists y \in G_j R(x,y)]]$, woraus sich das zu Beweisende ergibt.
(2) "$\Rightarrow$": Wir betrachten die Produkt-Filterbasis $(F_i \times G_j)_{(i,j)\in I\times J}$ zusammen mit der internen Relation R_0 auf $I_0 \times J_0$, definiert durch $R_0(i,j) :\Leftrightarrow \forall x \in F_i \exists y \notin G_j R(x,y)$. Aufgrund der Voraussetzungen können wir direkt *Underflow* anwenden und erhalten ein Paar $(i,j) \in I \times J$ mit $\forall x \in F_i \exists y \notin G_j R(x,y)$.
(2) "$\Leftarrow$": Das ist klar.
(3): Wir beweisen dies mit Hilfe von (1). $\forall x \notin \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \exists y \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}} R(x,y)$ ist äquivalent zu $\forall i \in I[\forall x \in F_i^c \exists y \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}} R(x,y)]$. Auf die eckige Klammer wenden wir nun (1) an mit der einelementigen Filterbasis $\{F_i^c\}$. Dies liefert schon die Behauptung.
(4): Dies kann ähnlich wie (3) bewiesen werden und zwar mit Hilfe von (2). □

Korollar 3.6. *Sei X intern und $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$, sowie $\mathcal{G}$ zulässige Filterbasen auf X.*

(I) *Ist $A \subset X$ intern, so gilt:* $\quad \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \subset A \Leftrightarrow \exists i \in I \; F_i \subset A$.

(II) *Sind alle Elemente von $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}$ standard, so ist $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}$ endlich, und es gibt ein $i \in I$ mit $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} = F_i$.*

(III) $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \subset {\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}}^c \Leftrightarrow \exists$ *internes $A \subset X$ mit $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \subset A \subset {\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}}^c$.*

(IV) ${\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}}^c \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}} \Leftrightarrow \exists$ *internes $A \subset X$ mit ${\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}}^c \subset A \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}$.*

(V) *$\mathcal{F}$ ist feiner als $\mathcal{G}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}} \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{G}}$.*

(VI) *$\varphi(\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}) = \boldsymbol{\mu}_{\varphi(\mathcal{F})}$ für jede interne Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$.*

Beweis. Die Aussagen sind im wesentlichen direkte Konsequenzen des voranstehenden Korollars, weshalb wir auf die Beweise verzichten. Wir zeigen lediglich:
(VI) Die Inklusion $\varphi(\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}}) \subset \boldsymbol{\mu}_{\varphi(\mathcal{F})}$ ist offensichtlich. Um die andere Inklusion zu zeigen, definiere für $x \in \boldsymbol{\mu}_{\varphi(\mathcal{F})}$ $R(i) :\Leftrightarrow [\exists y \in F_i \; \varphi(y) = x]$, und mit *Overflow* folgt $x \in \varphi(\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{F}})$. □

3.2 Uniforme Strukturen

Mit dem Begriff der Uniformen Struktur kann die intuitive Vorstellung der Vollständigkeit einer topologischen Struktur mathematisch klar gefaßt werden. Da er über Filter (bzw. Filterbasen) definiert ist, besteht die Möglichkeit, ihn mit Hilfe von Monaden zu untersuchen. Wir rekapitulieren kurz einige grundlegende Begriffe und führen dabei Bezeichnungen ein, die im Folgenden verwendet werden sollen. (Zur Theorie Uniformer Strukturen verweisen wir auf [Schu].)

Sei X eine Menge. Für Teilmengen A, B von $X \times X$ und Elemente $x \in X$ definiere die folgenden Mengen:

$$A^{-1} \;:=\; \{(a', a) \in X \times X,\ (a, a') \in A\}$$

$$\begin{aligned} A \circ B &:= \{(a,b) \in X \times X,\ \exists y \in X[(a,y) \in A \wedge (y,b) \in B]\} \\ A(x) &:= \{y \in X,\ (y,x) \in A\} \end{aligned}$$

Definition: Ist $\mathcal{U}$ eine Filterbasis auf der Menge $X \times X$, so heißt das Paar $(X,\mathcal{U})$ *Uniforme Struktur* (und $\mathcal{U}$ heißt Uniforme Struktur auf X), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(U1) $\forall U \in \mathcal{U}\ \forall x \in X\ [(x,x) \in U]$

(U2) $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{U}\ [V^{-1} \subset U]$

(U3) $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{U}\ [V \circ V \subset U]$

Ist $(X,\mathcal{U})$ eine Uniforme Struktur, so trägt X in kanonischer Weise eine Topologie, die dergestalt ist, daß eine Filterbasis $\mathcal{U}(x)$ des Umgebungsfilters des Elementes $x \in X$ gerade durch $\mathcal{U}(x) = \{U(x),\ U \in \mathcal{U}\}$ gebildet wird. Eine Filterbasis $\mathcal{C}$ in X heißt *Cauchy-Filterbasis*, falls es zu jedem $i \in I$ ein $x_i \in X$ und ein $C_i \in \mathcal{C}$ gibt derart, daß $C_i \subset U_i(x_i)$. $\mathcal{C}$ heißt *gegen $x \in X$ konvergent*, falls $\mathcal{C}$ feiner ist als der Umgebungsfilter von x in X. Eine Uniforme Struktur $(X,\mathcal{U})$ (und der Raum X) heißt *vollständig* (genauer: $\mathcal{U}$-vollständig), wenn jeder Cauchyfilter in X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Ist $(X,\mathcal{U})$ eine Uniforme Struktur und $A \subset X$, so sei der (topologische) *Abschluß* von A in X bzgl. $\mathcal{U}$ mit $\langle A \rangle_{\mathcal{U}}$ bezeichnet. Abgeschlossene Teilmengen vollständiger Räume sind vollständig. Ist $U(A) := \bigcup_{a \in A} U(a)$ so gilt $\langle A \rangle_{\mathcal{U}} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(A)$.
Sei $(X,\mathcal{U})$ eine Uniforme Struktur und R die Äquivalenzrelation $R := \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$. Sei $\kappa : X \longrightarrow X/R$ die kanonische Abbildung und $X_0 := X/R$ sowie $\mathcal{U}_0 := \{(\kappa \times \kappa)U,\ U \in \mathcal{U}\}$ (wir nennen die aus κ resultierende Mengenabbildung auch wieder κ). Dann ist $(X_0,\mathcal{U}_0)$ in kanonischer Weise eine hausdorffsche Uniforme Struktur (die Topologie auf X_0 ist hausdorffsch), und X_0 trägt die Identifizierungstopologie von X bzgl. κ. Die Abbildung κ ist offen und abgeschlossen. Hieraus resultiert unter anderem

$$\kappa \circ \langle \cdot \rangle_{\mathcal{U}} = \langle \cdot \rangle_{\mathcal{U}_0} \circ \kappa.$$

Eine Uniforme Struktur $(X,\mathcal{U})$ (und der Raum X) heißt *präkompakt*, falls es zu jedem $U \in \mathcal{U}$ eine endliche Menge $S \subset X$ gibt, so daß $X = \bigcup_{x \in S} U(x)$. Eine Menge X ist kompakt genau dann, wenn X präkompakt und vollständig ist.
Die Relativ-Uniforme Struktur einer Teilmenge $Y \subset X$ ist durch die Uniforme Struktur $(Y,\mathcal{U} \cap (Y \times Y))$ gegeben, und die resultierende Topologie ist die Relativ-Topologie auf Y. Für Teilmengen $Y, A \subset X$ gilt:

$$\langle A \cap Y \rangle_{\mathcal{U} \cap (Y \times Y)} = Y \cap \langle A \cap Y \rangle_{\mathcal{U}}.$$

Hat $A \subset X$ die Eigenschaft, daß es zu jedem $U \in \mathcal{U}$ eine endliche Menge $S \subset X$ gibt, so daß $A \subset \bigcup_{x \in S} U(x)$, so ist A präkompakt bzgl. der Relativ-Uniformen Struktur. In einer hausdorffschen Uniformen Struktur sind die bzgl. ihrer Relativ-Uniformen Struktur vollständigen Teilmengen abgeschlossene Teilmengen.
Sind $(X,\mathcal{U})$ und $(X',\mathcal{U}')$ Uniforme Strukturen, so heißt $(X,\mathcal{U})$ *feiner* als $(X',\mathcal{U}')$, falls $\mathcal{U}$ feiner ist als $\mathcal{U}'$. Die Uniformen Strukturen heißen *gleich*, wenn die eine jeweils feiner ist als die andere. Eine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow X'$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls die Bildfilterbasis der Filterbasis $\mathcal{U}$ unter φ feiner ist als $\mathcal{U}'$ (solche Abbildungen sind insbesondere stetig). Mit den gleichmäßig stetigen Abbildungen als Morphismen werden die Uniformen Strukturen zu einer Kategorie.
Ist X eine Menge und $(Y,\mathcal{U})$ eine Uniforme Struktur, so ist für jedes $x \in X$ in kanonischer Weise eine Uniforme Struktur $\mathcal{U}^x$ auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ erklärt durch

$$\mathcal{U}^x := \{U^x,\ U \in \mathcal{U}\} \text{ mit } U^x \ni (f,g) :\Leftrightarrow (f(x), g(x)) \in U.$$

Ein Filter auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ heißt *punktweise konvergent*, falls er konvergent ist bzgl. allen $\mathcal{U}^x,\ x \in X$. Aus den $\mathcal{U}^x$ gewinnt man in natürlicher Weise eine weitere Uniforme Struktur $\overline{\mathcal{U}}$ auf $\mathrm{Abb}(X,Y)$ durch

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{U},\ U \in \mathcal{U}\} \text{ mit } \overline{U} \ni (f,g) :\Leftrightarrow \forall x \in X\ (f,g) \in U^x.$$

$\overline{\mathcal{U}}$ heißt die Struktur der *gleichmäßigen Konvergenz*. (Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz, die Umkehrung ist i.a. falsch.)

Wir werden nun im Folgenden externe Uniforme Strukturen untersuchen, insbesondere zulässige Uniforme Strukturen. Es wird sich herausstellen, daß diese stets vollständig sind (Satz 3.8), womit wir die eingangs dieses Kapitels lax ausgedrückte Vollständigkeit einer externen Struktur mathematisch präzise formuliert haben. In dieser Interpretation ist *Saturiertheit* in eine handhabbare Form gebracht. Der Reichhaltigkeit interner Objekte sind in gewisser Weise jedoch auch starke Grenzen gesetzt. Betrachtet man z.B. interne Funktionen, so stellt sich heraus, daß stetige Funktionen immer schon gleichmäßig stetig sind (Satz 3.10).

Satz 3.7. *(Machover) Es sei X intern und $\mathcal{U}$ eine zulässige Filterbasis auf $X \times X$. Es definiert $\mathcal{U}$ eine (externe) Uniforme Struktur auf X genau dann, wenn $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ eine (externe) Äquivalenzrelation auf $X \times X$ ist.*

Beweis. Die Reflexivität von $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ ist gleichbedeutend mit (U1).
Nach Korollar 3.6 (VI) ist $(\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}})^{-1} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}^{-1}}$ ($\mathcal{U}^{-1} := \{U^{-1},\ U \in \mathcal{U}\}$ ist eine Filterbasis), und daher ist $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ symmetrisch genau dann, wenn $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}^{-1}}$. Mit Hilfe von Korollar 3.6 (V) erkennt man, daß dieses gleichbedeutend mit (U2) ist.
Schließlich ist $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ transitiv genau dann, wenn $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}} \circ \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}} \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$, und nach Korollar 3.6 (V) erfüllt $\mathcal{U}$ (U3) genau dann, wenn $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}\circ\mathcal{U}} \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ ($\mathcal{U} \circ \mathcal{U} := \{U \circ U,\ U \in \mathcal{U}\}$ ist eine Filterbasis). Es reicht also zu zeigen $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}\circ\mathcal{U}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}} \circ \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$. "$\supset$" ist klar. Sei $(x,y) \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}\circ\mathcal{U}}$ und $\mathcal{U} = \{U_i,\ i \in I\}$. Durch *Overflow*, angewandt auf die interne Relation $R(i) \Leftrightarrow [\exists z \in X\ \{(x,z),(z,y)\} \subset U_i]$, erhält man ein $z \in X$ mit $\{(x,z),(z,y)\} \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$, d.h. $(x,y) \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}} \circ \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$. □

Ist $(X,\mathcal{U})$ eine zulässige Uniforme Struktur so ist der Raum $X/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ hausdorffsch (und in natürlicher Weise wieder ein Uniformer Raum, vgl. die eingangs gemachten Bemerkungen). Die Restklasse $x/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ sei (i.a.) mit x° bezeichnet. Es ist $x^\circ = y^\circ$ genau dann, wenn $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}(x) = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}(y)$. ($\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}(x)} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}(x) = \langle x \rangle_{\mathcal{U}}$, wenn hierbei x als einelementige Teilmenge von X aufgefaßt wird).

Für eine Menge X und eine Uniforme Struktur $(Y,\mathcal{U})$ können die Elemente f° des Raumes ${}^*\mathrm{Abb}(X,Y)/\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{U}}}$ in natürlicher Weise mit (externen) Abbildungen von X nach $Y/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ identifiziert werden durch folgende Einbettung:

$${}^*\mathrm{Abb}(X,Y)/\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{U}}} \longrightarrow \mathrm{Abb}(X, Y/\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{U}}}), \qquad f^\circ(x) := f(x)/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}.$$

Satz 3.8. *Jede zulässige Uniforme Struktur ist vollständig.*

Beweis. Sei $(X,\mathcal{U})$ $(\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I})$ zulässige Uniforme Struktur. Wir müssen zeigen, daß jeder Cauchyfilter in X konvergiert. Sei also $\mathcal{C}$ solch ein Cauchyfilter, d.h. es gibt zu jedem $i \in I$ ein $x_i \in X$ und ein $C_i \in \mathcal{C}$, so daß $C_i \subset U_i(x_i)$. Da $\mathcal{C}$ ein Filter ist, ist $\mathcal{C}_0 := (U_i(x_i))_{i\in I}$ eine zulässige Filterbasis, insbesondere $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{C}_0} \neq \emptyset$. $\mathcal{C}_0$ konvergiert gegen jedes $x \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{C}_0}$, da $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ eine Äquivalenzrelation ist. Da $\mathcal{C}$ feiner ist als $\mathcal{C}_0$, konvergiert auch $\mathcal{C}$ gegen solch ein x. □

Korollar 3.9. *Sei $(X,\mathcal{U})$ eine zulässige Uniforme Struktur, $A \subset X$ intern. Dann gilt*

$$\langle A\rangle_{\mathcal{U}} = \bigcup_{a\in A} \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}(a).$$

Beweis. Als interne Menge ist A nach obigem Satz vollständig bzgl. der Relativ-Uniformen Struktur. Bezeichnet $\kappa : X \longrightarrow X/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ die kanonische Abbildung, so ist daher $\kappa(A) \subset X/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$ vollständig und somit abgeschlossen in $X/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$. Es folgt $\langle A\rangle_{\mathcal{U}} \subset \kappa^{-1}(\kappa(A)) = \bigcup_{a\in A} \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}(a)$. Die andere Inklusion ist klar. □

Satz 3.10. *Sind $(X,\mathcal{U})$ und $(Y,\mathcal{V})$ zulässige Uniforme Strukturen und ist $\varphi : X \longrightarrow Y$ eine interne Abbildung, so ist φ stetig genau dann, wenn φ gleichmäßig stetig ist.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ stetig} \;&\Leftrightarrow\; \forall x \in X\ \boldsymbol{\mu}_{\varphi(\mathcal{U}(x))} \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}(\varphi(x))} \qquad \text{(nach Kor. 3.6 (IV))}\\
&\Leftrightarrow\; \forall x \in X\ \varphi(\boldsymbol{\mu}_U(x)) \subset \boldsymbol{\mu}_V(\varphi(x)) \qquad \text{(nach Kor. 3.6 (V))}\\
&\Leftrightarrow\; (\varphi \times \varphi)(\boldsymbol{\mu}_U) \subset \boldsymbol{\mu}_V \qquad (\boldsymbol{\mu}_U, \boldsymbol{\mu}_V \text{ sind Äquivalenzrelationen})\\
&\Leftrightarrow\; \varphi \text{ gleichmäßig stetig} \qquad \text{(nach Kor. 3.6 (IV))}
\end{aligned}$$

□

Beispiel:
a) ${}^*\mathbb{R}$ trägt folgende zulässige Uniforme Struktur $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} := \{U_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\ st\} \quad \text{mit} \quad (a,b) \in U_\varepsilon :\Leftrightarrow |a-b| < \varepsilon.$$

Diese Struktur kommt von der "üblichen" Topologie auf $\mathbb{R}$. Die $\mathbb{R}$-Vektorraum-Operationen, sowie Minimum- und Maximumbildung sind gleichmäßig stetige Operationen auf ${}^*\mathbb{R}$ bzgl. $\mathcal{U}$. Letzteres erkennt man mit Hilfe der für alle $a, b, x \in \mathbb{R}$ geltende Ungleichungen

$$|\min(x,a) - \min(x,b)| \leq |a-b| \quad \text{bzw.} \quad |\max(x,a) - \max(x,b)| \leq |a-b|.$$

Für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt $y \in \boldsymbol{\mu}_{\mathbb{R}}(x)$ genau dann, wenn y und x infinitesimal benachbart sind (hierbei sei $\boldsymbol{\mu}_{\mathbb{R}} := \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$). Es ist außerdem $\langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{U}}/\boldsymbol{\mu}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.
b) Es gibt eine weitere zulässige Uniforme Struktur $\mathcal{V}$ auf ${}^*\mathbb{R}$,

$$\mathcal{V} := \{V_{\varepsilon,n},\ \varepsilon > 0\ st,\ n \in {}^*\mathbb{N}\ st\} \quad \text{mit} \quad (a,b) \in V_{\varepsilon,n} :\Leftrightarrow [|a-b| < \varepsilon \ \vee\ |a-b| > n].$$

Es ist $\boldsymbol{\mu}_{\mathbb{R}} \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}}$ und $\langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{V}} = \langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{U}}$ sowie für alle $x \in \langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{U}}$ $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}}(x) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbb{R}}(x)$. Außerdem ist ${}^*\mathbb{R}/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}} \cong \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (hierbei soll $\{+\infty\} = ({}^*\mathbb{R}_+ \backslash \langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{V}})/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}}$ bedeuten bzw. $\{-\infty\} =$

$(-{}^*\mathbb{R}_+ \backslash \langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{V}})/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}})$. Konvergenz einer Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ bedeutet dann entweder die übliche Konvergenz oder die "uneigenliche" Konvergenz gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$. Jede monotone Folge ist in ${}^*\mathbb{R}$ bzgl. $\mathcal{V}$ konvergent. $\overline{\mathbb{R}}$ ist kompakt und hausdorffsch. Die kanonische Abbildung ${}^*\mathbb{R}/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist wegen $\boldsymbol{\mu}_{\mathbb{R}} \subset \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}}$ $\mathcal{U}$-$\mathcal{V}$-gleichmäßig stetig. Bzgl. der $\mathcal{V}$-Topologie ist die Addition auf ${}^*\mathbb{R}$ nicht stetig, die eingeschränkte Addition $(\langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{V}} \cup {}^*\mathbb{R}_+) \times {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ hingegen ist gleichmäßig stetig. (Hiermit lassen sich die "übliche Rechenregeln" für die Symbole $+\infty, -\infty$ auf die Rechenregeln in ${}^*\mathbb{R}$ zurückführen. Diese sollen im Folgenden ohne Kommentar verwendet werden.) Ebenso sind die Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathbb{R}$, sowie Minimum- und Maximumbildung gleichmäßig stetige Operationen bzgl. $\mathcal{V}$, was man wie in a) überprüft.

3.3 Loeb-Maße

Es soll in diesem Abschnitt die Konstruktion von Loeb [Loe1], [Loe2] innerhalb der Terminologie der vorliegenden Arbeit durchgeführt werden, mit welcher aus internen, endlich-additiven Maßräumen externe Maßräume gewonnen werden können. Diesen kommt für den weiteren Verlauf der Arbeit eine entscheidende Bedeutung zu. Auch wenn wir später lediglich endliche Maße benötigen werden, soll die Theorie hier in einem allgemeineren Rahmen behandelt werden.

Definition: Ein *endlich-additiver Maßraum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$, $\mathcal{A}$ eine Algebra auf der Menge Ω, $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf $\mathcal{A}$.
Es bezeichne $\mathcal{T}$ den reellen Vektorraum der Treppenfunktionen. Der Inhalt λ kann auf natürliche Weise zu einem linearen Funktional (welches wieder mit λ bezeichnet sei) $\lambda : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden mit $\lambda(\mathbb{1}_A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Mit $f, g \in \mathcal{T}$ sind dann auch $|f| \in \mathcal{T}$ sowie $f \wedge g \in \mathcal{T}$ bzw. $f \vee g \in \mathcal{T}$ ($f \wedge g$ bzw. $f \vee g$ bezeichnet die durch $f \wedge g(\omega) := \min(f(\omega), g(\omega))$ bzw. $f \vee g(\omega) := \max(f(\omega), g(\omega))$ definierten Funktionen). Dieses Beispiel gibt Anlaß zur folgenden Definition.

Definition: Sei Ω eine Menge. Ein *Vektorgitter* $\mathcal{T}$ auf Ω ist ein reeller Vektorraum $\mathcal{T}$ von Funktionen Ω, stabil unter den Operationen $\wedge$ und $\vee$. Eine Linearform $\lambda : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ heiße *positiv*, falls $f \geq 0 \Rightarrow \lambda(f) \geq 0$. Ist eine solche Linearform λ gegeben, so trägt $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ folgende Uniforme Struktur $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} := \{U_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\} \quad \text{mit} \quad (f,g) \in U_\varepsilon :\Leftrightarrow \exists\ F \in \mathcal{T}\ [\ \lambda(|F|) < \varepsilon\ \wedge\ |f-g| \leq |F|\ ].$$

Im Sinne der Maßtheorie wird durch diese Uniforme Struktur gerade die Konvergenz im Mittel beschrieben.

Wir definieren nun für ein internes Vektorgitter $\mathcal{T}$ auf einer Menge Ω und für eine interne, positive Linearform λ folgende Uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf $\mathrm{Abb}(\Omega, {}^*\mathbb{R})$:

$$\mathcal{U} := \{U_\varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad (f,g) \in U_\varepsilon :\Leftrightarrow \exists\ F \in \mathcal{T}\ [\ \lambda(|F|) < \varepsilon\ \wedge\ |f-g| \leq |F|\ ].$$

$\mathrm{Abb}(\Omega, {}^*\mathbb{R})$ ist extern und enthält auch externe Elemente. Die Einschränkung von $\mathcal{U}$ auf $\mathcal{T}$ ist eine zulässige Uniforme Struktur, da ${}^*\mathfrak{M}$ $\mathrm{card}(\mathbb{N})^+$-saturiert ist. Sie soll ebenfalls $\mathcal{U}$ genannt werden.

Bezeichnung: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $(\mathrm{Abb}(\Omega, {}^*\mathbb{R}), \mathcal{U})$ gegen f konvergente Folge, so sei dieses auch mit $f_n \xrightarrow{\mathcal{U}} f$ bezeichnet. Ebenso bedeute $f_n \uparrow$, daß für alle $\omega \in \Omega$ $f_n(\omega)$ eine monoton steigende Folge ist und $f_n \uparrow f$, daß $f_n \uparrow$ und daß für alle $\omega \in \Omega$ $f_n(\omega)$ in der $\mathcal{V}$-Topologie von ${}^*\mathbb{R}$ gegen $f(\omega)$ konvergiert. $f \approx_{\mathcal{U}} g$ bedeute, daß $(f,g) \in \bigcap_{\varepsilon>0} U_\varepsilon = \langle \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}} \rangle_{\mathcal{U}}$. $\approx_{\mathcal{U}}$ ist eine Äquivalenzrelation. Für $x \in {}^*\mathbb{R}$ sei im Folgenden $x^\circ = x/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}} \in \overline{\mathbb{R}}$ die Restklasse bzgl. der $\mathcal{V}$-Struktur (vgl. Beispiel b) auf Seite 17).

Lemma 3.11. *Auf* $\mathrm{Abb}(\Omega, {}^*\mathbb{R})$ *sind die* $\mathbb{R}$*-Vektorraumoperationen gleichmäßig stetige Operationen bzgl.* $\mathcal{U}$*, ebenso die Abbildungen* $\wedge$ *bzw.* $\vee$*.*

Beweis. Die Aussage folgt für die $\mathbb{R}$-Vektorraumoperationen direkt aus der Definition der Uniformen Struktur $\mathcal{U}$. Für alle $f, g, a, b \in \mathrm{Abb}(\Omega, {}^*\mathbb{R})$ gelten weiterhin die Ungleichungen

$$|(f+a) \wedge (g+b) - f \wedge g| \leq |a| + |b| \quad \text{bzw.} \quad |(f+a) \vee (g+b) - f \vee g| \leq |a| + |b|.$$

Diese sind gleichmäßige Abschätzungen, woraus die Behauptung aufgrund der Monotonie von λ für die Operationen $\wedge$ und $\vee$ folgt. □

Satz 3.12. *Es sei* $\mathcal{T}$ *ein internes Vektorgitter auf* Ω*,* λ *eine positive Linearform auf* $\mathcal{T}$*. Dann sind* $\mathcal{T}$ *und* $\langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}} \subset \mathrm{Abb}(\Omega, {}^*\mathbb{R})$ $\mathcal{U}$*-vollständige Vektorgitter auf* Ω*. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, gleichmäßig stetiges, Funktional* $\lambda^\circ : \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *(Fortsetzung)* $F \in \mathcal{T} \;\Rightarrow\; \lambda^\circ(F) = \lambda(F)^\circ$

(2) *(Linearität)*
a) $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \quad \lambda^\circ(\alpha f) = \alpha \lambda^\circ(f)$
b) $f, g \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}},\ \lambda^\circ(f) \in \mathbb{R}$ *oder* $\lambda^\circ(f) = \lambda^\circ(g) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lambda^\circ(f+g) = \lambda^\circ(f) + \lambda^\circ(g)$

(3) *(Monotonie)* $f, g \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}},\ f \geq g \quad \Rightarrow \quad \lambda^\circ(f) \geq \lambda^\circ(g)$

(4) a) $f \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists F \in \mathcal{T}\ f \approx_{\mathcal{U}} F$
b) $f, g \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \quad [f \approx_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \lambda^\circ(|f-g|) = 0]$

(5) *Ist* $0 \leq f_n \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}}$ *und* $f_n \uparrow$ *derart, daß* $\lambda^\circ(f_n)$ *beschränkt bleibt, so gibt es ein* $f \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}}$ *mit* $f_n \uparrow f$ *und* $f_n \xrightarrow{\mathcal{U}} f$*.*

Beweis. $\mathcal{T}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, stabil unter den Operationen $\wedge$ und $\vee$. Lemma 3.11 zeigt dann, daß auch der Abschluß von $\mathcal{T}$, $\langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}}$, diese Eigenschaften besitzt. $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ ist eine zulässige Uniforme Struktur, also ist $\mathcal{T}$ nach Satz 3.8 $\mathcal{U}$-vollständig. Aus diesem Grund ist dann auch $\langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}}$ $\mathcal{U}$-vollständig.
Die Abbildung $\mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $F \mapsto \lambda(F)^\circ$ ist als Komposition der gleichmäßig stetigen Abbildungen λ und $^\circ$ gleichmäßig stetig. Da $\overline{\mathbb{R}}$ hausdorffsch und vollständig ist, existiert eine eindeutig bestimmte, gleichmäßig stetige Fortsetzung $\lambda^\circ : \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Dieses zeigt (1).
(2) a) Die skalare Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{R}$ ist sowohl in $(\mathrm{Abb}(\Omega, {}^*\mathbb{R}), \mathcal{U})$ als auch in $({}^*\mathbb{R}, \mathcal{V})$ gleichmäßig stetig. Da für $F \in \mathcal{T}$ $\lambda(\alpha F) = \alpha \lambda(F)$ ist, bleibt diese Relation auch für $f \in \langle \mathcal{T} \rangle_{\mathcal{U}}$ richtig. In b) argumentieren wir wie in a) und verweisen auf Beispiel b), Seite 17.
(3) Sei $f \geq g$. Für $\lambda^\circ(g) = -\infty$ ist nichts zu beweisen. Sei also $\lambda^\circ(g) > -\infty$. Mit (2) b) erhalten wir $\lambda^\circ(f) = \lambda^\circ(g) + \lambda^\circ(f-g)$. Aus der Definition von $\mathcal{U}$ folgt, daß $(f-g) \in \langle \mathcal{T}_+ \rangle_{\mathcal{U}}$,

da $(f-g)\geq 0$. Wegen $\lambda(\mathcal{T}_+)\subset {}^*\mathbb{R}_+$ ist dann also $\lambda^\circ(f-g)\in\langle{}^*\mathbb{R}_+\rangle_{\mathcal{V}}/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{V}}=\overline{\mathbb{R}}_+$.
(4) a) Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß schon $\mathcal{T}$ $\mathcal{U}$-vollständig ist.
b) Aus der Definition von $\mathcal{U}$ und der gleichmäßigen Stetigkeit der Subtraktion bzw. der Operation $\wedge$ schließt man $f\approx_{\mathcal{U}} g\Leftrightarrow |f-g|\approx_{\mathcal{U}} 0$.
Aus $|f-g|\approx_{\mathcal{U}} 0$ ergibt sich $\lambda^\circ(|f-g|)=0$, da λ° gleichmäßig stetig ist.
Sei anders herum $\lambda^\circ(|f-g|)=0$. Nach (4) a) gibt es ein $F\in\mathcal{T}$ mit $F\approx_{\mathcal{U}}|f-g|$. Aus dem schon Bewiesenen folgt $\lambda^\circ(||F|-|f-g||)=0$ und mit der Monotonie und 2.b) $\lambda^\circ(|F|)=0$, und das heißt $F\approx_{\mathcal{U}} 0$.
(5) Sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere auch eine $\mathcal{U}$-Cauchyfolge, und deshalb existiert ein $F\in\mathcal{T}$ mit $f_n\xrightarrow{\mathcal{U}}F$.
Für $\delta,\ 0<\delta<\frac{1}{2}$ können wir weiterhin eine Folge $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden mit den Eigenschaften $\lambda(G_k)<\delta^k$ und $|F-f_{n_k}|\leq G_k$. Mit *Overflow* bekommt man ein $K\in{}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, so daß $\forall k\leq K\ \lambda(G_k)\leq\delta^k$. Setze $G_\delta:=\sum\limits_{k=1}^{K}G_k\in\mathcal{T}$. Für ein solches G_δ gilt

$$\lambda(G_\delta)\leq 2\delta,\quad \text{und für alle hinreichend großen } n\in\mathbb{N}\ \ |F-f_n|\leq G_\delta.$$

Ist bei festem ω $f_n(\omega)$ unbeschränkt, so läßt sich mit Hilfe von *Overflow* ein $f_\omega\in{}^*\mathbb{R}$ finden, so daß für alle $n,m\in\mathbb{N}$ $f_n(\omega)\leq f_\omega\leq(F+G_{\frac{1}{m}})(\omega)$ ist. Nun kann f definiert werden durch

$$f(\omega):=\begin{cases}\sup f_n(\omega)^\circ, & \text{falls es ein } c\in\mathbb{R} \text{ gibt mit } \forall n\in\mathbb{N}\ f_n(\omega)\leq c\\ f_\omega\in{}^*\mathbb{R}, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Nach dieser Definition von f ist $f_n\uparrow f$, und für alle $m\in\mathbb{N}$ (und für alle hinreichend großen $n\in\mathbb{N}$)

$$|F-f|\leq(F+G_{\frac{1}{m}}-f)+G_{\frac{1}{m}}\leq(F-f_n+G_{\frac{1}{m}})+G_{\frac{1}{m}}\leq|F-f_n|+2G_{\frac{1}{m}}\leq 3G_{\frac{1}{m}}.$$

Daher ist $f\in\langle\mathcal{T}\rangle_{\mathcal{U}}$ und $f\approx_{\mathcal{U}}F$, d.h. $f_n\xrightarrow{\mathcal{U}}f$. □

Es sei nun wieder $(\Omega,\mathcal{A},\lambda)$ ein interner, endlich additiver Maßraum mit den (internen) Treppenfunktionen $\mathcal{T}$. Nach der Vorbemerkung ist $(\Omega,\mathcal{T},\lambda)$ ein internes Vektorgitter. Neben $\mathcal{U}$ findet sich noch eine weitere Uniforme Struktur $\overline{\mathcal{V}}$ auf $\mathrm{Abb}(\Omega,{}^*\mathbb{R})$, gegeben durch

$$\overline{\mathcal{V}}=\{\overline{\mathcal{V}}_{\varepsilon,n}\ ,\ \varepsilon>0\ st,\ n\in\mathbb{N}\}\ \text{ mit }\ (f,g)\in\overline{\mathcal{V}}_{\varepsilon,n}\Leftrightarrow\forall\omega\in\Omega\ (f(\omega),g(\omega))\in V_{\varepsilon,n}.$$

(Vgl. Beispiel b), Seite 17.) Die Einschränkung von $\overline{\mathcal{V}}$ auf $\mathcal{T}$ ist wiederum eine zulässige Uniforme Struktur und soll auch mit $\overline{\mathcal{V}}$ bezeichnet werden. Wie bei $\mathcal{U}$ ist $f\approx_{\overline{\mathcal{V}}}g:\Leftrightarrow(f,g)\in\bigcap_{\varepsilon,n}\overline{\mathcal{V}}_{\varepsilon,n}=\langle\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{V}}}\rangle_{\overline{\mathcal{V}}}$ eine Äquivalenzrelation. $\mathrm{Abb}(\Omega,{}^*\mathbb{R})/\approx_{\overline{\mathcal{V}}}$ ist in natürlicher Weise ein Raum (numerischer) Funktionen auf Ω (durch $f^\circ(\omega):=f(\omega)^\circ$). Im Folgenden sei $f^\circ=f/\approx_{\overline{\mathcal{V}}}$.

Sei $\mathcal{T}_0$ die folgende (externe) Teilmenge von $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_0:=\{f\in\mathcal{T},\ \mathrm{Bild}(f)\ \text{standard und endlich},\ \lambda(|f|)\in\langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{U}}\}$$

$\mathcal{L}:=\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}}/\approx_{\overline{\mathcal{V}}}$ ist unter der durch $\mathcal{U}$ induzierten Topologie ein vollständiger Raum numerischer Funktionen auf Ω. Sind $f,g\in\mathcal{L}$, so ist auch $f+g\in\mathcal{L}$, sofern für alle $\omega\in\Omega$ $f(\omega)+g(\omega)$ erklärt ist. Für alle $\alpha\in\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{L}$ ist $\alpha f\in\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ ist stabil unter $\wedge$ und $\vee$. Für jedes $A\in\mathcal{A}$ mit $\lambda(A)\in\langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{U}}$ ist auch $1\!\!1_A\in\mathcal{L}$.

Lemma 3.13.

(I) $(\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}+}\times\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}+})\wedge\langle\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{V}}}\rangle_{\overline{\mathcal{V}}+}\subset\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}}$

(II) $(\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}}\times\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}})\cap\langle\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{V}}}\rangle_{\overline{\mathcal{V}}}\subset\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}}$

Beweis.
(I) Es sei $t\in\mathcal{T}_{0+}$ und $f\in\langle\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{V}}}\rangle_{\overline{\mathcal{V}}+}(0)$. Dann gibt es ein $c\in\mathbb{R}$ und ein $A\in\mathcal{A}$ mit $\lambda(A)\in\langle\mathbb{R}\rangle_{\mathcal{U}}$ und $t\leq c\mathbb{1}_A$. Für alle $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ ist dann $|t\wedge f|\leq\varepsilon c\mathbb{1}_A$, also $\lambda(|t\wedge f|)\leq\varepsilon(c\lambda(A))$. Das zeigt $t\wedge f\approx_{\mathcal{U}}0$ bzw. $t\wedge f\in\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}}(0)$, also $(\mathcal{T}_{0+}\times\mathcal{T}_{0+})\wedge\langle\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{V}}}\rangle_{\overline{\mathcal{V}}+}\subset\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}}$. Da $\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}}$ $\mathcal{U}$-abgeschlossen ist und $\wedge$ gleichmäßig stetig, folgt die Behauptung.
(II) Es sei $(f,g)\in(\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}}\times\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}})\cap\langle\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{V}}}\rangle_{\overline{\mathcal{V}}}$. Ist h definiert durch $h:=|f|+|g|\in\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}}$, so ist $(f+h,g+h)\in(\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}+}\times\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}+})\cap\langle\boldsymbol{\mu}_{\overline{\mathcal{V}}}\rangle_{\overline{\mathcal{V}}+}$. Nach (I) schließen wir

$$(f+h,g+h)=(f+h,g+h)\wedge(f+h,g+h)\in\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}},$$

und das bedeutet $(f,g)\in\langle\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}}$. □

Satz 3.14. (Loeb) *Es sei $(\Omega,\mathcal{A},\lambda)$ ein interner, endlich additiver Maßraum. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, gleichmäßig stetiges Funktional $\lambda_{\mathcal{L}}:\mathcal{L}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *(Fortsetzung)* $F\in\langle\mathcal{T}_0\rangle_{\mathcal{U}}\cap\mathcal{T}\Rightarrow\ \lambda_{\mathcal{L}}(F^\circ)=\lambda^\circ(F)=\lambda(F)^\circ$

(2) *(Linearität)*
  a) $\alpha\in\mathbb{R},\ f\in\mathcal{L}\quad\Rightarrow\quad\lambda_{\mathcal{L}}(\alpha f)=\alpha\lambda_{\mathcal{L}}(f)$
  b) $f,g\in\mathcal{L},\ f+g$ *erklärt* $\quad\Rightarrow\quad\lambda_{\mathcal{L}}(f+g)=\lambda_{\mathcal{L}}(f)+\lambda_{\mathcal{L}}(g)$.

(3) *(Monotonie)* $f,g\in\mathcal{L},\ f\geq g\quad\Rightarrow\quad\lambda_{\mathcal{L}}(f)\geq\lambda_{\mathcal{L}}(g)$

(4) a) $f\in\mathcal{L}\Rightarrow\exists F\in\mathcal{T}\ \lambda_{\mathcal{L}}(|F^\circ-f|)=0$
  b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist Cauchyfolge in $\mathcal{L}$ genau dann, wenn* $\lim_{n,m\to\infty}\lambda_{\mathcal{L}}(|f_n-f_m|)=0$.

(5) *Ist $0\leq f_n\in\mathcal{L}$ und $f_n\uparrow$ derart, daß $\lambda^\circ(f_n)$ beschränkt bleibt, so ist* $\sup f_n\in\mathcal{L}$ *und* $\lambda_{\mathcal{L}}(\sup f_n)=\sup\lambda_{\mathcal{L}}(f_n)$.

Beweis. Das zuvor bewiesene Lemma ermöglicht es, $\lambda_{\mathcal{L}}:\mathcal{L}\longrightarrow\mathbb{R}$ durch $\lambda_{\mathcal{L}}(f^\circ):=\lambda^\circ(f)$ zu erklären. Alle behaupteten Eigenschaften sind aufgrund von Satz 3.12 klar. (In (5) beachte man, daß mit $f_n\in\mathcal{L},\ f_n\uparrow$ auch Vertreter $F_n\in\langle\mathcal{T}\rangle_{\mathcal{U}}$ $F_n^\circ=f_n$ mit $F_n\uparrow$ gewählt werden können, da $\langle\mathcal{T}\rangle_{\mathcal{U}}$ stabil unter $\wedge$ ist.) □

Definition: Das im letzten Satz konstruierte Funktional $\lambda_{\mathcal{L}}$ ist in natürlicher Weise ein externes Maß auf der (externen) Menge der internen und externen charakteristischen Funktionen aus $\mathcal{L}$, welche dann eine externe σ-Algebra bilden. Wir nennen diese die *Loeb-σ-Algebra* und bezeichnen sie mit $\overline{\sigma}(\lambda,\mathcal{A})$ (das ist der Abschluß der von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Algebra). $\lambda_{\mathcal{L}}$ heiße das zugehörige *Loebmaß*.

Loebmaße besitzen hervorragende Stetigkeitseigenschaften, welche sich durch *Saturiertheit* ergeben. Genaueres gibt der folgende Satz an.

Satz 3.15. *Es sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ *ein interner, endlich additiver Maßraum und* $I \in \mathfrak{M}$, *so daß* ${}^*\mathfrak{M}$ *card*$(I)^+$*-saturiert ist. Es sei für* $i \in I$ $F_i \in \langle \mathcal{T}_0 \rangle_{\mathcal{U}}$ *und* F_i *intern, so daß* $(F_i)_{i\in I}$ *absteigend filtrierend ist. Dann gilt*

$$\inf_{i\in I} F_i^\circ \in \mathcal{L} \quad \textit{und} \quad \lambda_{\mathcal{L}}(\inf_{i\in I} F_i^\circ) = \inf_{i\in I} \lambda_{\mathcal{L}}(F_i^\circ).$$

Beweis. Es sei $(F_i)_{i\in {}^*I}$ eine interne Erweiterung von $(F_i)_{i\in I}$ und

$$c := \inf_{i\in I} \lambda_{\mathcal{L}}(F_i^\circ) = \inf_{i\in I} (\lambda(F_i))^\circ.$$

Da $(F_i)_{i\in I}$ absteigend filtrierend ist, erhält man mit *Overflow* ein $j \in {}^*I$, so daß für alle $i \in I$ $F_j \leq F_i$ und $\lambda(F_j)^\circ = c$.
Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $k \in I$ mit $\lambda(F_k) < {}^*c + {}^*\varepsilon$. Mit diesem gilt dann

$$|\inf_{i\in I} F_i - F_k| \leq |F_k - F_j| \quad \text{und} \quad \lambda(|F_k - F_j|) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung aus der Definition der Uniformen Struktur $\mathcal{U}$ und deren Vollständigkeit. □

4 Stone-Čech-Kompaktifizierung

Stone-Čech-Kompaktifizierungen können definiert werden für vollständig-reguläre Räume. Ein topologischer Raum X heißt dabei *vollständig-regulär*, wenn Punkte in X abgeschlossen sind und wenn es für alle abgeschlossenen $A \subset X$ und für alle $x \in X \backslash A$ eine Umgebung U von x gibt mit $U \cap A = \emptyset$. Eine *Stone-Čech-Kompaktifizierung* ist dann ein kompakter Raum βX (eine "übliche" Bezeichnungsweise) zusammen mit einer Einbettung $X \longrightarrow \beta X$ mit dichtem Bild derart, daß jede stetige Abbildung von X in einen kompakten, hausdorffschen Raum eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf βX besitzt. Stone-Čech-Kompaktifizierungen existieren stets und sind bis auf Isomorphie (im Sinne kompakter Räume) eindeutig bestimmt. Wir verweisen auf das Buch von Walker [Walk].
Es besteht die Möglichkeit, die Stone-Čech-Kompaktifizierungen mit Hilfe von Nonstandard-Modellen zu konstruieren. (vgl. [Hur-Loe]). Wir wollen das für den uns hier interessierenden Fall innerhalb der Terminologie dieser Arbeit durchführen und wollen dabei die auf allen Mengen vorhandene diskrete Topologie betrachten, welche vollständig-regulär ist. Die stetigen Abbildungen auf einer Menge X sind dann gerade sämtliche Abbildungen auf X. Diese topologische Struktur sei die *diskrete* genannt.

Der Übergang von dem zugrundeliegenden Nonstandard-Modell ${}^*\mathfrak{M}$ auf Stone-Čech-Kompaktifizierungen ist als Transferprinzip zu verstehen, da die Stone-Čech-Kompaktifizierungen als Objekte von $\mathfrak{M}$ zu interpretieren sind. Sie erhalten die durch ${}^*\mathfrak{M}$ gewonnenen Vollständigkeitseigenschaften und sind deshalb geeignet, Aussagen diesbezüglich innerhalb von $\mathfrak{M}$ festzuhalten. Das funktorielle Verhalten der Stone-Čech-Kompaktifizierung z.B. gegenüber algebraischen Strukturen ist aber i.a. als durchaus schlecht anzusehen. Ein intuitiver Zugang, (algebraische) Strukturen auf X in βX wiederzuerkennen (so, wie das z.B. in vollständiger Weise innerhalb eines Nonstandard-Modells möglich ist), verschließt sich daher weitestgehend.

4.1 Eine Nonstandard-Konstruktion

Wir setzen nun im Folgenden voraus, daß ${}^*\mathfrak{M}$ polysaturiert ist, das bedeutet insbesondere, daß alle externen Uniformen Strukturen $(X, (U_i)_{i\in I})$ mit $I \in \mathfrak{M}$ und internen X bzw. U_i vollständig sind.

Definition: Sei X eine Menge. Wir definieren auf X folgende Uniforme Struktur $\mathcal{K}_0^X$:

$$\mathcal{K}_0^X := \{K_S,\ S \subset \mathfrak{P}(X) \text{ endlich}\} \quad \text{mit} \quad K_S := \bigcup_{A\in S} (A \times A) \cup (A^c \times A^c).$$

Dies bedeutet $(x, y) \in K_S \Leftrightarrow \forall A \in S[x \in A \Leftrightarrow y \in A]$, oder auch $\forall x \in X\ K_S(x) = \bigcap_{x\in A\in S} A$.
Es gilt $K_S = \bigcap_{A\in S} K_A$ (K_A bedeutet dabei $K_{\{A\}}$).

Wir listen folgende einfache Eigenschaften ohne Beweis auf:

(I) X ist bzgl. $\mathcal{K}_0^X$ diskret.

(II) $(X, \mathcal{K}_0^X)$ ist hausdorffsch.

(III) $(X, \mathcal{K}_0^X)$ ist präkompakt.

(IV) Falls $\operatorname{card}(X)$ nicht endlich ist, ist $(X, \mathcal{K}_0^X)$ nicht kompakt.

Lemma 4.1.

(1) *Sei $(K, \mathcal{U})$ eine präkompakte Uniforme Struktur und $f : X \longrightarrow K$. Dann ist f $\mathcal{K}_0^X$-$\mathcal{U}$ gleichmäßig stetig.*

(2) *$(X, \mathcal{K}_0^X)$ ist die feinste präkompakte Uniforme Struktur auf X.*

Beweis. Wir beweisen (1). (2) ist eine unmittelbare Folge.
Sei $U \in \mathcal{U}$. Wegen K präkompakt gibt es ein endliches $S \subset K$ mit $\bigcup_{a \in S} U(a) = K$. Es sei $A_a := \{x \in X,\ (f(x), a) \in U\}$. Wir zeigen nun $(f \times f)(\bigcap_{a \in S} K_{A_a}) \subset U \circ U^{-1}$, woraus die Behauptung folgt, da wir $U \in \mathcal{U}$ beliebig gewählt hatten.
Sei $(x, y) \in \bigcap_{a \in S} K_{A_a}$. Da $\bigcup_{a \in S} U(a) = K$ ist, gibt es ein $b \in S$ mit $f(x) \in U(b)$, d.h. $x \in A_b$. Wegen $(x, y) \in K_{A_b}$, ist auch $y \in A_b$. Also ist $(b, f(y)) \in U^{-1}$ und $(f(x), b) \in U$. Das bedeutet aber $(f(x), f(y)) \in U \circ U^{-1}$. □

Die aus $\mathcal{K}_0^X$ resultierende, zulässige Uniforme Struktur auf ${}^*X$ soll mit $\mathcal{K}^X$ bezeichnet werden. Die Relativ-Struktur von X in ${}^*X$ bzgl. $\mathcal{K}^X$ ist gerade $\mathcal{K}_0^X$.

$$\mathcal{K}^X := \{{}^*K_S,\ S \subset \mathfrak{P}(X) \text{ endlich}\}.$$

Dies bedeutet also wie oben $(x, y) \in {}^*K_S \ \Leftrightarrow \forall A \in S[x \in {}^*A \Leftrightarrow y \in {}^*A]$.

Die Eigenschaften von ${}^*X$ als topologischer Raum bzgl. $\mathcal{K}^X$ sind von denen von X wesentlich verschieden. ${}^*X$ ist z.B. nicht hausdorffsch (und deshalb auch nicht diskret). Es liegen vielmehr folgende Eigenschaften von $({}^*X, \mathcal{K}^X)$ vor, die wir wieder ohne Beweis angeben:

(I) $({}^*X, \mathcal{K}^X)$ ist kompakt.

(II) Die kanonische Abbildung $(X, \mathcal{K}^X) \longrightarrow ({}^*X, \mathcal{K}^X)$ ist eine Einbettung Uniformer Räume.

(III) Falls $\operatorname{card}(X)$ nicht endlich ist, ist $({}^*X, \mathcal{K}^X)$ nicht metrisierbar.

Die Kompaktheit von $({}^*X, \mathcal{K}^X)$ folgt dabei daraus, daß wegen der *Polysaturiertheit* $({}^*X, \mathcal{K}^X)$ vollständig ist (und die Präkompaktheit vererbt sich von $(X, \mathcal{K}^X)$).
Für alle $A \subset X$ ist $\langle A \rangle_{\mathcal{K}^X} = {}^*A$ eine sowohl abgeschlossene (und damit kompakte) als auch offene Menge, da für $a \in {}^*A$ ${}^*K_A(a) = {}^*A$ eine Umgebung von A ist. Wir benutzen folgende Bezeichnung.
Bezeichnung: $\boldsymbol{\mu}_X := \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{K}^X}$.
Für die Monade $\boldsymbol{\mu}_X$ der Uniformen Struktur gilt

$$(x, y) \in \boldsymbol{\mu}_X \ \Leftrightarrow\ \forall A \subset X\ [x \in {}^*A \Leftrightarrow y \in {}^*A] \quad \text{oder auch} \quad \boldsymbol{\mu}_X(x) = \bigcap_{x \in {}^*A \subset {}^*X} {}^*A.$$

Lemma 4.2. *Es sei $Y \subset X$. Die Uniformen Strukturen $({}^*Y, \mathcal{K}^Y)$ und $({}^*X, \mathcal{K}^X \cap ({}^*Y \times {}^*Y))$ sind gleich.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die von $\mathcal{K}^Y$ und $\mathcal{K}^X \cap ({}^*Y \times {}^*Y)$ erzeugten Filter auf ${}^*Y$ übereinstimmen. Es ist daher nach Korollar 3.6 (V) $\boldsymbol{\mu}_Y = \boldsymbol{\mu}_X \cap ({}^*Y \times {}^*Y)$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}(x,y) \in \boldsymbol{\mu}_Y \quad &\Leftrightarrow \quad \forall A \subset Y\ [x \in {}^*A \Leftrightarrow y \in {}^*A] \\ &\Leftrightarrow \quad \forall B \subset X\ [x \in {}^*B \cap {}^*Y \Leftrightarrow y \in {}^*B \cap {}^*Y] \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \boldsymbol{\mu}_X \cap ({}^*Y \times {}^*Y).\end{aligned}$$

□

Dieses Lemma zeigt, daß die oben für alle Standard-Mengen definierten Uniformen Strukturen miteinander verträglich sind in der Form, daß es nicht davon abhängt, innerhalb welcher Mengen Relativ-Strukturen betrachtet werden. Insbesondere hängt der Abschluß einer (internen oder externen) Menge nicht davon ab, innerhalb welcher Standard-Menge er gebildet wird. Wir definieren daher für beliebige Mengen A, welche Teilmengen von Standard-Mengen sind:

Bezeichnung: Für $A \subset {}^*X$ sei

$$\langle\!\langle A \rangle\!\rangle := \langle A \rangle_{\mathcal{K}^X}.$$

Für internes A gilt also $\langle\!\langle A \rangle\!\rangle = \bigcup_{a \in A} \boldsymbol{\mu}_X(a)$, und für $A \in \mathfrak{M}$ gilt $\langle\!\langle A \rangle\!\rangle = \langle\!\langle {}^*A \rangle\!\rangle = {}^*A$.

Lemma 4.3. *Sei $X \in \mathfrak{M}$ und $M \subset {}^*X$ (eventuell extern).*

(1) $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle = \bigcap\limits_{\substack{A \subset X \\ M \subset \langle\!\langle A \rangle\!\rangle}} \langle\!\langle A \rangle\!\rangle = \bigcap\limits_{\substack{A \subset X \\ M \subset {}^*A}} {}^*A$

(2) *Ist M abgeschlossen, so gibt es ein internes $A \subset {}^*X$ mit $M = \langle\!\langle A \rangle\!\rangle$.*

Beweis.
(1) Das ist lediglich eine Umformulierung der Tatsache

$$\langle\!\langle M \rangle\!\rangle = \bigcap_{\substack{S \subset \mathfrak{P}(X) \\ \text{endlich}}} K_S(M).$$

(2) Sei $\mathcal{F} := \{A \subset X,\ M \subset {}^*A\}$, d.h. $M = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} {}^*A$. Sei S *-endlich mit $\mathcal{F} \subset S \subset {}^*\mathcal{F}$ und $A := \bigcap_{B \in S} B$. Wir zeigen $M = \langle\!\langle A \rangle\!\rangle$.
$\langle\!\langle A \rangle\!\rangle \subset M$ ist klar, wegen $A \subset M$. Sei $A \subset {}^*C$ $(C \subset X)$. Dann gibt es also ein *-endliches $S \subset {}^*\mathcal{F}$ mit $\bigcap_{B \in S} B \subset {}^*C$. Wir können jetzt *Transfer* anwenden und erhalten ein endliches $T \subset \mathcal{F}$ mit $\bigcap_{B \in T} B \subset C$, und das bedeutet $C \in \mathcal{F}$.
Es folgt $\langle\!\langle A \rangle\!\rangle = \bigcap_{A \subset {}^*C} {}^*C \supset \bigcap_{B \in \mathcal{F}} {}^*B = M$. □

Aus dem Lemma geht hervor, daß die abgeschlossenen Mengen in ${}^*X$ gerade den Filtern auf X eineindeutig entsprechen. Da die Monaden $\boldsymbol{\mu}_X(x)$, $x \in {}^*X$ abgeschlossen und minimal mit dieser Eigenschaft sind, entsprechen sie eineindeutig den Ultrafiltern auf X.

Wir wenden uns jetzt der Hausdorffisierung der Uniformen Struktur $({}^*X, \mathcal{K}^X)$ zu.

Definition: Es sei $\langle X \rangle := {}^*X/\boldsymbol{\mu}_X$ und es bezeichne $\bar{\cdot} : {}^*X \longrightarrow \langle X \rangle\ x \mapsto \overline{x}$ die kanonische Abbildung. $(\langle X \rangle, \overline{\mathcal{K}^X})$ sei die resultierende hausdorffsche Uniforme Struktur.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammen. Zum Beweis von (3) benutze man Lemma 4.1.

Satz 4.4.

(1) $(\langle X\rangle, \overline{\mathcal{K}^X})$ *ist eine kompakte, hausdorffsche Uniforme Struktur.*

(2) *Die Abbildung* $(X, \mathcal{K}^X) \longrightarrow (\langle X\rangle, \overline{\mathcal{K}^X})$, $x \mapsto \overline{{}^*x}$ *ist eine Einbettung Uniformer Strukturen.* $X \subset \langle X\rangle$ *ist dicht und offen.*

(3) *Ist* K *kompakt und* $f : X \longrightarrow K$ *beliebig, so besitzt* f *eine gleichmäßig stetige Fortsetzung (man beachte* (2)*)* $\overline{f} : \langle X\rangle \longrightarrow K$, *welche eindeutig ist, wenn* K *hausdorffsch ist.*

(4) *Die Abbildung* $\langle X\rangle \longrightarrow \{\mathcal{F},\ \mathcal{F}$ *ist Ultrafilter in* $X\}$, $\overline{x} \mapsto \{A,\ x \in {}^*A\}$ *ist eine Bijektion. Bei Verknüpfung mit der Abbildung aus* (2) *wird ein* $x \in X$ *auf seinen zugehörigen Hauptultrafilter geworfen.*

Zusatz: Ist $f : X \longrightarrow K$ und $(K, \mathcal{U})$ kompakt und hausdorffsch, so kann die Fortsetzung $\overline{f}$ folgendermaßen angegeben werden:

$$\overline{f}(\overline{x}) = {}^*f(x)^\circ.$$

Hierbei bezeichnet $^\circ$ die kanonische Abbildung ${}^*K \longrightarrow K$, $x \mapsto x/\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{U}}$.

Korollar 4.5. $(\langle X\rangle, \overline{\mathcal{K}^X})$ *ist isomorph (im Sinne Uniformer Strukturen) zur Stone-Čech-Kompaktifizierung von* X *bzgl. der diskreten Struktur.*

Die Verträglichkeit der Uniformen Strukturen überträgt sich auf die Stone-Čech-Kompaktifizierung. Der Abschluß einer Teilmenge einer Stone-Čech-Kompaktifizierung $\langle X\rangle$ ist daher wieder unabhängig von X und er sei für die Teilmenge M mit $\langle M\rangle$ bezeichnet. Lemma 4.3 liest sich nun in der Stone-Čech-Kompaktifizierung folgendermaßen.

Lemma 4.6. *Sei* $X \in \mathfrak{M}$ *und* $M \subset \langle X\rangle$.

(1) $\langle M\rangle = \bigcap\limits_{\substack{A \subset X \\ M \subset \langle A\rangle}} \langle A\rangle$

(2) *Ist* M *abgeschlossen, so gibt es ein internes* $A \subset {}^*X$ *mit* $M = \overline{A} = \{\overline{a},\ a \in A\}$.

Die Rolle der internen Mengen übernehmen in der Stone-Čech-Kompaktifizierung also die abgeschlossenen (kompakten) Mengen, die Rolle der Standard-Mengen übernehmen die sowohl offenen als auch abgeschlossenen Mengen.
Das mengentheoretische Verhalten in Stone-Čech-Kompaktifizierungen ist durchaus nicht gewöhnlich. Wir illustrieren dies an einem Beispiel, welches an anderer Stelle verwendet werden soll.

Lemma 4.7. *Sei für* $i \in \{1, ..., n\}$ $\mathcal{F}_i$ *eine Filterbasis in* X. *Dann gilt.*

$$\bigcup_{i \leq n} \bigcap_{A_i \in \mathcal{F}_i} \langle A_i\rangle = \bigcap_{\substack{(A_1, \ldots, A_n) \\ \in \mathcal{F}_1 \times \ldots \times \mathcal{F}_n}} \bigcup_{i \leq n} \langle A_i\rangle$$

Beweis. "$\subset$" ist klar. Sei $K := \bigcup_{i \leq n} \bigcap_{A_i \in \mathcal{F}_i} \langle A_i \rangle$. Da K kompakt ist, gilt $K = \bigcap_{\substack{B \subset X \\ \langle B \rangle \supset K}} \langle B \rangle$.
Ist $B \subset X$ mit $\langle B \rangle \supset K$, so haben wir

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ \langle B \rangle \supset \bigcap_{A_i \in \mathcal{F}_i} \langle A_i \rangle.$$

Hieraus schließt man

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ \exists A_i \in \mathcal{F}_i \ B \supset A_i.$$

Das bedeutet aber

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ \exists A_i \in \mathcal{F}_i, \quad \text{so daß} \ \ \langle B \rangle \supset \bigcup_{i \leq n} \langle A_i \rangle,$$

und dieses wiederum ergibt $K \supset \bigcap_{\substack{(A_1, ..., A_n) \\ \in \mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_n}} \bigcup_{i \leq n} \langle A_i \rangle$. □

Wir zeigen jetzt, daß die Stone-Čech-Kompaktifizierung ein kovarianter Funktor ist von der Kategorie der Mengen mit Abbildungen (und Komposition) in die Kategorie der kompakten Uniformen Strukturen mit (gleichmäßig) stetigen Abbildungen (und Komposition). Dieses wird durch Lemma 4.8 bewiesen. Mit Hilfe der hier benutzten Nonstandard-Konstruktion der Stone-Čech-Kompaktifizierung bietet sich die Möglichkeit, weitere Aussagen über das funktorielle Verhalten zu machen. Wir werden hier aber keine weiteren Ergebnisse anführen und begnügen uns mit dem anschließenden Resultat in Form von Lemma 4.9.
Ist $f : X \longrightarrow Y$, so folgt aus obigen Überlegungen, daß es eine eindeutig bestimmte, stetige Fortsetzung $\overline{f} : \langle X \rangle \longrightarrow \langle Y \rangle$ gibt.

Lemma 4.8. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$. Dann gilt $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$.*

Beweis. Für alle $x \in {}^*X$ gilt

$$\overline{g \circ f}(\overline{x}) = \overline{{}^*(g \circ f)(x)} = \overline{{}^*g({}^*f(x))} = \overline{g}(\overline{{}^*f(x)}) = \overline{g}(\overline{f}(\overline{x}))$$

□

Lemma 4.9. *Bezeichnet $\mathcal{C}^0(\langle X \rangle, \langle Y \rangle)$ die Menge der stetigen Abbildungen von $\langle X \rangle$ nach $\langle Y \rangle$, so ist die folgende, kanonische, Abbildung surjektiv*

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathrm{Abb}(X, Y) \rangle & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\langle X \rangle, \langle Y \rangle) \\ F / \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{Abb}(X,Y)} & \mapsto & \overline{F}, \end{array}$$

wobei $\overline{F}$ die eindeutig bestimmte, stetige Fortsetzung der Funktion $x \mapsto \overline{F({}^*x)}$ ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Abbildung wohldefiniert ist. Seien $F, G \in {}^*\mathrm{Abb}(X, Y)$ und $(F, G) \in \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{Abb}(X,Y)}$. Dann ist für alle $x \in X$ und für alle $B \subset Y$ $(F, G) \in K_{\{f, \ f(x) \in B\}}$. Deshalb haben wir für alle $x \in X$ $(F({}^*x), G({}^*x)) \in \boldsymbol{\mu}_Y$, weshalb $\overline{F}$ wie oben erklärt werden kann.
Sei $f \in \mathcal{C}^0(\langle X \rangle, \langle Y \rangle)$ vorgegeben. Mit *Overflow* erhalten wir ein internes $F \in {}^*\mathrm{Abb}(X, Y)$, für das für alle $x \in X$ gilt $(F({}^*x, h({}^*x)) \in \boldsymbol{\mu}_Y$, wobei $h({}^*x) \in {}^*Y$ so gewählt wurde, daß $\overline{h({}^*x)} = f(x)$ ist. Dann stimmen $\overline{F}$ und f auf X überein und sind deshalb schon gleich. Das zeigt die Surjektivität. □

4.2 Stone-Čech-Kompaktifizierung von Halbgruppen

Für Halbgruppen soll in diesem Abschnitt eine weitere Darstellung der Stone-Čech-Kompaktifizierung bzgl. der diskreten Struktur gegeben werden (wir verstehen hier unter Halbgruppen solche mit neutralem Element).

Sei $(G, \circ, e)$ eine Halbgruppe. Für $a \in G$ sei die Linkstranslation mit $\mathcal{S}_a$ bezeichnet, d.h.

$$\mathcal{S}_a : G \longrightarrow G, \quad b \mapsto a \circ b.$$

Jedes $x \in {}^*G$ liefert eine Mengenabbildung

$$\phi_x : \mathfrak{P}(G) \longrightarrow \mathfrak{P}(G), \quad A \mapsto {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \cap G.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jedes ϕ_x dieser Art ein *Mengenisomorphismus* ist, was bedeuten soll, daß folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(I) $\phi_x(G) = G$

(II) $\forall A \subset G \; [\phi_x(A^c) = \phi_x(A)^c]$

(III) $\forall A, B \subset G \; [\phi_x(A \cup B) = \phi_x(A) \cup \phi_x(B)]$

Ist X irgendeine Menge und bezeichnet $\mathcal{B}(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ beschränkt}\}$ den Vektorraum der beschränkten Funktionen auf X, so kann $\mathfrak{P}(X)$ in $\mathcal{B}(X)$ kanonisch eingebettet werden durch $A \mapsto \mathbb{1}_A$ ($\mathbb{1}_A$ bezeichnet die Charakteristische Funktion von A). Die Eigenschaft einer Mengenabbildung ψ, auf X ein Mengenisomorphismus zu sein, bedeutet dann gerade, daß ψ eine eindeutig bestimmte, lineare Fortsetzung $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ besitzt (die hier auch stets wieder mit ψ bezeichnet werden soll) derart, daß Folgendes erfüllt ist:

(I) $\psi \mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X$

(II) $\forall f, g \in \mathcal{B}(X) \; \psi(f \wedge g) = \psi f \wedge \psi g$.

(Wir lassen die Argument-Klammern in diesem Falle auch weg.)

In dem uns hier interessierenden Fall ist diese Fortsetzung leicht anzugeben. Ist nämlich $x \in {}^*G$ und $f \in \mathcal{B}(G)$, so gilt für die Fortsetzung $\phi_x f$

$$\forall a \in G \; \phi_x f(a) = ({}^*f(x \circ {}^*a))^\circ,$$

wobei hier mit $^\circ$ die Standardabbildung $^\circ : \langle \mathbb{R} \rangle_{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbb{R}$ gemeint ist. Dies ist einzusehen, wenn man nachgerechnet hat, daß $\forall a \in G \; \phi_x \mathbb{1}_A(a) = \mathbb{1}_{{}^*A}(x \circ a)$ ist. Ist $a \in G$ und $f \in \mathcal{B}(G)$, so bedeutet das

$$\phi_a f = f \circ \mathcal{S}_a.$$

Die Aussage des folgenden Satzes stellt das Hauptergebnis dieses Abschnittes dar.

Satz 4.10. *Sei $(G, \circ, e)$ eine Halbgruppe und sei*

$$\begin{aligned}\Phi_G \;:=\; & \{\phi : \mathfrak{P}(G) \longrightarrow \mathfrak{P}(G) \text{ mit } \forall S \subset G \text{ (endlich) und } \forall \mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(G) \\ & \text{(endlich) gibt es ein } g \in G \text{ mit } [\forall A \in \mathcal{M} \; \phi(A) \cap S = \mathcal{S}_g^{-1}(A) \cap S]\}.\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\langle G \rangle \longrightarrow \Phi_G, \quad \overline{x} \mapsto \phi_x$$

ist eine wohldefinierte Bijektion. Jedes $\phi \in \Phi_G$ ist ein Mengenisomorphismus.
Die Mengen $K_{\mathcal{M},S} := \{(\phi, \phi') \in \Phi_G \times \Phi_G,\ \forall A \in \mathcal{M} \; \phi(A) \cap S = \phi'(A) \cap S\}$ mit $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(G)$ endlich und $S \subset G$ endlich bilden die von $\langle G \rangle$ durch obige Abbildung induzierte Uniforme Struktur, durch welche Φ_G kompakt und hausdorffsch wird.

Beweis. Wir spalten den Beweis in drei Teile auf:
(1) $\forall x \in {}^*G \ \phi_x \in \Phi_G$.
(2) $\phi_x = \phi_y \Leftrightarrow (x, y) \in \boldsymbol{\mu}_G$, d.h. die Abbildung $\overline{x} \mapsto \phi_x$ ist injektiv.
(3) Die Abbildung $x \mapsto \phi_x$ ist surjektiv.
Die Aussage über die Uniforme Struktur ergibt sich aus den Beweisen der obigen Punkte.

Zu (1): Sei $\phi = \phi_x$ und sei $S \subset G$ endlich sowie $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(G)$ endlich. Wir haben

$$\forall A \in \mathcal{M} \ \phi(A) \cap S = ({}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \cap G) \cap S,$$

d.h. ${}^*\phi({}^*A) \cap {}^*S = {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \cap {}^*S$. Also gilt

$$\exists y \in {}^*G \ \forall A \in {}^*\mathcal{M} \ {}^*\phi({}^*A) \cap {}^*S = {}^*\mathcal{S}_y^{-1}({}^*A) \cap {}^*S.$$

Da alle Parameter standard sind, kann y mit *Transfer* sogar standard gewählt werden. Dies zeigt $\phi_x \in \Phi_G$.
Zu (2): Sei $\phi_x = \phi_y$. Dann gilt

$$\forall A \subset G \ {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \cap G = {}^*\mathcal{S}_y^{-1}({}^*A) \cap G,$$

insbesonders also

$$\forall A \subset G[e \in {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \Leftrightarrow e \in {}^*\mathcal{S}_y^{-1}({}^*A)],$$

und d.h.

$$\forall A \subset G[x \in {}^*A \Leftrightarrow y \in {}^*A].$$

Ist andersherum

$$\forall A \subset G[x \in {}^*A \Leftrightarrow y \in {}^*A],$$

so haben wir auch

$$\forall A \subset G \ \forall a \in G[x \in {}^*\{b \in G, b \circ a \in A\} \Leftrightarrow y \in {}^*\{b \in G, b \circ a \in A\}],$$

d.h.

$$\forall A \subset G \ \forall a \in G[x \circ {}^*a \in {}^*A \Leftrightarrow y \circ {}^*a \in {}^*A].$$

Hieraus folgt

$$\forall A \subset G \ \forall a \in G[a \in {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \Leftrightarrow a \in {}^*\mathcal{S}_y^{-1}({}^*A)],$$

und das bedeutet

$$\forall A \subset G \ {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \cap G = {}^*\mathcal{S}_y^{-1}({}^*A) \cap G.$$

Zu (3): Sei $\phi \in \Phi_G$. Mit *Overflow* erhalten wir ein $x \in {}^*G$ mit

$$\forall A \subset G \ \forall S \subset G \ \ (\text{endlich}) \ {}^*\phi({}^*A) \cap {}^*S = {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \cap G.$$

Das bedeutet aber

$$\forall A \subset G \ \phi(A) = {}^*\phi({}^*A) \cap G = {}^*\mathcal{S}_x^{-1}({}^*A) \cap G = \phi_x(A).$$

□

Betrachtet man $\phi \in \Phi_G$ als Operatoren $\phi : \mathcal{B}(G) \longrightarrow \mathcal{B}(G)$, so ergibt sich außerdem aus

$$\forall a \in G \ \phi_x(f \cdot g)(a) = ({}^*f \cdot {}^*g(x \circ {}^*a))^\circ = ({}^*f(x \circ {}^*a))^\circ \cdot ({}^*g(x \circ {}^*a))^\circ$$

das folgende Lemma.

Lemma 4.11. *Jedes $\phi \in \Phi_G$ ist ein Algebrahomomorphismus.*

Wir führen abschließend drei einfache Eigenschaften ohne Beweis auf, die gerade bedeuten, daß Φ_G (und damit $\langle G \rangle$) wieder eine Halbgruppenstruktur trägt, die mit der durch G induzierten verträglich ist. Tatsächlich ist die im Satz beschriebene Abbildung gerade ein Halbgruppenantiisomorphismus, wenn auf $\langle G \rangle = \beta G$ die aus der allgemeinen Theorie für Halbgruppen ableitbare Struktur auf βG vorausgesetzt wird. Auch wenn G abelsch ist, kann daraus i.a. nicht geschlossen werden, daß Φ_G abelsch ist.

(I) $\quad \phi, \phi' \in \Phi_G \;\Rightarrow\; \phi \circ \phi' \in \Phi_g$

(II) $\quad \forall a \in G \; \forall x \in {}^*G \quad \phi_x \circ \phi_a = \phi_{{}^*a \circ x}$

(III) $\quad \forall a \in G \; \forall x \in {}^*G \quad \phi_a \circ \phi_x = \phi_{x \circ {}^*a}$

5 Wahrscheinlichkeits-Inhalte

Definition: Für eine Menge X sei

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ beschränkt}\}.$$

Ein *Wahrscheinlichkeits-Inhalt* (*W-Inhalt*) auf X ist eine positive Linearform μ auf dem Vektorgitter $\mathcal{B}(X)$ mit $\mu(\mathbb{1}_X) = 1$ (normiert) (vgl. Seite 18).

Jeder Inhalt μ (im maßtheoretischen Sinne) auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ mit $\mu(X) = 1$ definiert einen eindeutig bestimmten W-Inhalt und umgekehrt. Wir benutzen beide Begriffe synonym.

Im vorliegenden Kapitel werden W-Inhalte unter zwei Gesichtspunkten untersucht. Im ersten Abschnitt soll eine Methode vorgestellt werden, mit deren Hilfe Ergebnisse aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (für Wahrscheinlichkeitsmaße auf σ-Algebren) prinzipiell auf die schwächere Struktur der W-Inhalte "übertragen" werden können. Dies wird u.a. an einigen Grenzwertsätzen illustriert.
Die anschließenden Abschnitte wenden sich der Untersuchung struktureller Eigenschaften der Menge der W-Inhalte zu. Insbesondere ist hier bei gegebener Transformation T auf dem Raum X die Struktur der T-invarianten W-Inhalte von Interesse. Die Hauptergebnisse sind dabei Aussagen über die Ergodizität.

5.1 Ein Übertragungsprinzip

Innerhalb der Theorie der Wahrscheinlichkeitsräume kommt dem guten Zusammenspiel verschiedener Konvergenzstrukturen eine wichtige Rolle zu. Dieses basiert letztlich auf der Stetigkeit des Maßes. In der schwächeren Struktur der Theorie der W-Inhalte liegt eine Stetigkeit dieser Art nicht apriori vor.
Wir wollen in diesem Abschnitt eine Methode vorstellen, wie trotzdem wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen auch über W-Inhalte getroffen werden können. Unsere Vorgehensweise ist dabei durch folgende heuristische Überlegungen motiviert (vgl. Seite 11).
Sei ein W-Inhalt μ auf der Menge $X \in \mathfrak{M}$ gegeben und eventuell noch weitere Strukturen auf X (z.B. eine Transformation T auf X). Wir betrachten dann $({}^*X, {}^*\mu)$ im Nonstandard-Modell ${}^*\mathfrak{M}$. Dort erhält man durch die Konstruktion von Loeb aus ${}^*\mu$ das externe Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_{\mathcal{L}}$ auf $\sigma({}^*\mathfrak{P}(X))$ (und z.B. die bzgl. $\sigma({}^*\mathfrak{P}(X))$ meßbare Transformation ${}^*T$). Auf diesen Raum (den *Loeb-Raum*) kann (extern) die Theorie der Wahrscheinlichkeitsräume angewandt werden. Die hieraus resultierenden (externen) Aussagen können anschließend mittels *Overflow* und *Transfer* zu Aussagen über (X, μ) (und z.B. T) zurückinterpretiert werden.

Wir bemerken, daß es für unsere Zwecke sinnvoll ist, lediglich die kleinere σ-Algebra $\sigma({}^*\mathfrak{P}(X))$ (das ist die von ${}^*\mathfrak{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra) zu betrachten, statt der Loeb-σ-Algebra $\overline{\sigma}({}^*\mu, {}^*\mathfrak{P}(X))$. Es wird dann z.B. eine Transformation T von X automatisch zu einer meßbaren

Transformation ${}^*T$ von ${}^*X$, was im Falle von $\overline{\sigma}({}^*\mu, {}^*\mathfrak{P}(X))$ nicht der Fall wäre. Es stellt dies keine wesentliche Einschränkung dar, da innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie i.a. keine bzgl. des Maßes abgeschlossene σ-Algebra benötigt wird. Es sei auch daran erinnert, daß wir im Sinne der Einleitung hier nicht an einzelnen, speziellen W-Inhalten interessiert sind, sondern an Aussagen über Klassen von W-Inhalten.

Bevor wir in der Lage sind, die obige Methode an einigen Beispielen zu illustrieren, müssen noch einige vorbereitende Überlegungen angestellt werden. Um sinnvolle Ergebnisse überhaupt formulieren zu können, muß zunächst geklärt werden, welche Begriffe, Strukturen etc. in $\mathfrak{M}$ eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation zulassen, wenn wir sie auf dem Loeb-Raum betrachten. Wir benötigen also eine Methode, "vernünftige" Begriffe für W-Inhalte erklären zu können.
Eine naheliegende Methode besteht darin, Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ganz direkt auf W-Inhalte zu übertragen. Wir geben einige mögliche Beispiele an. Das nachstehende Lemma sagt aus, daß diese Begriffe mit denen des Loeb-Raumes zusammenpassen.

Definition: Sei μ ein W-Inhalt auf X.
Für $f \in \mathcal{B}(X)$ sei der *Erwartungswert* $\mathrm{E}f$ definiert durch $\mathrm{E}f := \mu f$.
Für $f \in \mathcal{B}(X)$ sei die *Varianz* $\mathrm{Var}f$ definiert durch $\mathrm{Var}f := \mu(|f - \mathrm{E}f|^2)$.
$A, B \subset X$ heißen (bzgl. μ) *unabhängig*, falls $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

Lemma 5.1.

(I) $\mathrm{E}f = \mathrm{E}^*f^\circ := \mu_{\mathcal{L}}({}^*f^\circ)$.

(II) $\mathrm{Var}f = \mathrm{Var}^*f^\circ := \mu_{\mathcal{L}}(|{}^*f^\circ - \mathrm{E}^*f^\circ|^2)$.

(III) *$A, B \subset X$ sind bzgl. μ unabhängig $\Leftrightarrow$ ${}^*A, {}^*B$ sind bzgl. $\mu_{\mathcal{L}}$ unabhängig.*

Wir verzichten auf die einfachen Beweise.

Diese einfache Vorgehensweise ist allerdings in den meisten Fällen nicht sinnvoll. Der Grund liegt u.a. darin, daß es z.T. verschiedene Definitionsmöglichkeiten für ein und denselben Begriff innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt, die dort aufgrund der Axiomatik (insbesondere der Maßstetigkeit) übereinstimmen. Für W-Inhalte liegen dann aber i.a. verschiedene Begriffe vor. Dies sei an dem Begriff der fastsicheren Konvergenz erläutert.
In Maßräumen gilt, daß fastsichere Konvergenz im Wesentlichen eine starke Form von stochastischer Konvergenz darstellt. Hierfür sorgt die Maßstetigkeit. Für W-Inhalte trifft das nicht zu. Es sei z.B. μ ein W-Inhalt auf $\mathbb{N}$, der endlichen Mengen den Inhalt Null zuordnet, und es sei für $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} (-1)^n, & x \leq n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann auf keinem Punkt in $\mathbb{N}$. $({}^*f_n{}^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert aber gegen die Nullfunktion auf ${}^*\mathbb{N}$ $\mu_{\mathcal{L}}$-fastsicher (auch stochastisch und im Mittel). Jedes ${}^*f_n{}^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ ist sogar $\mu_{\mathcal{L}}$-fastsicher Null. Es wird daher nicht sinnvoll sein, fastsichere Konvergenz für W-Inhalte so zu definieren, daß Konvergenz auf einer Menge vom Inhalt 1 vorliegt.

Definition: Eine Lösung des obigen Problems besteht darin, andersherum vorzugehen. Wir betrachten den in Frage stehenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriff gleich auf dem Loeb-Raum. Das liefert externe Bedingungen. Durch *Overflow* und *Transfer* können sie in den "richtigen" Begriff für W-Inhalte transformiert werden.
Wir erklären dieses Prinzip zur Definition für Begriffe, Strukturen, etc. auf Räumen (X, μ), soweit es möglich ist. Wenn wir also z.B. davon sprechen, daß A, B in X bzgl. μ unabhängig sind, so bedeutet dies, ${}^*A, {}^*B$ sind bzgl. $\mu_{\mathcal{L}}$ unabhängig. (Nach obigem Lemma heißt das also $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.)

Die oben definierten Begriffe sind aufgrund des Lemmas 5.1 mit diesem Prinzip kompatibel.
Anhand zweier kurzer Listen soll das "Übertragungsprinzip" erläutert werden. Diese werden auch für das Weitere wichtig sein. Als Referenz für die rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe (und Aussagen), die wir verwenden, sei das Buch [Bau] gegeben.

Lemma 5.2. *Sei μ ein W-Inhalt auf X.*

(1) *Für $f, g \in \mathcal{B}(X)$ gilt: ${}^*f^\circ$ und ${}^*g^\circ$ sind bzgl. $\mu_{\mathcal{L}}$ identisch verteilt genau dann, wenn für alle gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt*
$$\mu(F \circ f) = \mu(F \circ g).$$
(2) *Für $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{B}(X)$ gilt: $({}^*f_i{}^\circ)_{i \in I}$ ist eine $\mu_{\mathcal{L}}$-unabhängige Familie genau dann, wenn für alle endlichen $S \subset I$ und für alle gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen $F_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in S$, gilt*
$$\mu(\prod_{i \in S} F_i \circ f_i) = \prod_{i \in S} \mu(F_i \circ f_i).$$
(3) *Für $(T_i)_{i \in I} \subset \mathrm{Abb}(X, Y)$ gilt: $({}^*T_i)_{i \in I}$ ist eine $\mu_{\mathcal{L}}$-unabhängige Familie genau dann, wenn für alle endlichen $S \subset I$ und für alle $A_i \subset Y$, $i \in S$, gilt*
$$\mu(\bigcap_{i \in S} T_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i \in S} \mu(T_i^{-1}(A_i)).$$
(4) *Sei μ' ein weiterer W-Inhalt auf X. $\mu'_{\mathcal{L}}$ ist $\mu_{\mathcal{L}}$-stetig genau dann, wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall A \subset X \; [\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \mu'(A) \leq \varepsilon].$$

Beweis.
(1) Ist $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und gleichmäßig stetig, so gilt
$$\forall x \in {}^*X \; F \circ {}^*f^\circ(x) = ({}^*F \circ {}^*f(x))^\circ = {}^*(F \circ f)^\circ(x),$$
d.h. $F \circ {}^*f^\circ = {}^*(F \circ f)^\circ$. Ebenso gilt $F \circ {}^*g^\circ = {}^*(F \circ g)^\circ$. Daher ist
$$\mu_{\mathcal{L}}(F \circ {}^*f^\circ) = \mu_{\mathcal{L}}({}^*(F \circ f)^\circ) = \mu(F \circ f) \quad \text{bzw.} \quad \mu_{\mathcal{L}}(F \circ {}^*g^\circ) = \mu_{\mathcal{L}}({}^*(F \circ g)^\circ) = \mu(F \circ g).$$
Da die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ durch die gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ erzeugt wird, gilt, daß f und g identisch verteilt sind, genau dann, wenn für alle gleichmäßig stetigen, beschränkten $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mu_{\mathcal{L}}(F\circ{}^*f^\circ) = \mu_{\mathcal{L}}(F\circ{}^*g^\circ).$$

Hieraus ergibt sich dann die Behauptung.
(2) Der Beweis dieser Behauptung verläuft nach demselben Schema wie in (1).
(3) $({}^*T_i)_{i\in I}$ ist eine $\mu_{\mathcal{L}}$-unabhängige Familie genau dann, wenn für alle endlichen $S \subset I$ und für alle meßbaren $M_i \subset {}^*Y$, $i \in S$, gilt

$$\mu_{\mathcal{L}}(\bigcap_{i\in S} {}^*T_i^{-1}(M_i)) = \prod_{i\in S} \mu_{\mathcal{L}}({}^*T_i^{-1}(M_i)).$$

Da $\sigma({}^*\mathfrak{P}(Y))$ von ${}^*\mathfrak{P}(Y)$ erzeugt wird und ${}^*\mathfrak{P}(Y)$ $\cap$-stabil ist, ist diese Bedingung äquivalent zu: Für alle endlichen $S \subset I$ und für alle internen $A_i \subset {}^*Y$, $i \in S$, gilt

$$\mu_{\mathcal{L}}(\bigcap_{i\in S} {}^*T_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i\in S} \mu_{\mathcal{L}}({}^*T_i^{-1}(A_i)).$$

Hieraus folgt die Behauptung in die eine Richtung durch Einschränkung auf die standard-Mengen, und in die andere Richtung durch *Transfer*.
(4) $\mu'_{\mathcal{L}}$ ist $\mu_{\mathcal{L}}$-stetig genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ \forall M \in \sigma({}^*\mathfrak{P}(X))\ [\mu_{\mathcal{L}}(M) \le \delta \Rightarrow \mu'_{\mathcal{L}}(M) \le \varepsilon].$$

Nun gibt es für jedes $M \in \sigma({}^*\mathfrak{P}(X))$ ein internes $A \subset {}^*X$, mit $\mu_{\mathcal{L}}(M \triangle A) = \mu'_{\mathcal{L}}(M \triangle A) = 0$. Daher ist $\mu'_{\mathcal{L}}$ $\mu_{\mathcal{L}}$-stetig genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ \forall A \subset {}^*X \text{ intern } [{}^*\mu(A) \le {}^*\delta \Rightarrow {}^*\mu'(A) \le {}^*\varepsilon].$$

Die Behauptung ergibt sich nun mit *Transfer*. □

Lemma 5.3. *Sei μ ein W-Inhalt auf X, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathcal{B}(X)$.*

(1) *$({}^*f_n{}^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert im $\mu_{\mathcal{L}}$-Mittel in $({}^*X, \sigma({}^*\mathfrak{P}(X)), \mu_{\mathcal{L}})$*

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n,m\to\infty} \mu(|f_n - f_m|) = 0.$$

(2) *$({}^*f_n{}^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch in $({}^*X, \sigma({}^*\mathfrak{P}(X)), \mu_{\mathcal{L}})$*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x \in X,\ |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon\}) = 0.$$

(3) *$({}^*f_n{}^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mu_{\mathcal{L}}$-fastsicher in $({}^*X, \sigma({}^*\mathfrak{P}(X)), \mu_{\mathcal{L}})$*

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x \in X,\ \sup_{n\le k\le m} |f_n(x) - f_k(x)| \ge \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis.
(1) $({}^*f_n{}^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert im $\mu_{\mathcal{L}}$-Mittel

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n,m\to\infty} \mu_{\mathcal{L}}(|{}^*f_n{}^\circ - {}^*f_m^\circ|) = 0.$$

Aus $\mu_{\mathcal{L}}(|{}^*f_n{}^\circ - {}^*f_m^\circ|) = \mu_{\mathcal{L}}({}^*|f_n - f_m|^\circ) = \mu(|f_n - f_m|)$ folgt die Behauptung.
(2) Es gilt für $0 < \delta < \varepsilon$

$$\begin{aligned} {}^*\{x \in X,\ |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon + \delta\} &\subset \{x \in {}^*X,\ |{}^*f_n{}^\circ(x) - {}^*f_m{}^\circ(x)| \ge \varepsilon\} \\ &\subset {}^*\{x \in X,\ |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon - \delta\}. \end{aligned}$$

Es kann daher folgendermaßen argumentiert werden:
$({}^*f_n{}^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0 \lim_{n,m\to\infty}\mu_{\mathcal{L}}(\{x\in{}^*X,\ |{}^*f_n{}^\circ(x)-{}^*f_m{}^\circ(x)|\geq\varepsilon\})=0\\
&\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0 \lim_{n,m\to\infty}\mu_{\mathcal{L}}({}^*\{x\in X,\ |f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\})=0\\
&\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0 \lim_{n,m\to\infty}\mu(\{x\in X,\ |f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\})=0.
\end{aligned}$$

(3) Dieser Punkt kann ganz ähnlich wie (2) behandelt werden. □

Gemäß der oben getroffenen Vereinbarung sagen wir also z.B. die Familie $(f_i)_{i\in I}$ ist μ-unabhängig, wenn für alle endlichen $S\subset I$ und für alle gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen $F_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $i\in S$, gilt

$$\mu(\prod_{i\in S}F_i\circ f_i)=\prod_{i\in S}\mu(F_i\circ f_i).$$

Oder auch: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-fastsicher, wenn

$$\forall\varepsilon>0 \lim_{n,m\to\infty}\mu(\{x\in X,\ \sup_{n\leq k\leq m}|f_n(x)-f_k(x)|\geq\varepsilon\})=0.$$

Wir sind nun in der Lage, die eingangs erläuterten, heuristischen Überlegungen an konkreten Beispielen durchzuführen.

Satz 5.4. *(Borel-Cantelli-Lemma für W-Inhalte)*
Sei μ ein W-Inhalt auf X. Sind $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Teilmengen aus X, so gilt

$$\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)=\infty\ \Rightarrow\ \forall n\in\mathbb{N}\lim_{m\to\infty}\mu(\bigcup_{n\leq k\leq m}A_k)=1.$$

Beweis. Wir wenden im Loeb-Raum $(\mu_{\mathcal{L}},\sigma({}^*\mathfrak{P}(X)))$ das Borel-Cantelli-Lemma (vgl. [Bau]) an. Die Familie $({}^*A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dort unabhängig, d.h.

$$\mu_{\mathcal{L}}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}{}^*A_m)=1.$$

Aufgrund der Stetigkeit des Maßes $\mu_{\mathcal{L}}$ bedeutet dies

$$\forall n\in\mathbb{N}\lim_{m\to\infty}({}^*\mu(\bigcup_{n\leq k\leq m}{}^*A_k))^\circ=\lim_{m\to\infty}\mu_{\mathcal{L}}(\bigcup_{n\leq k\leq m}{}^*A_k)=\mu_{\mathcal{L}}(\bigcup_{k\geq n}{}^*A_k)=1.$$

Aus $({}^*\mu(\bigcup_{n\leq k\leq m}{}^*A_k))^\circ=\mu(\bigcup_{n\leq k\leq m}A_k)$ folgt die Behauptung. □

Satz 5.5. *(Starkes Gesetz der großen Zahlen für W-Inhalte)*
Sei μ ein W-Inhalt auf X. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}(X)$ eine unabhängige Familie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ eine aufsteigende Folge positiver, reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\mathrm{V}(f_n)}{a_n^2}<\infty$. Dann gilt

$$\forall\varepsilon>0 \lim_{m,n\to\infty}\mu(\{x\in X,\ \sup_{n\leq k\leq m}|\frac{1}{a_k}\sum_{i\leq k}(f_i(x)-\mathrm{E}f_i)|>\varepsilon\})=0.$$

Beweis. Nach dem Satz von Kolmogoroff (vgl. [Bau]) gilt im Loeb-Raum

$$\frac{1}{a_k}\sum_{i\le k}({}^*f_i{}^\circ - \mathrm{E}{}^*f_i{}^\circ) \quad \text{konvergiert für } k\to\infty \ \mu_{\mathcal{L}}\text{-fastsicher gegen } 0.$$

Das Übertragungsprinzip, ähnlich wie in Satz 5.3 (3), liefert die Behauptung. □

Für $(f_i)_{i\le n}\subset\mathcal{B}(X)$ seien bei gegebenen W-Inhalt μ auf X folgende Notationen vereinbart:

$$\begin{aligned} s_n^2 &:= \sum_{i\le n}\mathrm{Var}(f_i).\\ \beta_n^3 &:= \sum_{i\le n}\mathrm{E}|f_i|^3. \end{aligned}$$

Es bezeichne weiterhin ϕ die Normalverteilung, d.h. $\phi(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\exp(-\frac{y^2}{2})dy$. Mit dieser Notation gilt dann folgender Satz.

Satz 5.6. *(Satz von Berry-Esséen für W-Inhalte)*
Sei $(f_i)_{i\le n}\subset\mathcal{B}(X)$ eine μ-unabhängige Familie mit $\forall i\le n\ \mu f_i = 0$. Dann gilt

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ |\mu(\{x\in X,\ \frac{1}{s_n}\sum_{i\le n}f_i(x)\le\alpha\})-\phi(\alpha)|\le 0,8\cdot\frac{\beta_n^3}{s_n^3}.$$

Beweis. Die Familie $({}^*f_i{}^\circ)_{i\le n}$ ist $\mu_{\mathcal{L}}$-unabhängig im Loeb-Raum. Es ist $\forall i\le n\ \mathrm{Var}({}^*f_i{}^\circ) = \mathrm{Var}(f_i)$ und $\forall i\le n\ \mathrm{E}|{}^*f_i{}^\circ|^3 = \mathrm{E}|f_i|^3$, insbesondere ist $\forall i\le n\ \mathrm{E}|{}^*f_i{}^\circ|^3<\infty$. Es folgt mit dem Satz von Berry-Esséen (vgl. [Gal]):

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ |\mu_{\mathcal{L}}(\{x\in {}^*X,\ \frac{1}{s_n}\sum_{i\le n}{}^*f_i{}^\circ(x)\le\alpha\})-\phi(\alpha)|\le 0,8\cdot\frac{\beta_n^3}{s_n^3}.$$

Wir bemerken nun, daß $\forall\varepsilon>0$ und $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{L}}(\{x\in {}^*X,\ \frac{1}{s_n}\sum_{i\le n}{}^*f_i{}^\circ(x)\le\alpha-\varepsilon\}) &\le \mu_{\mathcal{L}}(\{x\in {}^*X,\ {}^*(\frac{1}{s_n}\sum_{i\le n}f_i)(x)\le {}^*\alpha\})\\ &= \mu(\{x\in X,\ \frac{1}{s_n}\sum_{i\le n}f_i(x)\le\alpha\})\\ &\le \mu_{\mathcal{L}}(\{x\in {}^*X,\ \frac{1}{s_n}\sum_{i\le n}{}^*f_i{}^\circ(x)\le\alpha+\varepsilon\}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\forall\varepsilon>0$ und $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -0,8\cdot\frac{\beta_n^3}{s_n^3}+\phi(\alpha-\varepsilon)-\phi(\alpha) &\le \mu(\{x\in X,\ \frac{1}{s_n}\sum_{i\le n}f_i(x)\le\alpha\})-\phi(\alpha)\\ &\le 0,8\cdot\frac{\beta_n^3}{s_n^3}+\phi(\alpha+\varepsilon)-\phi(\alpha). \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von ϕ erhält man die Behauptung. □

5.2 Erzeugung von W-Inhalten

In diesem Abschnitt geht es um die Erzeugung und Charakterisierung von W-Inhalten auf einer gegebenen Menge X und zwar mit Hilfe der Stone-Čech-Kompaktifizierung. Das Ergebnis besteht darin, die Extremalpunkte (s.u.) in der konvexen, kompakten Menge der W-Inhalte explizit zu bestimmen. Es sei noch einmal wiederholt, daß ein W-Inhalt auf X eine positive, normierte Linearform auf dem Vektorgitter der reellwertigen, beschränkten Funktionen auf X ist.

Es sei $\mathcal{W}(X) := \{\mu,\ \mu \text{ ist W-Inhalt auf } X\}$.

Auf $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(X), \mathbb{R})$ ist durch die schwach-$*$-Topologie eine topologische Struktur definiert, die diesen zu einem lokal konvexen Vektorraum macht. Sie induziert auf $\mathcal{W}(X)$ die Uniforme Struktur

$$\mathcal{W} := \{W_{S,\varepsilon}, S \subset \mathcal{B}(X) \text{ endlich } \varepsilon > 0\} \quad \text{mit} \quad (\mu, \mu') \in W_{S,\varepsilon} :\Leftrightarrow \forall f \in S\ |\mu f - \mu' f| < \varepsilon.$$

Dieselbe Uniforme Struktur wird dadurch erhalten, wenn statt aller beschränkten Funktionen lediglich die charakteristischen Funktionen in der Definition zugelassen werden.

Satz 5.7. $(\mathcal{W}(X), \mathcal{W})$ *ist konvex und kompakt.*

Beweis. Die Konvexität ist klar. Zum Nachweis der Kompaktheit benutzen wir die nonstandard Charakterisierung der Kompaktheit.
Sei also $\mu \in {}^*\mathcal{W}(X)$ und sei für $f \in \mathcal{B}(X)$ $\mu^\circ f := (\mu^* f)^\circ$. Dann ist $\mu^\circ \in \mathcal{W}(X)$ und $(\mu, \mu^\circ) \in \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{W}}$. (Wobei wir hier mit $\mathcal{W}$ auch die entsprechende zulässige Uniforme Struktur auf ${}^*\mathcal{W}(X)$ bezeichnen.) □

Definition: Für eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}(X)$ sei die *konvexe Hülle* $co(\mathcal{A})$ erklärt durch

$$co(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ konvex}}} \mathcal{B} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i,\ \mu_i \in \mathcal{A},\ \alpha_i \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}.$$

Definition: In einer konvexen, kompakten Menge $\mathcal{K}$ heißt ein Punkt $x \in \mathcal{K}$ *extremal* bzw. *Extremalpunkt*, falls es kein Paar $y \neq y' \in \mathcal{K}$ und kein $\alpha \in]0,1[$ gibt mit $x = \alpha y + (1-\alpha) y'$.

Zur Theorie lokal konvexer Vektorräume sei z.B. auf Murphy [Mur] verwiesen.
Nach dem Satz von Krein-Milman wird nun $\mathcal{W}(X)$ durch seine Extremalpunkte erzeugt in dem Sinne, daß die konvexe Hülle der Extremalpunkte dicht liegt in $\mathcal{W}(X)$. Wir können dies hier genauer angeben, d.h. es können die Extremalpunkte explizit beschrieben werden und zwar mit Hilfe der Stone-Čech-Kompaktifizierung (vgl. letztes Kapitel).
Wir setzen noch

$$\mathcal{W}_0(X) := \{\mu \in \mathcal{W}(X),\ \forall S \subset X \text{ endlich } \mu(S) = 0\}.$$

Satz 5.8.

(1) *Die Abbildung*
$$\Lambda : \langle X \rangle \longrightarrow \mathcal{W}(X), \quad x \mapsto \Lambda_x, \quad \Lambda_x f := \overline{f}(x)$$
ist eine Einbettung Uniformer Strukturen.

(2) $\mathrm{Bild}(\Lambda) = \{\mu \in \mathcal{W}(X),\ \mu$ *extremal in* $\mathcal{W}(X)\}$.

(3) $\mathrm{Bild}(\Lambda)|_{\langle X\rangle\setminus X} = \{\mu \in \mathcal{W}(X),\ \mu$ *extremal in* $\mathcal{W}_0(X)\}$.

Beweis.
(1) $\forall x \in \langle X\rangle\ \Lambda_x \in \mathcal{W}(X)$ ist klar, ebenso die Injektivität der Abbildung Λ.
Für $S \subset \mathfrak{P}(X)$ endlich und für alle $\varepsilon,\ 1 > \varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}(x,y) \in \overline{K_S} &\Leftrightarrow \forall A \in S\ [x \in \langle A\rangle \Leftrightarrow y \in \langle A\rangle]\\ &\Leftrightarrow \forall A \in S\ \mathbb{1}_{\langle A\rangle}(x) = \mathbb{1}_{\langle A\rangle}(y)\\ &\Leftrightarrow \forall A \in S\ \Lambda_x(A) = \Lambda_y(A)\\ &\Leftrightarrow \forall A \in S\ |\Lambda_x(A) - \Lambda_y(A)| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow (\Lambda_x, \Lambda_y) \in W_{S,\varepsilon}.\end{aligned}$$

Λ ist also eine Einbettung.
(2) Wir bemerken zunächst, daß Λ in die Menge der Extremalpunkte abbildet. Für jedes $x \in \langle X\rangle$ und für alle $A \subset X$ ist nämlich $\Lambda_x(A) \in \{0,1\}$. Ist dann $\Lambda_x = \alpha\mu + (1-\alpha)\mu'$ mit $0 < \alpha < 1$, so ist für alle $A \subset X\ \Lambda_x(A) = \mu(A) = \mu'(A)$, also $\mu = \mu'$.
Um nachzuweisen, daß die Extremalpunkte von $\mathcal{W}(X)$ im Bild von Λ liegen, reicht es nach dem Satz von Krein-Milman zu zeigen, daß $co(\mathrm{Bild}(\Lambda)) \subset \mathcal{W}(X)$ dicht liegt, da $\mathrm{Bild}(\Lambda)$ abgeschlossen ist. Es ist aber sogar schon $co(\mathrm{Bild}(\Lambda|_X))$ dicht in $\mathcal{W}(X)$.
(3) Folgt mit (2). □

Es sei bemerkt, daß die $\Lambda_x,\ x \in \langle X\rangle\setminus X$ gerade die Ultrainhalte auf X sind (vgl. Kapitel 1).

5.3 Induzierte Maße auf der Stone-Čech-Kompaktifizierung.

Wir kommen nun zu einem der Hauptanliegen dieses Kapitels. Im ersten Abschnitt wurde gezeigt, wie mittels Loebmaße eine Wahrscheinlichkeitstheorie für Inhalte aufgebaut werden kann. Es wird daher sinnvoll sein, bei der Untersuchung eines W-Inhaltes μ auf einer Menge X den zugehörigen Loeb-Raum $({}^*X, \sigma({}^*\mathfrak{P}(X)))$ zu betrachten. Wie später deutlich wird, haben die Räume $({}^*X, \sigma({}^*\mathfrak{P}(X)))$ und $({}^*X, \overline{\sigma}({}^*\mu, {}^*\mathfrak{P}(X))$ gewisse Nachteile (vgl. Seite 50). Mittels der Stone-Čech-Kompaktifizierung kann nun ein befriedigenderer Maßraum konstruiert werden, welcher zudem weitere Strukturen trägt.
Es stellt sich heraus, daß jeder W-Inhalt auf X in kanonischer Weise ein reguläres Borelmaß auf $\langle X\rangle$ induziert, welches durch den Umweg über Loebmaße konstruiert werden kann. (Wir betonen, daß hierfür der Wahrscheinlichkeitsraum $({}^*X, \sigma({}^*\mathfrak{P}(X)), \mu_{\mathcal{L}})$ nicht ausreicht.) Die guten Stetigkeitseigenschaften der Loebmaße können dabei gerettet werden. Der Untersuchung solcher induzierten Maße ist dieser Abschnitt gewidmet. Im Hinblick auf das im ersten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellte Übertragungsprinzip könnte es eventuell sinnvoller sein, ein solches Prinzip direkt über die Stone-Čech-Kompaktifizierungen zu definieren.

Wir benutzen die Terminologie aus dem Kapitel über die Stone-Čech-Kompaktifizierung und zeigen zunächst eine Hilfsaussage über durch W-Inhalte induzierte Loebmaße.

Lemma 5.9. *Sei μ ein W-Inhalt auf X.*

(1) *Sei $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}(X)$ eine absteigend filtrierende Familie beschränkter Funktionen auf X. Dann ist*

$$\inf_{i\in I} {}^*f_i{}^\circ \quad \textit{loebintegrierbar} \quad \textit{und} \quad \mu_{\mathcal{L}}(\inf_{i\in I} {}^*f_i{}^\circ) = \inf_{i\in I} \mu f_i.$$

Außerdem gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$(\inf_{i\in I} {}^*f_i{}^\circ)^{-1}(]-\infty, a[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I} {}^*(f_i^{-1}(]-\infty, a-\frac{1}{n}])).$$

(2) *Für jedes $\mathcal{K}^X$-abgeschlossene $K \subset {}^*X$ ist*

$$K \in \overline{\sigma}({}^*\mu, {}^*\mathfrak{P}(X)) \quad \textit{und} \quad \mu_{\mathcal{L}}(K) = \inf_{\substack{A\subset X\\ \langle A\rangle \supset K}} \mu(A).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(\inf_{i\in I} {}^*f_i{}^\circ)^{-1}(]-\infty, a[) &= \bigcup_{i\in I} \{x \in {}^*X,\ {}^*f_i{}^\circ < a\} \\
&= \bigcup_{i\in I} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in {}^*X,\ {}^*f_i(x) \le {}^*a - \frac{1}{{}^*n}\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I} {}^*\{x \in X,\ f_i(x) \le a - \frac{1}{n}\}.
\end{aligned}$$

Die anderen beiden Aussagen in (1) sind gerade die Aussagen des allgemeinen Satz 3.15 für den hier vorliegenden Fall. (2) folgt daraus, wenn man Lemma 4.6 berücksichtigt, welches aussagt, daß eine abgeschlossene Menge in ${}^*X$ gerade der Durchschnitt der sie enthaltenen standard-Mengen ist. □

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Ein *Borelmaß* $\mathfrak{m}$ ist ein Maß auf der von der Topologie $\mathcal{O}$ erzeugten σ-Algebra, der *Borel-σ-Algebra.*
$\mathfrak{m}$ heißt *regulär*, falls für alle Elemente M der Borel-σ-Algebra gilt

$$\mathfrak{m}(M) = \inf_{\substack{U\supset M\\ U \text{ offen}}} \mathfrak{m}(U) \quad \text{und} \quad \mathfrak{m}(M) = \sup_{\substack{K\subset M\\ K \text{ kompakt}}} \mathfrak{m}(K).$$

Es sei $\mathfrak{B}(X)$ die durch die Uniforme Struktur $\overline{\mathcal{K}^X}$ erzeugte Borel-σ-Algebra auf $\langle X\rangle$. Ist $\kappa : {}^*X \longrightarrow \langle X\rangle$ die kanonische Abbildung, so ist diese nach Lemma 5.9 $\overline{\sigma}({}^*\mu, {}^*\mathfrak{P}(X))$-$\mathfrak{B}(X)$-meßbar, da alle abgeschlossenen Mengen in $\overline{\sigma}({}^*\mu, {}^*\mathfrak{P}(X))$ liegen.

Definition: Wir definieren $\overline{\mu}$ als das Bildmaß von $\mu_{\mathcal{L}}$ unter κ, d.h.

$$\forall M \in \mathfrak{B}(X) \ \ \overline{\mu}(M) := \mu_{\mathcal{L}}(\kappa^{-1}(M)).$$

$\overline{\mu}$ ist also ein Borelmaß auf $(\langle X\rangle, \mathfrak{B}(X))$, und aufgrund dieser Definition gilt

$$\forall A \subset X \ \ \overline{\mu}(\langle A\rangle) = \mu(A).$$

Bezeichnet Meß(X) den Vektorraum der $\mathfrak{B}(X)$-meßbaren Funktionen auf $\langle X \rangle$, so haben wir also, daß $\forall F \in$ Meß(X) $F \circ \kappa$ loebmeßbar ist und

$$\overline{\mu} F = \mu_{\mathcal{L}} F \circ \kappa.$$

Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{B}(X)$

$$\overline{\mu}\ \overline{f} = \mu_{\mathcal{L}}({}^*f^\circ) = ({}^*\mu{}^*f)^\circ = \mu f.$$

Wir führen einen weiteren Raum Meß$_\downarrow(X)$ ein:

$$\begin{aligned} \text{Meß}_\downarrow(X) \quad := \quad & \{\inf_{i \in I} \overline{f_i},\ (I \text{ Indexmenge})\ (f_i)_{i \in I} \text{ ist eine absteigend filtrierende} \\ & \text{Familie von Funktionen } f_i \in \mathcal{B}(X)\}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Charakteristischen Funktionen der abgeschlossenen Mengen aus $\langle X \rangle$ in Meß$_\downarrow(X)$ liegen.

Satz 5.10.

(1) Meß$_\downarrow(X) \subset$ Meß(X).

(2) *Sei* $(F_i)_{i \in I} \in$ Meß$_\downarrow(X)$ *absteigend filtrierend. Dann ist*

$$\inf_{i \in I} F_i \in \text{Meß}_\downarrow(X) \qquad \textit{und} \qquad \overline{\mu}(\inf_{i \in I} F_i) = \inf_{i \in I} \overline{\mu}(F_i).$$

(3) *Für alle abgeschlossenen (= kompakten)* $K \in \mathfrak{B}(X)$ *gilt*

$$\overline{\mu}(K) = \inf_{\substack{A \subset X \\ \langle A \rangle \supset K}} \mu(A).$$

Beweis.
(1) Sei $(f_i)_{i \in I}$ absteigend filtrierend und $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Es ist $\inf_{i \in I} \overline{f_i} \circ \kappa = \inf_{i \in I} {}^*f_i{}^\circ$. Nach Lemma 5.9 gilt, da κ surjektiv ist,

$$\begin{aligned} (\inf_{i \in I} \overline{f_i})^{-1}(]-\infty, a[) \quad &= \quad \kappa(\inf_{i \in I} {}^*f_i{}^\circ)^{-1}(]-\infty, a[) \\ &= \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in I} \langle (f_i^{-1}(]-\infty, a - \frac{1}{n}])) \rangle. \end{aligned}$$

Diese Menge ist offen in $\langle X \rangle$, weshalb $\inf_{i \in I} \overline{f_i}$ meßbar bezüglich $\mathfrak{B}(X)$ ist.

(2) Seien für $i \in I$ und $j \in J_i$, $f_{(i,j)} \in \mathcal{B}(X)$, so daß $\forall i \in I$ $F_i = \inf_{j \in J_i} \overline{f}_{(i,j)}$. Es sei weiterhin $\mathcal{I} := \{S \subset \bigcup_{i \in I} \{i\} \times J_i,\ S \text{ endlich}\}$. Dann ist

$$\inf_{i \in I} F_i = \inf_{i \in I} \inf_{j \in J_i} \overline{f}_{(i,j)} = \inf_{S \in \mathcal{I}} \inf_{s \in S} \overline{f_s} = \inf_{S \in \mathcal{I}} \overline{\inf_{s \in S} f_s}.$$

$(\inf_{s \in S} f_s)_{S \in \mathcal{I}}$ ist absteigend filtrierend, daher ist $\inf_{i \in I} F_i \in$ Meß$_\downarrow(X)$. Mit Lemma 5.9 erhalten wir

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(\inf_{i \in I} F_i) \quad &= \quad \overline{\mu}(\inf_{S \in \mathcal{I}} \overline{\inf_{s \in S} f_s}) = \mu_{\mathcal{L}}(\inf_{S \in \mathcal{I}} {}^*\inf_{s \in S} f_s{}^\circ) \\ &= \quad \inf_{S \in \mathcal{I}} \mu(\inf_{s \in S} f_s) = \inf_{i \in I} \inf_{j \in J_i} \mu(f_{(i,j)}) = \inf_{i \in I} \mu_{\mathcal{L}}(\inf_{j \in J_i} {}^*f_{(i,j)}{}^\circ) \\ &= \quad \inf_{i \in I} \overline{\mu}(F_i). \end{aligned}$$

(3) Dies folgt wiederum aus (2) und der Tatsache, daß für abgeschlossenen Mengen K gilt

$$K = \bigcap_{\substack{A \subset X \\ \langle A \rangle \supset K}} \langle A \rangle.$$

$\square$

Satz 5.11. *Für einen W-Inhalt μ auf X ist $\overline{\mu}$ ein reguläres Borelmaß auf $(\langle X \rangle, \mathfrak{B}(X))$.*

Beweis. Sei

$$\mathcal{A} := \{M \subset \mathfrak{B}(X),\ \overline{\mu}(M) = \inf_{\substack{U \supset M \\ U \text{ offen}}} \overline{\mu}(U) = \sup_{\substack{K \subset M \\ K \text{ kompakt}}} \overline{\mu}(K)\}.$$

Zu zeigen ist: $M \in \mathcal{A}$ für alle abgeschlossenen M und $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra.
Sei zunächst M abgeschlossen. $\overline{\mu}(M) = \sup_{\substack{K \subset M \\ K \text{ kompakt}}} \overline{\mu}(K)$ ist dann klar, da M selbst kompakt ist. Da weiterhin $\langle A \rangle$ für alle $A \subset X$ offen ist, gilt nach Satz 5.10

$$\inf_{\substack{A \subset X \\ \langle A \rangle \supset M}} \overline{\mu}(\langle A \rangle) = \overline{\mu}(M) \leq \inf_{\substack{U \supset M \\ U \text{ offen}}} \overline{\mu}(U) \leq \inf_{\substack{A \subset X \\ \langle A \rangle \supset M}} \overline{\mu}(\langle A \rangle).$$

Also ist $M \in \mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra: Natürlich ist $\emptyset \in \mathcal{A}$. Für $M \in \mathcal{A}$ ist auch $M^c \in \mathcal{A}$, da die kompakten Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und umgekehrt. Es bleibt zu zeigen:

$$M_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathcal{A}.$$

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $M_n \in \mathcal{A}$, $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ und $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $U_n \supset M_n$ offen und $K_n \subset M_n$ kompakt mit

$$\overline{\mu}(U_n \backslash M_n) < \varepsilon^n \quad \text{und} \quad \overline{\mu}(M_n \backslash K_n) < \varepsilon^n.$$

Nun ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ offen und $M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ mit

$$\overline{\mu}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \backslash M) < \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon^n < 2\varepsilon.$$

Wählt man außerdem N so groß, daß $\overline{\mu}(M \backslash \bigcup_{n<N} M_n) < \varepsilon$ ist, so ist

$$\overline{\mu}(M \backslash \bigcup_{n<N} K_n) < \varepsilon + \sum_{n<N} \varepsilon^n < 3\varepsilon,$$

und $\bigcup_{n<N} K_n$ ist kompakt. Da ε beliebig gewählt war, folgt $M \in \mathcal{A}$. $\square$

Die guten Approximationseigenschaften des Loebmaßes, meßbare Mengen durch interne Mengen bis auf Maß Null approximieren zu können, finden sich in etwas schwächerer Form auch in den auf den Stone-Čech-Kompaktifizierungen induzierten Maßen wieder. Es ist allerdings nicht richtig, daß in diesem Fall die meßbaren Mengen bis auf Maß Null durch abgeschlossene Mengen approximierbar wären.

Lemma 5.12. *Es seien $\mu_1, ..., \mu_n$ W-Inhalte auf X und sei $M \in \mathfrak{B}(X)$, d.h. borel-meßbar.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \subset X \ [\forall i \in \{1, ..., n\} \ \overline{\mu}_i(M \triangle \langle A \rangle) < \varepsilon].$$

Beweis. Sei $M \in \mathfrak{B}(X)$. Da die $\overline{\mu}_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ regulär sind, kann zu $\varepsilon > 0$ ein abgeschlossenes $K \in \mathfrak{B}(X)$ gefunden werden mit $K \subset M$ und

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ \overline{\mu}_i(M \backslash K) < \varepsilon.$$

Aufgrund von Satz 5.11 gibt es ein $A \subset X$ mit $\langle A \rangle \supset K$ und

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \ \overline{\mu}_i(\langle A \rangle \backslash K) < \varepsilon.$$

Hieraus folgt $\forall i \in \{1, ..., n\}$

$$\overline{\mu}_i(M \triangle \langle A \rangle) = \overline{\mu}_i(M \backslash \langle A \rangle) + \overline{\mu}_i(\langle A \rangle \backslash M) \leq \overline{\mu}_i(M \backslash K) + \overline{\mu}_i(\langle A \rangle \backslash K) < 2\varepsilon.$$

□

Durch diese Approximationseigenschaft werden die W-Borelmaße auf $(\langle X \rangle, \mathfrak{B}(X))$, die durch W-Inhalte induziert werden, charakterisiert. Ist nämlich $\mathfrak{m}$ ein solches Borelmaß, so definiert $\mu(A) := \mathfrak{m}(\langle A \rangle)$, $A \subset X$, einen W-Inhalt auf X, und aufgrund der Approximationseigenschaft von $\mathfrak{m}$ und $\overline{\mu}$ kann auf $\mathfrak{m} = \overline{\mu}$ geschlossen werden. Wir haben also folgenden Satz.

Satz 5.13. *Ein W-Borelmaß $\mathfrak{m}$ auf $(\langle X \rangle, \mathfrak{B}(X))$ wird genau dann durch einen W-Inhalt auf X induziert, wenn gilt*

$$\forall M \in \mathfrak{B}(X) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists A \subset X \quad \mathfrak{m}(M \triangle \langle A \rangle) < \varepsilon.$$

Zum Abschluß diese Abschnittes soll untersucht werden, wie sich spezielle Operatoren $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ zu Operatoren $\overline{T}$: Meß$(X) \longrightarrow$ Meß(Y) fortsetzen lassen und ihre Verträglichkeit mit W-Inhalten $\mu \in \mathcal{W}(Y)$ geprüft werden. Ist z.B. $T : Y \longrightarrow X$, so resultiert daraus ein positiver, normierter, linearer Operator $T^\star : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ durch $T^\star f := f \circ T$.

Definition: In Anlehnung an die Terminologie der Wahrscheinlichkeitstheorie heiße ein Operator $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ *markoffsch*, falls

(I) T ist linear.
(II) T ist positiv, d.h. $f \geq 0 \ \Rightarrow \ Tf \geq 0$.
(III) T ist normiert, d.h. $T\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_Y$.

Markoffsche Operatoren $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ erzeugen Markoffsche Kerne (im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie) $\overline{T}$: Meß$(X) \longrightarrow$ Meß(Y) durch folgende Konstruktion:

Sei $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ markoffsch. Für alle $y \in \langle Y \rangle$ definiert dann

$$T_y : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T_y f := \overline{Tf}(y)$$

einen W-Inhalt auf $(X, \mathcal{B}(X))$. Wir erklären folgende Abbildung $\overline{T}$

$$\overline{T} : \text{Meß}(X) \longrightarrow \text{Abb}(\langle Y \rangle, \mathbb{R}), \quad \text{durch} \quad \overline{T}F(y) := \overline{T_y}F.$$

Es gilt daher insbesondere für alle $f \in \mathcal{B}(X)$ $\overline{T}\ \overline{f} = \overline{Tf}$, da

$$\forall y \in \langle Y \rangle \ (\overline{T}\ \overline{f})(y) = \overline{T_y f} = T_y f = \overline{Tf}(y).$$

Satz 5.14. *Sei $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ markoffsch.*

(1) *$\overline{T}$ ist ein positiver, linearer Operator $\overline{T} : \mathrm{Meß}(X) \longrightarrow \mathrm{Meß}(Y)$.*

(2) *Ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Meß}(X)$ absteigend filtrierend, so ist*

$$\overline{T}(\inf_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{T}F_n.$$

(3) *Ist $(F_i)_{i\in I} \subset \mathrm{Meß}_\downarrow(X)$ absteigend filtrierend, so ist*

$$\overline{T}(\inf_{i\in I} F_i) = \inf_{i\in I} \overline{T}F_i.$$

Insbesondere ist $\overline{T}(\mathrm{Meß}_\downarrow(X)) \subset \mathrm{Meß}_\downarrow(Y)$.

(1) und (2) zusammen bedeuten gerade, daß $\overline{T}$ Markoffscher Kern ist im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Beweis. (1) folgt aus (2) und (3), da die charakteristischen Funktionen der abgeschlossenen Mengen von $\langle X\rangle$ in $\mathrm{Meß}_\downarrow(X)$ liegen. Wir zeigen (3). Der Beweis von (2) verläuft genauso, wobei man dort die Maß-Stetigkeit ausnutzt.
Sei $(F_i)_{i\in I} \subset \mathrm{Meß}_\downarrow(X)$ absteigend filtrierend. Wir benutzen Satz 5.10 (2):

$$\overline{T}(\inf_{i\in I} F_i)(y) = \overline{T_y}(\inf_{i\in I} F_i) = \inf_{i\in I} \overline{T_y}F_i = \inf_{i\in I} \overline{T}F_i(y).$$

□

Ist $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ markoffsch und $\mu \in \mathcal{W}(Y)$, so ist automatisch $\mu\circ T$ ein W-Inhalt auf X. Die Verträglichkeit von Markoff Operatoren und W-Inhalten drückt sich dann aus in folgendem Satz.

Satz 5.15. *Ist $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ markoffsch und $\mu \in \mathcal{W}(Y)$, so ist*

$$\overline{\mu\circ T} = \overline{\mu}\circ\overline{T}.$$

Beweis. Aus $\overline{T}\ \overline{f} = \overline{Tf}$ für $f \in \mathcal{B}(X)$ ergibt sich, daß

$$\forall f \in \mathcal{B}(X)\ \overline{\mu\circ T}(\overline{f}) = \overline{\mu}\circ\overline{T}(\overline{f}).$$

Hieraus folgt mit den Sätzen 5.10 und 5.14:

$$\forall K \in \langle X\rangle \text{ abgeschlossen gilt } \overline{\mu\circ T}(\mathbb{1}_K) = \overline{\mu}\circ\overline{T}(\mathbb{1}_K).$$

Aufgrund der Markoffeigenschaft von $\overline{T}$ erhält man nun, daß $\overline{\mu\circ T}$ und $\overline{\mu}\circ\overline{T}$ übereinstimmen auf allen meßbaren Mengen und daher schon gleich sind. □

Ist $T : Y \longrightarrow X$, so haben wir zwei kanonische Operatoren $\mathrm{Meß}(X) \longrightarrow \mathrm{Meß}(Y)$, nämlich

$$\overline{T^\star}, \quad \text{erklärt durch} \quad T^\star f = f\circ T, \quad f \in \mathcal{B}(X)$$

und

$$\overline{T}^\star, \quad \text{erklärt durch} \quad \overline{T}^\star F := F\circ\overline{T}, \quad F \in \mathrm{Meß}(X),$$

wobei $\overline{T} : \langle X\rangle \longrightarrow \langle Y\rangle$ die kanonische Fortsetzung bedeutet. Mit derselben Technik wie oben beweist man, daß beide übereinstimmen.

Lemma 5.16. *Sei $T : Y \longrightarrow X$. Dann gilt* $\overline{T^\star} = \overline{T}^\star$.

5.4 Reguläre Inhalte auf $\mathbb{N}$

Ist eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ über einer Indexmenge I gegeben, so kann zu jeder endlichen Menge $\emptyset \neq S \subset I$ der Mittelwert $\frac{1}{|S|}\sum_{i\in S} a_i$ gebildet werden. Solche über endliche Mengen gebildete Mittelwerte stellen spezielle W-Inhalte auf $(I, \mathfrak{P}(I))$ dar. In vielen Bereichen der Mathematik ist nun das asymptotische Verhalten solcher Mittelwerte entlang gewisser, gegebener Familien endlicher Teilmengen von I von Bedeutung. Von besonderem Interesse (z.B. in der Zahlentheorie oder der Wahrscheinlichkeitstheorie) ist dabei der Fall $I = \mathbb{N}$ und $S = \{1, ..., N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Dieser führt zum Begriff des regulären Inhalts (s.u.), der hier eingeführt werden soll und für die weitere Untersuchung von W-Inhalten wichtig ist. Wir führen hierfür spezielle Bezeichnungen ein.

Definition: Für $N \in \mathbb{N}$ sei λ_N der durch

$$\lambda_N f := \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(n)$$

definierte W-Inhalt auf $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$.

Es gilt dann also für $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(n) \quad \text{existiert} \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{N\to\infty} \lambda_N f = \limsup_{N\to\infty} \lambda_N f.$$

Das gibt Anlaß zur folgenden Definition.

Definition: Es bezeichne für $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$

$$\underline{d}f := \liminf_{N\to\infty} \lambda_N f \quad \text{und} \quad \overline{d}f := \limsup_{N\to\infty} \lambda_N f.$$

Bemerkung: $\underline{d}$ und $\overline{d}$ definieren keine Inhalte auf $\mathbb{N}$.

Ein W-Inhalt λ auf $\mathbb{N}$ heißt *regulär*, falls gilt

$$\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \ \lambda f \in [\underline{d}f, \overline{d}f].$$

(Wir hoffen, daß dieser Begriff zu keinen Verwechselungen führt.) Wir bezeichnen die Menge der regulären Inhalte auf $\mathbb{N}$ mit $\mathcal{W}_{\text{reg}}$. Es ist nicht von vornherein klar, daß reguläre Inhalte überhaupt existieren. Es ist aber leicht zu sehen, daß $\mathcal{W}_{\text{reg}}$ (falls nicht leer) eine konvexe, kompakte Teilmenge von $\mathcal{W}(\mathbb{N})$ ist, weshalb sie erzeugt wird von extremalen Punkten.
Ziel dieses Abschnittes ist es, die regulären Inhalte zu charakterisieren und auch nachzuweisen, daß es "genügend" viele von ihnen gibt.

Wir werden Nonstandard-Modelle benutzen, um reguläre Inhalte zu konstruieren und auch, um eine Charakterisierung dieser anzugeben. Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung: Für $N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$f \mapsto {}^*\lambda_N^\circ f := ({}^*\lambda_N)_{\mathcal{L}}({}^*f)^\circ = ({}^*\lambda_N {}^*f)^\circ$$

ein regulärer Inhalt. Dies ist eine unmittelbare Folge von *Transfer*. Es ergibt sich daraus folgender Satz.

Satz 5.17. *Sei $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Dann gilt*

(1) $\{\lambda f,\ \lambda \in \mathcal{W}_{\text{reg}}\} = [\underline{d}f, \overline{d}f]$

(2) $c = \lim\limits_{N\to\infty} \lambda_N f$ *existiert* $\Leftrightarrow\ \forall\lambda \in \mathcal{W}_{\text{reg}}\ \lambda f = c.$

Beweis. Die Inklusion "$\subset$" in (1) ergibt sich aufgrund der Definition regulärer Inhalte. Andererseits kann eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ausgewählt werden mit $\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} f = \underline{d}f$. Für $K \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ ist dann ${}^*\lambda^\circ_{n_K} = \underline{d}f$, d.h. es gibt ein $\lambda_1 \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ mit $\lambda_1 f = \underline{d}f$. Genauso gibt es ein $\lambda_2 \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ mit $\lambda_2 f = \overline{d}f$. Aufgrund der Konvexität von $\mathcal{W}_{\text{reg}}$ folgt nun die andere Inklusion. (2) ist eine direkte Folge von (1). $\square$

Wir benötigen eine Hilfsaussage, für die die folgende Notation vereinbart wird.
Für $f \in \mathcal{B}(X)$ sei $\|f\|$ die Supremumsnorm von f

$$\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

$\mathcal{B}(X)$ wird damit zu einem Banachraum.
Für einen linearen Operator $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ bezeichne $\|T\|$ die Operatornorm

$$\|T\| := \sup_{\|f\|=1} \|Tf\|.$$

T heißt *positiv*, falls $f \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0$ und *normiert*, falls $T\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_Y$.
Für einen normierten, linearen Operator T gilt dann

$$T \text{ ist positiv } \Leftrightarrow \|T\| = 1.$$

Ist nämlich T positiv und $\|f\| = 1$, so ist $\mathbb{1}_X - f \geq 0$ und daher $0 \leq T(\mathbb{1}_X - f) = \mathbb{1}_Y - Tf$, d.h. $Tf \leq \mathbb{1}_Y$. Genauso ergibt sich $-Tf = T(-f) \leq \mathbb{1}_Y$, also insgesamt $\|Tf\| \leq 1$.
Ist andererseits $\|T\| = 1$ und $f \geq 0$ (o.B.d.A. sei $\|f\| = 1$), so ist $0 \leq \mathbb{1}_X - f \leq \mathbb{1}_X$ und daher

$$T\mathbb{1}_X - Tf = T(\mathbb{1}_X - f) \leq \|\mathbb{1}_X - f\|\mathbb{1}_Y \leq \mathbb{1}_Y = T\mathbb{1}_X,$$

d.h. $Tf \geq 0$.

Lemma 5.18. *Sei $T : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ ein linearer, normierter Operator. Sei λ ein W-Inhalt auf $\mathcal{B}(X)$ mit*

$$\forall f \in \mathcal{B}(X)\ |\lambda f| \leq \|Tf\|.$$

Dann gibt es einen W-Inhalt μ auf $\mathcal{B}(Y)$ mit

$$\mu\circ T = \lambda.$$

Beweis. Wir benutzen einen Hahn-Banach-Satz.
Sei $V := \text{Bild}(T) \subset \mathcal{B}(Y)$. V ist ein Untervektorraum. Wir können $\mu_0 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ erklären durch

$$\mu_0(Tf) := \lambda f, \text{ für } f \in \mathcal{B}(X).$$

Ist nämlich $Tf = Tg$, so folgt $T(f - g) = 0$ und nach Voraussetzung ist also $\lambda(f - g) = 0$.
Außerdem gilt für $F := Tf$

$$|\mu_0 F| = |\lambda f| \leq \|Tf\| = \|F\|,$$

und das heißt $\|\mu_0\| = 1$, da $\mu_0(\mathbb{1}_Y) = \mu_0(T\mathbb{1}_X) = \lambda\mathbb{1}_X = 1$.
Jetzt kann ein Satz vom Hahn-Banach-Typ angewandt werden (vgl. z.B. [Hirz-Sch]), der die Existenz einer linearen Abbildung
$$\mu : \mathcal{B}(Y) \longrightarrow \mathbb{R}$$
sichert mit $\|\mu\| = \|\mu_0\| = 1$ und $\mu|_V = \mu_0$. Daher ist μ nach den obigen Bemerkungen positiv und auch ein W-Inhalt, da $\mu(\mathbb{1}_Y) = \mu_0(\mathbb{1}_X) = 1$. Wegen
$$\mu{\circ}T(f) = \mu(Tf) = \mu_0(Tf) = \lambda f$$
ist $\mu{\circ}T = \lambda$. $\square$

Wir kommen nun zur Beschreibung der regulären Inhalte.

Satz 5.19. *Sei λ ein W-Inhalt auf $\mathcal{B}(\mathbb{N})$. Äquivalent sind*

(I) *λ ist regulär.*

(II) *Es gibt eine interne Funktion $A : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$, $A \geq 0$, mit *-endlichem Träger in ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ und ${}^*\sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} A(n) = 1$ mit*
$$\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \quad \lambda f = ({}^*\sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} A(n){}^*\lambda_n{}^*f)^\circ.$$

(III) *Es gibt eine interne, *-monoton-fallende Funktion $F : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$, $F \geq 0$, mit *-endlichem Träger, ${}^*\sum_{x\in{}^*\mathbb{N}} F(x) = 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}\ F(n) = F(1)$ mit*
$$\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \quad \lambda f = ({}^*\sum_{x\in{}^*\mathbb{N}} F(x){}^*f(x))^\circ.$$

Beweis.
(I)$\Rightarrow$(II): Wir definieren $T : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{N})$ durch
$$f \mapsto Tf, \quad Tf(n) := \lambda_n f.$$
Wenn λ regulär ist, ist $\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})\ |\lambda f| \leq \|Tf\|$. Daher kann das gerade bewiesene Lemma angewandt werden, und man erhält einen W-Inhalt μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ mit $\lambda = \mu{\circ}T$. Nun gibt es eine interne Darstellung von μ durch eine interne Funktion $A : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit *-endlichem Träger und ${}^*\sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} A(n) = 1$. Für dieses A haben wir dann
$$\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \quad \lambda f = ({}^*\sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} A(n){}^*T{}^*f(n))^\circ = ({}^*\sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} A(n){}^*\lambda_n{}^*f)^\circ.$$
Der Träger von A kann in ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ gewählt werden, da $\lambda \in \mathcal{W}_0(\mathbb{N})$.
(II)$\Rightarrow$(I): Das ist klar nach den anfangs gemachten Bemerkungen und der Tatsche, daß $\mathcal{W}_{\text{reg}}$ konvex ist.
(II)$\Rightarrow$(III): $F(x) := {}^*\sum_{n\geq x} \frac{A(n)}{n}$ erfüllt die Bedingungen von (III).
(III)$\Rightarrow$(II): Es erfüllt $A(n) := n(F(n) - F(n+1))$ die Bedingungen von (II). $\square$

5.5 Invariante Inhalte

Definition: Sei $T : X \longrightarrow X$ eine Abbildung. Ein W-Inhalt μ auf $\mathcal{B}(X)$ heißt *(T-)invariant*, falls

$$\forall f \in \mathcal{B}(X)\ \mu(f \circ T) = \mu f.$$

Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\forall A \subset X\ \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A),$$

was bedeutet, daß der Bildinhalt $\overline{\mu}$ von μ unter T mit μ übereinstimmt. Die Menge der T-invarianten W-Inhalte von X sei mit $\mathcal{W}_T(X)$ bezeichnet.

Gegenstand des vorliegenden Abschnittes ist die Untersuchung invarianter Inhalte. Insbesondere soll bei gegebenen X und T eine in gewissem Sinne konstruierbare Menge invarianter Inhalte angegeben werden, deren konvexe Hülle dicht liegt innerhalb von $\mathcal{W}_T(X)$. Dies wird ein Pendant zur ergodischen Zerlegung invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße auf σ-Algebren ergeben (die Verhältnisse sind im Falle von Inhalten sogar etwas einfacher). Zur Umsetzung dieser Vorstellung benutzen wir bei gegebenem T-invarianten Inhalt μ auf X das induzierte Borelmaß $\overline{\mu}$ auf der Stone-Čech-Kompaktifizierung $\langle X \rangle$. Dieses ist dann automatisch ein $\overline{T}$-invariantes Maß. Auf das Tripel $(\langle X \rangle, \overline{\mu}, \overline{T})$ kann dann die Theorie invarianter Maße angewandt werden, insbesondere werden wir den Birkhoffschen Ergodensatz benutzen.

Eine entscheidende Rolle zur Umsetzung der obigen Überlegungen kommt den regulären Inhalten auf $\mathbb{N}$ zu. Wie unten gezeigt wird, sind dies spezielle $\mathcal{S}$-invariante W-Inhalte auf $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$, wobei der *Shift* $\mathcal{S}$ die Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto \mathcal{S}(n) := n + 1$$

bezeichnet. $\mathcal{S}$-invariante W-Inhalte werden eine wichtige Rolle bei Anwendungen innerhalb der Zahlentheorie übernehmen. Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, werden wir bei W-Inhalten auf $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ auch einfach von invarianten Inhalten sprechen, wenn $\mathcal{S}$-invariante gemeint sind.

Lemma 5.20. *Jeder reguläre Inhalt ist $\mathcal{S}$-invariant.*

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung regulärer Inhalte aus Satz 5.19 (III). Sei also λ regulär und F eine interne, *-monoton-fallende Funktion $F : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ mit *-endlichem Träger, ${}^*\sum_{\omega \in {}^*\mathbb{N}} F(\omega) = 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}\ F(n) = F(1)$, die λ, wie in dem Satz beschrieben, darstellt. Für $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ gilt

$$\begin{aligned} |\lambda(f \circ \mathcal{S}) - \lambda f| &= |{}^*\sum_{\omega \in {}^*\mathbb{N}} F(\omega)({}^*f(\omega+1) - {}^*f(\omega))|^\circ \\ &= |-F(1){}^*f(1) + {}^*\sum_{\omega \in {}^*\mathbb{N}} (F(\omega) - F(\omega+1)){}^*f(\omega+1)|^\circ \\ &\leq 2\|f\| F(1)^\circ = 0, \end{aligned}$$

da F monoton fallend ist und $F(1)$ notwendigerweise infinitesimal ist. $\square$

Wir beweisen nun zunächst eine allgemeine Aussage über Meßräume. Dazu sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf der Menge Ω und $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ eine meßbare Abbildung.

Bezeichnung: Es bezeichne $\text{Meß}_b(\Omega, \mathcal{A})$ den Vektorraum der beschränkten, meßbaren Funktionen auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{A}$ die σ-Algebra der T-invarianten Mengen, d.h.

$$\mathcal{A}_T := \{A \in \mathcal{A},\ T^{-1}(A) = A\}.$$

Für $f \in \text{Meß}_b(\Omega, \mathcal{A})$ sei

$$f_{(\omega)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_{(\omega)}(n) := f \circ T^n(\omega).$$

Satz 5.21. *Für jeden regulären Inhalt $\lambda \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ und für jedes T-invariante W-Maß $\mathfrak{m}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gilt*

(1) $\forall f \in \text{Meß}_b(\Omega, \mathcal{A})$ *ist $\lambda f_{(\cdot)}$ eine Version der Bedingten Erwartung von f bzgl. $(\mathcal{A}_T, \mathfrak{m})$.*

(2) *$\lambda f_{(\cdot)}$ ist T-invariant.*

(3) *Die Abbildung*

$$\text{Meß}_b(\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Meß}_b(\Omega, \mathcal{A}), \quad f \mapsto \lambda f_{(\cdot)}$$

ist ein positiver, linearer Operator.

Beweis.
(1) Aufgrund des Birkhoffschen Ergodensatzes (vgl. [Mañ]) gilt für $f \in \text{Meß}_b(\Omega, \mathcal{A})$ und für alle T-invarianten W-Maße $\mathfrak{m}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$: Die Funktion F, definiert durch

$$F(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{N \to \infty} \lambda_N f_{(\omega)}, & \text{falls der Grenzwert existiert} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine meßbare Funktion und eine Version der Bedingten Erwartung von f bzgl. $(\mathcal{A}_T, \mathfrak{m})$. Hierbei existiert der obige Grenzwert $\mathfrak{m}$-fast-sicher. Mithilfe von Satz 5.17 erkennt man also

$$F(\omega) = \lambda f_{(\omega)} \quad \mathfrak{m}\text{-fast-sicher}.$$

(2) Das folgt aus der Shift-Invarianz von λ.
(3) ist klar. $\square$

Der hier interessierende Fall ist der, wenn der Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ gerade von der Form $(\langle X \rangle, \mathfrak{B}(X))$ ist. Um das nächste Ergebnis zu beschreiben, führen wir folgende Notation ein (vgl. den Abschnitt über Stone-Čech-Kompaktifizierungen).

Bezeichnung: Sei $T : X \longrightarrow X$ eine Abbildung. Für $x \in \langle X \rangle$ sei $T_{(x)}$ definiert durch

$$T_{(x)} : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{N}), \quad T_{(x)} f(n) := \overline{f \circ T^n}(x) = \overline{f} \circ \overline{T}^n(x).$$

Mit dieser Notation gilt dann insbesondere

$$T_{(x)}(f \circ T) = (T_{(x)} f) \circ \mathcal{S}.$$

Satz 5.22. *Es sei $T : X \longrightarrow X$ eine Abbildung und λ irgendein regulärer Inhalt.*

(1) $\forall x \in \langle X \rangle$ *ist $\lambda \circ T_{(x)}$ ein T-invarianter W-Inhalt auf $\mathcal{B}(X)$.*

(2) *Die Abbildung* $x \mapsto \lambda T_{(x)} f,\ x \in \langle X \rangle$, *ist eine Version der Bedingten Erwartung von* $\overline{f}$ *bzgl.* $(\mathfrak{B}(X)_{\overline{T}}, \overline{\mu})$.

(3) $co\{\lambda \circ T_{(x)},\ x \in \langle X \rangle\}$ *liegt dicht in* $\mathcal{W}_T(X)$.

(4) $\langle\{\lambda \circ T_{(x)},\ x \in \langle X \rangle\}\rangle_{\mathcal{W}}$ *enthält die Extremalpunkte aus* $\mathcal{W}_T(X)$.

Beweis.
(1) Sei $x \in \langle X \rangle$. In der Notation des voranstehenden Satzes ist $\forall f \in \mathcal{B}(X)\ \lambda \circ T_{(x)} f = \lambda \overline{f}_{(x)}$, da

$$\overline{f}_{(x)}(n) = \overline{f} \circ \overline{T}^n(x) = \overline{f \circ T^n}(x) = T_{(x)} f(n).$$

Nach Punkt (3) dieses Satzes ist

$$f \mapsto \overline{f} \mapsto \lambda \overline{f}_{(x)} = \lambda \circ T_{(x)} f$$

für $x \in \langle X \rangle$ eine positive Linearform, die zudem $\mathbb{1}_X$ auf 1 abbildet, d.h. $\lambda \circ T_{(x)}$ ist ein W-Inhalt.
Wegen Satz 5.21 Punkt (2) ist für $f \in \mathcal{B}(X)$ $\lambda \circ T_{(x)}(f \circ T) = \lambda((T_{(x)} f) \circ \mathcal{S}) = \lambda((T_{(x)} f)$. Also ist $\lambda \circ T_{(x)}$ auch T-invariant.
(2) Es sei $\mu \in \mathcal{W}_T(X)$ und $S \subset \mathcal{B}(X)$ endlich, sowie $\varepsilon > 0$. Wegen $\overline{\mu}_{\overline{T}} = \overline{\mu_T} = \overline{\mu}$ ist $\overline{\mu}$ $\overline{T}$-invariant. Für $f \in S$ ist $\lambda \overline{f}_{(\cdot)} = \lambda \circ T_{(\cdot)} f$ nach obigem Satz eine Version der bedingten Erwartung von $\overline{f}$ bzgl. $(\mathfrak{B}(X)_{\overline{T}}, \overline{\mu})$. Insbesondere folgt (2) und es gilt

$$\forall f \in S\ \overline{\mu}(\lambda \overline{f}_{(\cdot)}) = \overline{\mu}\overline{f} = \mu f.$$

(3) Für das Maß $\overline{\mu}$ gilt, daß es approximierbar ist durch Maße aus der konvexen Hülle der Punktmaße auf $\langle X \rangle$, da diese konvexe Hülle dicht liegt in der Menge aller Maße (bzgl. der schwach-$*$-Topologie auf $(\langle X \rangle, \mathfrak{B}(X))$). Es gibt also eine endliche Menge $E \subset \langle X \rangle$ und für jedes $x \in E$ ein $\alpha_x \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{x \in E} \alpha_x = 1$, so daß

$$\forall f \in S\ |\overline{\mu}(\lambda \overline{f}_{(\cdot)}) - \sum_{x \in E} \alpha_x \lambda \overline{f}_{(x)}| < \varepsilon,$$

und das bedeutet

$$\forall f \in S\ |\mu f - \sum_{x \in E} \alpha_x \lambda \circ T_{(x)} f| < \varepsilon.$$

Da S und ε beliebig gewählt waren, ist die Behauptung gezeigt.
(4) Diese Behauptung ist eine direkte Folge von (3) mittels des Satzes von KREIN-MILMAN. Wir bemerken dazu, daß $\mathcal{W}_T(X)$ konvex und kompakt ist (vgl. Seite 53). □

Ist $X = \mathbb{N}$ und $T = \mathcal{S}$, so gilt mit den Bezeichnungen aus dem Abschnitt über Stone-Čech-Kompaktifizierungen für Halbgruppen folgende Beziehung: Für $x \in \langle \mathbb{N}_0 \rangle$ und $x_0 \in {}^*\mathbb{N}$ mit $\overline{x_0} = x$ ist

$$\mathcal{S}_{(x)} = \phi_{x_0},$$

da $\phi_{x_0} f(n) = \overline{f}(x + n) = \overline{f} \circ \mathcal{S}^n(x) = \mathcal{S}_{(x)} f(n)$. (Hierbei denken wir uns $\mathcal{S}$ kanonisch auf $\mathbb{N}_0$ fortgesetzt durch $\mathcal{S}(0) := 1$). Wir haben also folgendes Korollar.

KOROLLAR 5.23. *Für jedes reguläre* λ *liegt* $co\{\lambda \circ \phi,\ \phi \in \Phi_{\mathbb{N}_0}\}$ *dicht in* $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}(\mathbb{N})$.

Bemerkung: Streng genommen müssen wir natürlich zwischen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ unterscheiden. Da $\mathbb{N}_0 \backslash \mathbb{N}$ aber endlich ist, sind die konvexen, Uniformen Räume $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}(\mathbb{N}_0)$ und $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}(\mathbb{N})$ kanonisch isomorph. Dies rechtfertigt das obige Resultat.

5.6 Ergodizität

Die bisherigen Untersuchungen der von W-Inhalten induzierten Borelmaße beschränkten sich im Wesentlichen darauf, Eigenschaften der entsprechende Loebmaße als übertragbar nachzuweisen. Das Verhalten von Loebmaßen und induzierten Borelmaßen ist aber durchaus nicht überall gleich. Ist $T : X \longrightarrow X$ eine Abbildung, so ist $^*T$ zunächst lediglich bzgl. $\sigma({}^*\mathfrak{P}(X))$ meßbar. Betrachtet man die jeweiligen Maße unter dem Gesichtspunkt der Ergodizität, so werden Unterschiede deutlich. Die extremalen Punkte der auf den Stone-Čech-Kompaktifizierungen induzierten Borelmaße sind nämlich schon ergodisch (Korollar 5.29). Der Nachweis derselben Aussage für die induzierten Loebmaße konnte nicht erbracht werden (wir vermuten, daß sie nicht richtig ist). Der Grund ist darin zu suchen, daß selbst die σ-Algebren $\sigma({}^*\mathfrak{P}(X))$ zu groß sind.

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ meßbar. Ein T-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathfrak{m}$ heiße T-*ergodisch*, falls

$$\forall A \in \mathcal{A}_T \ \mathfrak{m}(A) \in \{0, 1\}.$$

Bemerkung: In der Literatur wird häufig bei gegebenem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathfrak{m})$ T als ergodisch bezeichnet, oder auch von dem ergodischen System $(\Omega, \mathcal{A}, \mathfrak{m}, T)$ gesprochen. Wir bevorzugen obige Schreibweise, da in den Anwendungen, die wir im Auge haben, die Transformation T vorgegeben ist (z.B. $T = \overline{\mathcal{S}}$).

Sei $T : X \longrightarrow X$ eine Abbildung. Unser erstes Ergebnis wird sein, diejenigen W-Inhalte $\mu \in \mathcal{W}_T(X)$ zu charakterisieren, für die $\overline{\mu}$ $\overline{T}$-ergodisch ist, bzw. für die $\mu_{\mathcal{L}}$ $^*T$-ergodisch ist in $({}^*X, \sigma({}^*\mathfrak{P}(X)))$. Um dieses formulieren zu können, führen wir folgende Notation ein:
Für $A \subset X$ und $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\Gamma_{T,N}(A) := \bigcup_{0 \le n,m \le N} T^{-n}(T^m(A)) \quad \text{und} \quad \Gamma_T(A) := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \Gamma_{T,N}(A) = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}_0} T^{-n}(T^m(A)).$$

Der Sinn dieser Definition liegt darin, daß $\Gamma_T(A)$ die kleinste T-invariante Menge in X ist, die A enthält. Wir benutzen diese einfache Tatsache ohne Beweis.
Bemerkung: Man beachte, daß z.B. für den Shift $\mathcal{S} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gilt: $A \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_{\mathcal{S}}(A) = \mathbb{N}$.

Wir halten zunächst folgende Hilfsaussage fest.

Lemma 5.24. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein hausdorffscher, topologischer Raum, $T : X \longrightarrow X$ stetig, und $\mathfrak{m}$ sei ein reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß auf der zugehörigen Borel-σ-Algebra.*

(1) *Ist $K \subset X$ kompakt, so ist $\Gamma_T(K)$ borelmeßbar.*

(2) *$\mathfrak{m}$ ist T-ergodisch genau dann, wenn für alle kompakten $K \subset X$ gilt*

$$\mathfrak{m}(K) > 0 \ \Rightarrow \ \mathfrak{m}(\Gamma_T(K)) = 1.$$

Beweis.
(1) Da K kompakt ist und T stetig, ist $\forall m \in \mathbb{N}_0$ $T^m(K)$ kompakt und somit abgeschlossen. Dann ist auch $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$ $T^{-n}(T^m(K))$ abgeschlossen, und da σ-Algebren abgeschlossen sind

unter abzählbaren Vereinigungen, folgt, daß $\Gamma_T(K)$ borelmeßbar ist.
(2) Sei zunächst $\mathfrak{m}$ T-ergodisch. Ist K kompakt und $\mathfrak{m}(K) > 0$, so ist $\mathfrak{m}(\Gamma_T(K)) > 0$, da $K \subset \Gamma_T(K)$. Also ist $\mathfrak{m}(\Gamma_T(K)) = 1$, da $\Gamma_T(K)$ T-invariant ist.
Nun gelte für alle kompakten $K \subset X$: $\mathfrak{m}(K) > 0 \Rightarrow \mathfrak{m}(\Gamma_T(K)) = 1$. Sei M borelmeßbar und T-invariant mit $\mathfrak{m}(M) > 0$. Zu zeigen ist $\mathfrak{m}(M) = 1$.
Da $\mathfrak{m}$ regulär ist, gibt es ein kompaktes $K \subset M$ mit $\mathfrak{m}(K) > 0$. Nach Voraussetzung ist dann $\mathfrak{m}(\Gamma_T(K)) = 1$. Wegen $M = \Gamma_T(M) \supset \Gamma_T(K)$, ist also $\mathfrak{m}(M) = 1$. $\square$

Satz 5.25. *Sei $T : X \longrightarrow X$ und $\mu \in \mathcal{W}_T(X)$.*

(1) *$\overline{\mu}$ ist $\overline{T}$-ergodisch $\Leftrightarrow$ Für alle Filter $\mathcal{F}$ in X gilt*

$$\inf_{A\in\mathcal{F}} \mu(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall A \in \mathcal{F}\ [\mu(\Gamma_{T,N}(A)) > 1 - \varepsilon].$$

(2) *$\mu_{\mathcal{L}}$ ist $^*T$-ergodisch $\Leftrightarrow$*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall A \subset X\ [\mu(A) > \varepsilon \Rightarrow \mu(\Gamma_{T,N}(A)) > 1 - \varepsilon].$$

Beweis.
(1)"$\Rightarrow$": Sei $\overline{\mu}$ $\overline{T}$-ergodisch. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter in X und $\inf_{A\in\mathcal{F}} \mu(A) > 0$. Es ist $K := \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \langle A\rangle$ kompakt und $\overline{\mu}(K) = \inf_{A\in\mathcal{F}} \mu(A) > 0$. Wir können nun Lemma 5.24 anwenden. Hiernach gilt

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\mu}(\Gamma_{\overline{T},N}(K)) = \overline{\mu}(\Gamma_{\overline{T}}(K)) = 1.$$

Das bedeutet

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \overline{\mu}(\Gamma_{\overline{T},N}(K)) > 1 - \varepsilon,$$

und daraus folgt

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall A \in \mathcal{F}\ [\mu(\Gamma_{\overline{T},N}(\langle A\rangle)) > 1 - \varepsilon].$$

Nun gilt aber $\Gamma_{\overline{T},N}(\langle A\rangle) = \bigcup_{0\le n,m\le N} \overline{T}^{-n}(\overline{T}^{m}(\langle A\rangle)) = \bigcup_{0\le n,m\le N} \langle T^{-n}(T^m(A))\rangle = \langle\Gamma_{T,N}(A)\rangle$.
Es folgt daher

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall A \in \mathcal{F}\ [\mu(\Gamma_{T,N}(A)) > 1 - \varepsilon].$$

(1)"$\Leftarrow$": Wir benutzen wieder Lemma 5.24. Sei $K \subset \langle X\rangle$ kompakt mit $\overline{\mu}(K) > 0$. Zu zeigen ist $\overline{\mu}(\Gamma_{\overline{T}}(K)) = 1$.
Sei $\mathcal{F} := \{A \subset X, \langle A\rangle \supset K\}$. $\mathcal{F}$ ist ein Filter und $\inf_{A\in\mathcal{F}} \mu(A) = \overline{\mu}(K) > 0$. Nach Voraussetzung gilt daher

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall A \in \mathcal{F}\ [\mu(\Gamma_{T,N}(A)) > 1 - \varepsilon].$$

Wir drücken jetzt $\Gamma_{\overline{T},N}(K)$ aus durch

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\overline{T},N}(K) &= \bigcup_{0\le n,m\le N} \overline{T}^{-n}(\overline{T}^{m}(K)) = \bigcup_{0\le n,m\le N} \overline{T}^{-n}(\overline{T}^{m}(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \langle A\rangle)) \\
&= \bigcup_{0\le n,m\le N} \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{T}^{-n}(\overline{T}^{m}(\langle A\rangle)) = \bigcup_{0\le n,m\le N} \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \langle T^{-n}(T^m(A))\rangle \\
&= \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \langle \bigcup_{0\le n,m\le N} T^{-n}(T^m(A))\rangle.
\end{aligned}$$

Das dritte Gleichheitszeichen wird dabei dadurch gerechtfertigt, daß $\overline{T}$ stetig ist und alle $\langle A\rangle$ kompakt sind. Um das letzte Gleichheitszeichen zu begründen, ziehe man Lemma 4.7 heran. Wir schließen jetzt weiter

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(\Gamma_{\overline{T}}(K)) &= \lim_{N\to\infty}\overline{\mu}(\Gamma_{\overline{T},N}(K)) = \lim_{N\to\infty}\overline{\mu}(\bigcap_{A\in\mathcal{F}}\langle\bigcup_{0\le n,m\le N}T^{-n}(T^m(A))\rangle)\\ &= \lim_{N\to\infty}\inf_{A\in\mathcal{F}}\mu(\Gamma_{T,N}(A)) = 1.\end{aligned}$$

(2)“$\Rightarrow$”: Angenommen

$$\neg[\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall A\subset X\ [\mu(A)>\varepsilon\Rightarrow\mu(\Gamma_{T,N}(A))>1-\varepsilon]].$$

Das bedeutet

$$\exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists A\subset X\ [\mu(A)>\varepsilon\wedge\mu(\Gamma_{T,N}(A))\le 1-\varepsilon].$$

Wir halten ein solches ε fest und wählen ein $N\in{}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Mit *Transfer* gibt es ein internes $A\subset{}^*X$ mit

$${}^*\mu(A)>{}^*\varepsilon\quad\text{und}\quad{}^*\mu({}^*\Gamma_{{}^*T,N}(A))\le 1-{}^*\varepsilon.$$

Für die externe Menge $M:=\Gamma_{{}^*T}(A)=\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}_0}{}^*T^{-n}({}^*T^m(A))$ gilt nun: M ist ${}^*T$-invariant und $M\in\sigma({}^*\mathfrak{P}(X))$. Außerdem ist $A\subset M\subset{}^*\Gamma_{{}^*T,N}(A)$, und das bedeutet

$$\varepsilon\le\mu_{\mathcal{L}}(M)\le 1-\varepsilon.$$

$\mu_{\mathcal{L}}$ ist daher nicht ${}^*T$-ergodisch.
(2)“$\Leftarrow$”: Angenommen $\mu_{\mathcal{L}}$ ist nicht ${}^*T$-ergodisch.
Dann gibt es ein loebmeßbares, ${}^*T$-invariantes $M\subset{}^*X$ (eventuell extern) mit $\mu_{\mathcal{L}}(M)\notin\{0,1\}$. Aufgrund der Eigenschaften der Loeb-σ-Algebra gibt es ein internes $A\subset M$ mit $\mu_{\mathcal{L}}(A)>0$, d.h. es gibt ein $\varepsilon>0$ mit ${}^*\mu(A)>{}^*\varepsilon$.
Angenommen, die andere Bedingung wäre doch erfüllt. Sei $\mu_{\mathcal{L}}(M)<c<1$. Dann gibt es mit Hilfe von *Transfer* ein (standard) $N\in\mathbb{N}$ mit

$${}^*\mu({}^*\Gamma_{{}^*T,N}(A))>{}^*c.$$

Wegen $M=\bigcup_{0\le n,m\le N}{}^*T^{-n}({}^*T^m(M))\supset{}^*\Gamma_{{}^*T,N}(A)$, haben wir also

$$\mu_{\mathcal{L}}(M)\ge\mu_{\mathcal{L}}({}^*\Gamma_{{}^*T,N}(A))=({}^*\mu({}^*\Gamma_{{}^*T,N}(A))^\circ\ge c.$$

Das ist ein Widerspruch zu $\mu_{\mathcal{L}}(M)<c$. □

Korollar 5.26. *Sei $T:X\longrightarrow X$ und $\mu\in\mathcal{W}_T(X)$. Ist $\overline{\mu}$ $\overline{T}$-ergodisch, so gilt*

$$\forall A\subset X\ [\mu(A)>0\ \Rightarrow\ \lim_{N\to\infty}\mu(\Gamma_{T,N}(A))=1].$$

Es ist bekannt, daß die ergodischen Maße mit den Extremalpunkten innerhalb aller invarianten Maße übereinstimmen (Satz 5.28, vgl. Furstenberg [Fur]). Dieses kann durch die folgenden Überlegungen ausgenutzt werden.
Sei $T:X\longrightarrow X$ eine Abbildung. $\mathcal{W}_T(X)$ trägt als Uniforme Struktur die Relativ-Struktur von $\mathcal{W}(X)$ (die schwach-$*$-Topologie, vgl. Seite 37). $\mathcal{W}_T(X)\subset\mathcal{W}(X)$ ist abgeschlossen und

konvex. Deshalb wird $\mathcal{W}_T(X)$ nach dem Satz von KREIN-MILMAN von seinen Extremalpunkten aufgespannt.

Man betrachte jetzt $\mathcal{M}(\langle X\rangle) := \{\mathfrak{m},\ \mathfrak{m}$ ist Borelmaß auf $\langle X\rangle\}$. Wir denken uns $\mathcal{M}(\langle X\rangle)$ ausgestattet mit der Uniformen Struktur, die durch die Abbildungen $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}\overline{f}$, $f \in \mathcal{B}(X)$ erzeugt wird. Diese Topologie ist also etwas schwächer als die schwach-$*$-Topologie auf $\mathcal{M}(\langle X\rangle)$. Sei weiterhin $\mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle) := \{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}(\langle X\rangle),\ \mathfrak{m}$ ist $\overline{T}$-invariant$\}$. $\mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$ ist konvex und kompakt und wird deshalb ebenfalls von seinen Extremalpunkten aufgespannt.
Mit diesen Bezeichnungen ist nach Konstruktion die Abbildung

$$\mathcal{W}_T(X) \longrightarrow \mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle), \quad \mu \mapsto \overline{\mu}$$

eine Einbettung konvexer, kompakter Räume. Mit $\overline{\mathcal{W}_T(X)}$ wollen wir das Bild dieser Abbildung in $\mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$ bezeichnen. $\overline{\mathcal{W}_T(X)} \subset \mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$ ist also konvex und kompakt. Außerdem sind die Extremalpunkte von $\overline{\mathcal{W}_T(X)}$ gerade die Bilder der Extremalpunkte von $\mathcal{W}_T(X)$. Es ist nun nicht von vornherein klar, daß diese Extremalpunkte auch Extremalpunkte in $\mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$ sind. Die Approximationseigenschaften der induzierten Maße aus $\overline{\mathcal{W}_T(X)}$ erzwingen aber diesen Umstand.

SATZ 5.27. *Ist μ extremal in $\mathcal{W}_T(X)$, so ist $\overline{\mu}$ extremal in $\mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$.*

Beweis. Sei $\mu \in \mathcal{W}_T(X)$. Angenommen $\overline{\mu}$ ist nicht extremal in $\mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$.
Dann gibt es $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$, $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$, sowie $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ mit

$$\overline{\mu} = \alpha_1\mathfrak{m}_1 + \alpha_2\mathfrak{m}_2.$$

Wir zeigen jetzt, daß $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ jeweils durch einen W-Inhalt auf X induziert werden. Dann ist $\overline{\mu}$ nicht extremal in $\overline{\mathcal{W}_T(X)}$ und somit μ nicht extremal in $\mathcal{W}_T(X)$.
Wir benutzen den Approximationssatz 5.13. Sei $M \subset \mathfrak{B}(X)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 5.13 können wir ein $A \subset X$ finden, so daß

$$\overline{\mu}(M \bigtriangleup \langle A\rangle) < \min(\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2).$$

Für solch ein A ist

$$\mathfrak{m}_1(M \bigtriangleup \langle A\rangle) < \varepsilon \quad \text{und} \quad \mathfrak{m}_2(M \bigtriangleup \langle A\rangle) < \varepsilon.$$

Da $M \subset \mathfrak{B}(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt waren, folgt wiederum mit Satz 5.13, daß $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ durch W-Inhalte induziert werden. □

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den oben angesprochenen Satz zitieren, daß die ergodischen Maße mit den Extremalpunkten übereinstimmen. Wir formulieren ihn in der Form, wie er hier benötigt wird.

SATZ 5.28. *$\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$ ist extremal in $\mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$ genau dann, wenn $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{\overline{T}}(\langle X\rangle)$ $\overline{T}$-ergodisch ist.*

Beweis. (siehe z.B. [Fur].) □

KOROLLAR 5.29. *Ist $\mu \in \mathcal{W}_T(X)$ extremal, so ist $\overline{\mu}$ $\overline{T}$-ergodisch.*

Mit den Ergebnissen des Abschnittes über Invariante Inhalte (Satz 5.22) und dem Satz von Krein-Milman erhalten wir das abschließende Resultat.

Satz 5.30. *Sei $T : X \longrightarrow X$, λ ein regulärer Inhalt auf $\mathbb{N}$. Der Abschluß der Menge $\{\overline{\lambda}\circ\overline{T}_x,\ x \in \langle X\rangle\}$ in $\overline{\mathcal{W}_T(X)}$ enthält die $\overline{T}$-ergodischen Borelmaße aus $\overline{\mathcal{W}_T(X)}$.*

Bemerkung: Es konnte nicht gezeigt werden, ob in der Menge $\{\overline{\lambda}\circ\overline{T}_x,\ x \in \langle X\rangle\}$ selbst schon $\overline{T}$-ergodische Borelmaße zu finden sind, d.h. ob es in $\{\lambda\circ T_x,\ x \in \langle X\rangle\}$ Extremalpunkte aus $\mathcal{W}_T(X)$ gibt. Wie eingangs erwähnt, konnte auch nicht entschieden werden, ob es W-Inhalte $\mu \in \mathcal{W}_T(X)$ gibt, für die $\mu_{\mathcal{L}}$ *T-ergodisch ist.

6 Zahlentheorie

6.1 Asymptotische Relationen für Verteilungsfunktionen

In diesem Abschnitt soll anhand zweier Beispiele verdeutlicht werden, wie Asymptotische Relationen aus der Betrachtung "hinreichend großer" Mengen von W-Inhalten gewonnen werden können. Wir beschränken uns dabei auf Beispiele aus den Natürlichen Zahlen. Dieser Schritt stellt das Bindeglied dar, um aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen auf asymptotische Relationen innerhalb der Zahlentheorie zu schließen. Wie schon erwähnt, ist Satz 5.17 ein Prototyp einer solchen Aussage. Die betrachtete Menge von W-Inhalten ist dabei die der regulären Inhalte.
Wir sind hier vor allem am Verhalten von Verteilungsfunktionen interessiert.

Satz 6.1. *Sei $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ und $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = 1$ und $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} F(\alpha) = 0$. Sei weiterhin $c > 0$. Äquivalent sind:*

(I) *Für alle regulären Inhalte λ gilt*
$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\lambda(\{x \in \mathbb{N},\ f(x) \le \alpha\}) - F(\alpha)| \le c.$$

(II) *Es gilt*
$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\lambda_N(\{x \in \mathbb{N},\ f(x) \le \alpha\}) - F(\alpha)| \le c.$$

Beweis.
(I)$\Rightarrow$(II): Aufgrund der Voraussetzungen können wir ein $R > 0$ finden mit $R > \|f\|$ und $\forall\alpha > R\ \ |F(\alpha) - 1| < c$, sowie $\forall\alpha < -R\ \ |F(\alpha)| < c$.
Für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $|\alpha| > R$ gilt dann automatisch
$$|\lambda_N(\{x \in \mathbb{N},\ f(x) \le \alpha\}) - F(\alpha)| \le c.$$

Sei $c_2 > c_1 > c$. Wir setzen abkürzend $A_\alpha := \{x \in \mathbb{N},\ f(x) \le \alpha\}$. Sei $N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Wir betrachten die Voraussetzung für den regulären Inhalt ${}^*\lambda_N^\circ$, definiert durch ${}^*\lambda_N^\circ f := ({}^*\lambda_N {}^*f)^\circ$ (vgl. Seite 44). Es folgt damit für ein solches $N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$
$$\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \ |{}^*\lambda_N({}^*A_\alpha) - {}^*F({}^*\alpha)| \le {}^*c_1.$$

Wir zeigen nun, daß diese Relation für $c_2 > c_1$ statt c_1 nicht nur für die $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ gilt, die standard sind. Der Grund liegt darin, daß die Mengen A_α aufsteigend in α sind. Für $\alpha \in {}^*[-R, R]$ und für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & ({}^*\lambda_N({}^*A_{(\alpha^\circ-\varepsilon)}) - {}^*F(\alpha^\circ - \varepsilon)) + ({}^*F(\alpha^\circ - \varepsilon) - {}^*F(\alpha)) \\ \le\ & {}^*\lambda_N({}^*A_\alpha) - {}^*F(\alpha) \\ \le\ & ({}^*\lambda_N({}^*A_{(\alpha^\circ+\varepsilon)}) - {}^*F(\alpha^\circ + \varepsilon)) + ({}^*F(\alpha^\circ + \varepsilon) - {}^*F(\alpha)). \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von F ergibt sich daher

$$|^*\lambda_N(^*A_\alpha) - {}^*F(\alpha)| \leq {}^*c_2.$$

Wir haben also

$$\forall N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \ \ [\sup_{\alpha \in {}^*[-R,R]} |^*\lambda_N(^*A_\alpha) - {}^*F(\alpha)| \leq {}^*c_2].$$

Zusammen mit der obigen Bemerkung über den Fall $|\alpha| > R$ folgt mit *Transfer*:

$$\forall N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \ \ [\sup_{\alpha \in {}^*\mathbb{R}} |^*\lambda_N(^*A_\alpha) - {}^*F(\alpha)| \leq {}^*c_2].$$

Mit *Overflow* und *Transfer* ergibt sich hieraus

$$\exists M \in \mathbb{N} \ \ \forall N \geq M \ \ [\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} |\lambda_N(A_\alpha) - F(\alpha)| \leq c_2].$$

Da $c_2 > c$ beliebig gewählt werden kann, erhalten wir die Behauptung.

(II)$\Rightarrow$(I): Diese Richtung ergibt sich aufgrund von Satz 5.17. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\lambda(A_\alpha) - F(\alpha)| \leq \limsup_{N\to\infty} |\lambda_N(A_\alpha) - F(\alpha)| \leq \limsup_{N\to\infty} \ \sup_{\beta \in \mathbb{R}} |\lambda_N(A_\beta) - F(\beta)| \leq c.$$

$\square$

Das zweite Beispiel stellt denselben Fall dar, wenn statt der Menge der regulären Inhalte die Menge aller Shift-invarianten W-Inhalte betrachtet wird.

Satz 6.2. *Sei* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ *und* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit* $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = 1$ *und* $\lim_{\alpha\to-\infty} F(\alpha) = 0$. *Sei weiterhin* $c > 0$. *Äquivalent sind:*

(I) *Für alle invarianten W-Inhalte* μ *gilt*

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} |\mu(\{x \in \mathbb{N}, \ f(x) \leq \alpha\}) - F(\alpha)| \leq c.$$

(II) *Es gilt*

$$\limsup_{N\to\infty} \ \sup_{y \in \mathbb{N}} \ \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} |\lambda_N \circ \phi_y(\{x \in \mathbb{N}, \ f(x) \leq \alpha\}) - F(\alpha)| \leq c.$$

Hierbei bezeichnet ϕ_y die Abbildung $\phi_y : \mathcal{B}(\mathbb{N}_0) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{N}_0)$, definiert durch $\phi_y f := f \circ \mathcal{S}_y$, wobei hier $\mathcal{S}_y$ die Translation mit y in der Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ bedeutet. Man vgl. dazu das Kapitel über Stone-Čech-Kompaktifizierungen, insbesondere Seite 28. In diesem Fall ist also $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}^y$ oder mit anderen Worten $\forall x \in \mathbb{N} \ \phi_y f(x) = f(y + x)$.
Wir betonen, daß die Abbildungen ϕ_x, $x \in {}^*\mathbb{N}$, die auf Seite 28 eingeführt werden, wohl zu unterscheiden sind von ${}^*\phi_x$, $x \in {}^*\mathbb{N}$. Letztere sind Nonstandard-Objekte, wohingegen die ϕ_x, $x \in {}^*\mathbb{N}$ gewöhnliche Mengenabbildungen sind bzw. Homomorphismen auf $\mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Beweis. Wir führen den Beweis des Satzes im Wesentlichen auf Satz 6.1 zurück. Wir verwenden zusätzlich Korollar 5.23, welches besagt, daß $co\{\lambda \circ \phi, \ \phi \in \Phi_{\mathbb{N}_0}\}$ dicht liegt in $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}(\mathbb{N})$, und zwar für alle regulären λ.
Es sei dieselbe Notation wie oben benutzt.

(I)$\Rightarrow$(II): Sei $y \in {}^*\mathbb{N}$ und $N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Dann ist $({}^*\lambda_N \circ {}^*\phi_y)^\circ$ ein invarianter Inhalt, der naheliegenderweise definiert wird durch $({}^*\lambda_N \circ {}^*\phi_y)^\circ(f) := ({}^*\lambda_N \circ {}^*\phi_y({}^*f))^\circ$. Wir schließen wie im Beweis von Satz 6.1 auf

$$\sup_{\alpha \in {}^*\mathbb{R}} \sup_{y \in {}^*\mathbb{N}} |{}^*\lambda_N \circ {}^*\phi_y({}^*A_\alpha) - {}^*F(\alpha)| \leq {}^*c_2.$$

Da diese Relation richtig ist für alle $N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, folgt zusammen mit *Overflow* und *Transfer* genau wie im obigen Beweis die Behauptung.

(II)$\Rightarrow$(I): Aufgrund von Korollar 5.23 genügt es, die Aussage für Inhalte der Form $\lambda\circ\phi$ mit $\phi \in \Phi_{\mathbb{N}_0}$ und beliebiges, reguläres λ zu beweisen.
Sei λ ein regulärer Inhalt, der im Abschluß der Menge $\{\lambda_N,\ N \in \mathbb{N}\}$ liegt (die Inhalte ${}^*\lambda_N^\circ$, $N \in {}^*\mathbb{N}$ sind solche). Ist weiterhin $\phi = \phi_y$ mit einem $y \in {}^*\mathbb{N}$, so ist für $n \in \mathbb{N}$

$$({}^*\lambda_n \circ {}^*\phi_y)^\circ = \lambda_n \circ \phi.$$

Wir können also $\lambda\circ\phi$ durch Inhalte der Form $({}^*\lambda_n \circ {}^*\phi_y)^\circ$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig gut in der schwach-$*$-Topologie approximieren. Hieraus läßt sich die Behauptung ableiten. $\square$

6.2 Bewertungsabbildungen als unabhängige Zufallsvariable

Es seien p, q zwei verschiedene Primzahlen. Dann ist $p{\cdot}\mathbb{N} \cap q{\cdot}\mathbb{N} = pq{\cdot}\mathbb{N}$. In der intuitiven Vorstellung ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zahl von sagen wir n geteilt wird, gerade $\frac{1}{n}$. Das bedeutet in diesem Fall, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zahl von p und von q geteilt wird, dieselbe ist wie das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten, nämlich $\frac{1}{pq}$. In der Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung heißt dies, daß die Mengen $p{\cdot}\mathbb{N}$ und $q{\cdot}\mathbb{N}$ unabhängig sind.
Betrachtet man invariante W-Inhalte, so ist diese Vorstellung tatsächlich richtig. Das ist eine Folgerung aus nachstehendem Lemma, dessen einfachen Beweis wir auslassen.

Lemma 6.3. *Sei μ ein invarianter W-Inhalt auf $\mathbb{N}$. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A \subset \{0, ..., m-1\}$. Dann gilt*

$$\mu(A + m\mathbb{N}) = \frac{1}{m}\sharp A.$$

(Wir bezeichnen hier mit $\sharp A$ abkürzend die Kardinalität $\mathrm{card}(A)$.) Unabhängigkeitsaussagen der obigen Art können verallgemeinert werden. In Satz 6.6 werden wir eine solche Verallgemeinerung beweisen. Zunächst benötigen wir einige Hilfsmittel.

Definition: Ist p eine Primzahl, so sei die *Bewertungsabbildung* $v_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$v_p(n) := \max\{k \in \mathbb{N}_0,\ p^k \text{ teilt } n\}.$$

Sind μ, μ' invariante W-Inhalte, so hat eine Bewertungsabbildung v_p die Eigenschaft, daß ihre Verteilung bzgl. μ mit der bzgl. μ' übereinstimmt. Die Verteilung ist also unabhängig vom betrachteten invarianten W-Inhalt. Wir beweisen dazu folgenden Satz.

Satz 6.4. *Sei p eine Primzahl, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ und $A \subset \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle invarianten W-Inhalte μ:*

$$\text{(1)} \qquad \mu(v_p^{-1}(A)) = (1-\frac{1}{p})\sum_{a\in A} p^{-a}.$$

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{E}(f\circ v_p) = (1-\frac{1}{p})\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{f(n)}{p^n}.$$

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{Var}(f\circ v_p) = (1-\frac{1}{p})\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{f(n)^2}{p^n} - (1-\frac{1}{p})^2(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{f(n)}{p^n})^2.$$

Beweis.
(1) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $v_p^{-1}(\{x \in A, x \geq N\}) \subset p^N\mathbb{N}$. Daher ist

$$|\mu(v_p^{-1}(A)) - \mu(v_p^{-1}(\{x \in A, x \leq N\}))| \leq p^{-N}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mu(v_p^{-1}(A)) &= \sum_{a\in A} \mu(v_p^{-1}(\{a\}) = \sum_{a\in A} \mu(p^a\mathbb{N}\backslash p^{a+1}\mathbb{N}) = \sum_{a\in A}(p^{-a} - p^{-(a+1)}) \\ &= (1-\frac{1}{p})\sum_{a\in A} p^{-a}. \end{aligned}$$

(2) Genau wie in (1) zeigt man, daß

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(f\circ v_p) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\mu(\{x \in \mathbb{N},\ v_p(x) = n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(p^{-n} - p^{-(n+1)}) = (1-\frac{1}{p})\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{f(n)}{p^n}. \end{aligned}$$

Die Aussage (3) beweist man mit (2). □

Bezeichnung: Sei Q ein Polynom, p eine Primzahl und $a \in \mathbb{N}_0$. Mit $Q[p^a] \subset \mathbb{N}_0$ sei die folgende Menge bezeichnet:

$$\begin{aligned} Q[p^a] &:= \{x \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq x < p^{(a+1)},\ Q(x) \equiv 0(p^a),\ Q(x) \not\equiv 0(p^{(a+1)})\} \\ &= \{x \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq x < p^{(a+1)},\ v_p\circ Q(x) = a\}. \end{aligned}$$

Lemma 6.5. *Sei μ ein invarianter W-Inhalt und $Q \neq 0$ ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}_0$. Für jede Primzahl p gilt:*

$$\text{(1)} \qquad \lim_{N\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{N},\ Q(x) \equiv 0(p^N)\}) = 0.$$

$$\text{(2)} \qquad \forall A \subset \mathbb{N}_0 \quad \mu((v_p\circ Q)^{-1}(A)) = \sum_{a\in A} \frac{\sharp Q[p^a]}{p^{(a+1)}}.$$

Beweis.
(1) Sei n der Grad von Q. Es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $x, a \geq 0$ gilt

$$0 \leq Q(x+a) - Q(x) < cax^n.$$

Sei $N > n$. Wir nehmen jetzt an, daß x die Bedingung $Q(x) \equiv 0(p^N)$ erfüllt und $0 \leq x < p^N$ ist. Für $1 \leq a \leq \frac{1}{c} \cdot p^{(N-n)}$ folgt dann, daß $Q(x+a) \not\equiv 0(p^N)$ ist. Definieren wir

$$A_N := \{x \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq x < p^N,\ Q(x) \equiv 0(p^N)\},$$

so ergibt sich also $\sharp A_N \leq cp^n$. Da Q über den Modul (p^N) faktorisiert, können wir daher schließen auf

$$\mu(\{x \in \mathbb{N},\ Q(x) \equiv 0(p^N)\}) = \mu(A_N + p^N\mathbb{N}) \leq cp^{(n-N)}.$$

(2) Es ist

$$(v_p \circ Q)^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} (v_p \circ Q)^{-1}(\{a\}) = \bigcup_{a \in A} (Q[p^a] + p^{(a+1)}\mathbb{N}).$$

Für $N \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\bigcup_{\substack{a \in A \\ a \geq N}} (Q[p^a] + p^{(a+1)}\mathbb{N}) \subset \{x \in \mathbb{N},\ Q(x) \equiv 0(p^N)\}.$$

Daher ist

$$\lim_{N \to \infty} \mu(\bigcup_{\substack{a \in A \\ a \geq N}} (Q[p^a] + p^{(a+1)}\mathbb{N})) = 0,$$

und es folgt weiterhin

$$\mu((v_p \circ Q)^{-1}(A)) = \sum_{a \in A} \mu(Q[p^a] + p^{(a+1)}\mathbb{N}) = \sum_{a \in A} \frac{\sharp Q[p^a]}{p^{(a+1)}}.$$

□

Wir haben nun die Vorbereitungen abgeschlossen und können den Satz über die Unabhängigkeit der Bewertungsabbildungen beweisen. Dazu benutzen wir im Wesentlichen den Chinesischen Restesatz.

Satz 6.6. *Für jede Primzahl p sei $Q_p \neq 0$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$. Sei μ ein invarianter W-Inhalt. Dann ist die Familie $(v_p \circ Q_p)_p$ der Zufallsvariablen $v_p \circ Q_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ μ-unabhängig.*

Beweis. Sei S eine endliche Menge von Primzahlen und für alle $p \in S$ sei $A_p \subset \mathbb{N}_0$. Zu zeigen ist nach Satz 5.2 (3):

$$\mu(\bigcap_{p \in S} (v_p \circ Q_p)^{-1}(A_p)) = \prod_{p \in S} \mu((v_p \circ Q_p)^{-1}(A_p)).$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\bigcap_{p\in S}(v_p\circ Q_p)^{-1}(A_p) &= \bigcap_{p\in S}\bigcup_{a\in A_p}(Q_p[p^a]+p^{(a+1)}\mathbb{N}) \\
&= \bigcup_{\substack{(a_p)_{p\in S}\\ \in\prod_{p\in S}A_p}}\bigcap_{p\in S}(Q_p[p^{a_p}]+p^{(a_p+1)}\mathbb{N}) \\
&= \bigcup_{\substack{(a_p)_{p\in S}\\ \in\prod_{p\in S}A_p}}(Q[(p^{a_p})_{p\in S}]+(\prod_{p\in S}p^{(a_p+1)})\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Menge $Q[(p^{a_p})_{p\in S}]\subset\{x\in\mathbb{N}_0,\ 0\le x<\prod_{p\in S}p^{(a_p+1)}\}$; dieses folgt aus dem Chinesischen Restesatz. Derselbe besagt weiterhin, daß gilt

$$\sharp Q[(p^{a_p})_{p\in S}]=\prod_{p\in S}\sharp Q_p[p^{a_p}].$$

Aufgrund von Lemma 6.5 können wir weiter argumentieren:

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcap_{p\in S}(v_p\circ Q_p)^{-1}(A_p)) &= \sum_{\substack{(a_p)_{p\in S}\\ \in\prod_{p\in S}A_p}}\frac{\sharp Q[(p^{a_p})_{p\in S}]}{\prod_{p\in S}p^{(a_p+1)}}=\sum_{\substack{(a_p)_{p\in S}\\ \in\prod_{p\in S}A_p}}\prod_{p\in S}\frac{\sharp Q_p[p^{a_p}]}{p^{(a_p+1)}} \\
&= \prod_{p\in S}\sum_{a\in A_p}\frac{\sharp Q_p[p^a]}{p^{(a+1)}}=\prod_{p\in S}\mu((v_p\circ Q_p)^{-1}(A_p)).
\end{aligned}$$

□

Wir benutzen nun dieses Resultat im einfachsten Fall zusammen mit den Ergebnissen des ersten Abschnittes. Außerdem machen wir vom Übertragungsprinzip in Form von Satz 5.6 Gebrauch.

Wir bemerken dazu, daß diese Ergebnisse ohne Schwierigkeiten auf Funktionen $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ übertragen werden können, sofern nur ${}^*f^\circ$ Loeb-integrierbar bleibt (bzw. sofern hinreichend viele Momente von ${}^*f^\circ$ Loeb-integrierbar bleiben). Man beachte dazu, daß in keinem Beweis die Beschränktheit von f ausgenutzt wurde.

Satz 6.7. *Sei S eine endliche Primzahlmenge. Definiere*

$$E:=\sum_{p\in S}\frac{1}{p-1}\quad \text{und}\quad V:=E+\sum_{p\in S}\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Dann gilt

$$\limsup_{N\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{N}}\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}|\lambda_N\circ\phi_y(\{x\in\mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{V}}(\sum_{p\in S}v_p(x)\ -E)\le\alpha\})-\phi(\alpha)|\le\frac{12}{\sqrt{V}}.$$

(ϕ bezeichnet wieder die Normalverteilung.)

Beweis. Sei μ irgendein invarianter W-Inhalt und S eine endliche Primzahlmenge.
Man betrachte die Abbildungen $v_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, $p \in S$, als Funktionen $v_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Die Funktionen v_p sind nicht beschränkt, alle Momente von v_p sind aber Loeb-integrierbar, wie man aus Satz 6.4 und seinem Beweis entnehmen kann. Man kann ebenso mit Hilfe von Satz 6.6 schließen, daß die Familie $({}^*v_p{}^\circ)_{p\in S}$ im Loeb-Raum unabhängig ist.
Wie im Satz 6.4 berechnet man jetzt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^*v_p{}^\circ &= \frac{1}{p}(1+\frac{1}{p-1}) = \frac{1}{p-1}\\
\mathrm{Var}^*v_p{}^\circ &= \frac{1}{p}(1+\frac{2}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}) = \frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}\\
\mathrm{E}|{}^*v_p{}^\circ - \mathrm{E}^*v_p{}^\circ|^3 &= \frac{1}{p}(1+\frac{4}{p-1}+\frac{7}{(p-1)^2}+\frac{2}{(p-1)^3}) \leq 14{\cdot}\mathrm{Var}^*v_p{}^\circ.
\end{aligned}$$

Wir wenden nun den Satz von Berry-Esséen an (Satz 5.6, man beachte die einleitenden Bemerkungen). Dieser liefert

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\mu(\{x \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{V}}(\sum_{p\in S} v_p(x)\ \ - E) \leq \alpha\}) - \phi(\alpha)| \leq \frac{12}{\sqrt{V}}.$$

Dies gilt für jeden invarianten W-Inhalt μ. Mit Satz 6.2 erhalten wir das behauptete Resultat.

$\square$

6.3 Denjoys Interpretation der Riemannschen Vermutung

Zum Abschluß dieser Arbeit kommen wir auf Denjoys Interpretation der Riemannschen Vermutung zurück. Es soll ihr eine Deutung innerhalb der entwickelten Methode der vorliegenden Arbeit gegeben werden. Wir definieren dazu die *Liouville-Funktion* $\mathcal{L} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$\mathcal{L}(n) := (-1)^{\sum\limits_p v_p(n)}.$$

(Üblicherweise wird das Symbol λ für diese Funktion verwendet (wie in der Einleitung). Um Verwechselungen zu vermeiden, bevorzugen wir hier die Notation $\mathcal{L}$.)

Der Primzahlsatz von Hadamard & de la Vallée Poussin ist äquivalent zu

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \mathcal{L}(n) = 0.$$

Mit Hilfe von Satz 5.17 erkennt man, daß dies äquivalent ist zu

$$\forall \lambda \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}\ \lambda\mathcal{L} = 0.$$

Das bedeutet, daß für alle regulären λ gilt

$$\lambda(\{n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(n) = 1\}) = \lambda(\{n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(n) = -1\}) = \frac{1}{2}.$$

Innerhalb Denjoys heuristischer Argumentation (vgl. Einleitung) wurde versucht plausibel zu machen, daß ein Wert $\mathcal{L}(n)$ keine Information über weitere Werte von $\mathcal{L}$ trägt. Das ist offensichtlich nicht ganz korrekt, da $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \mathcal{L}(nm) = \mathcal{L}(n)\mathcal{L}(m)$. Es scheint aber z.B. plausibel, daß $\mathcal{L}(n)$ keine Information von $\mathcal{L}(n+1)$ trägt. Wir formulieren deshalb folgende Unabhängigkeitsbedingung (von der wir nicht wissen, ob sie richtig ist):

D1 Für alle regulären Inhalte λ ist $(\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a)_{a\in\mathbb{N}}$ eine λ-unabhängige Familie beschränkter Funktionen auf $\mathbb{N}$.

Bemerkung: Aus der Shift-Invarianz regulärer Inhalte folgt, daß die $\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a$ identisch verteilt sind nach $\mathcal{L}$.
Wir wollen zunächst sehen, zu welcher Asymptotik die Bedingung **D1** äquivalent ist. Wir formulieren folgende Aussage:

D2 Für alle Polynome P der Gestalt $P(x) = \prod\limits_{i\le n}(x + a_i)$ mit $a_i \in \mathbb{N}_0$ und $\forall i \neq j\ a_i \neq a_j$ gilt
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\le N} \mathcal{L}\circ P(n) = 0.$$

Bevor wir zeigen können, daß **D1** und **D2** äquivalente Bedingungen sind, müssen zunächst einige Hilfsaussagen hergeleitet werden, die wir nicht weiter kommentieren.

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung D_n definiert durch
$$D_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad D_n(x) := \left[\frac{x}{n}\right].$$
(Hierbei bezeichnet $[x]$ die Gaußklammer $[x] := \max\{m \in \mathbb{N}_0,\ m \le x\}$.)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung M_n definiert durch
$$M_n : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad M_n(x) := n{\cdot}x.$$
Wir bemerken, daß für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $D_n\circ M_n(x) = x$, aber i.a. $M_n\circ D_n(x) \neq x$. Es sei gemäß der vereinbarten Notation (siehe Seite 43) $D_n^\star : \mathcal{B}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{N})$ definiert durch
$$D_n^\star f := f\circ D_n.$$

Lemma 6.8.

(1) *Für alle invarianten Inhalte μ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*
$$\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \quad \mu(f{\cdot}\mathbb{1}_{n\mathbb{N}}) = \frac{1}{n}\mu(f\circ M_n\circ D_n).$$

(2) *Für alle regulären Inhalte λ ist $\lambda\circ D_n^\star$ regulär, und es gilt:*
$$\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \ \text{ mit } f \ge 0 \text{ gilt: } \lambda\circ D_n^\star(f) = \lambda(f\circ D_n) \le n\lambda f.$$

Beweis.
(1) Sei μ invariant und $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Für alle $r \in \{0, ..., n-1\}$ hat man dann

$$f \cdot \mathbb{1}_{n\mathbb{N}} = (f \circ M_n \circ D_n \cdot \mathbb{1}_{n\mathbb{N}+r}) \circ \mathcal{S}^r.$$

Aus der Shift-Invarianz von μ folgt daher

$$\begin{aligned} \mu(f \mathbb{1}_{n\mathbb{N}}) &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \mu((f \circ M_n \circ D_n \cdot \mathbb{1}_{n\mathbb{N}+r}) \circ \mathcal{S}^r) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \mu(f \circ M_n \circ D_n \cdot \mathbb{1}_{n\mathbb{N}+r}) \\ &= \frac{1}{n} \mu(f \circ M_n \circ D_n). \end{aligned}$$

(2) Sei λ regulär. Nach Satz 5.19 gibt es eine interne, monoton fallende Funktion $F : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ mit $\forall m \in \mathbb{N} \;\; F(m) = 1$, $F \geq 0$ und

$$\forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \quad \lambda g = ({}^* \sum_{x \in {}^*\mathbb{N}} F(x) {}^*g(x))^\circ.$$

Für $f \geq 0$, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ gilt daher

$$\begin{aligned} \lambda(f \circ D_n) &= ({}^* \sum_{x \in {}^*\mathbb{N}} F(x) {}^*f(\left[\frac{x}{n}\right]))^\circ \\ &= ({}^* \sum_{x \in {}^*\mathbb{N}} {}^* \sum_{r=0}^{n-1} F(nx+r) \cdot {}^*f(x))^\circ \\ &\leq (n \cdot {}^* \sum_{x \in {}^*\mathbb{N}} F(x) {}^*f(x))^\circ \\ &= n \cdot \lambda f. \end{aligned}$$

Das "$\leq$" ergibt sich dabei dadurch, daß F monoton fallend ist. Aus diesem Grund ist auch die interne Funktion $G(x) := {}^* \sum\limits_{r=0}^{n-1} F(nx+r)$ monoton fallend. Wegen $\forall m \in \mathbb{N} \; F(m) = 1$ ist auch $\forall m \in \mathbb{N} \; G(m) = 1$. Nach Satz 5.19 ist $\lambda \circ D_n^\star$ daher regulär. $\square$

Aufgrund von Lemma 5.2, (4) ergibt sich nun folgendes Korollar.

Korollar 6.9. *Sei λ regulär. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $\lambda \circ D_n^\star$ ein regulärer, λ-stetiger W-Inhalt.*

Lemma 6.10. *Sei S eine endliche Primzahlmenge und μ ein invarianter W-Inhalt sowie $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.*

(1) *Es gilt*

$$\mu(f \cdot \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{p \in S} p\mathbb{N}}) = \sum_{k=1}^{|S|} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{p_1 < \ldots < p_k \\ (p_i)_{i \leq k} \in S^k}} \frac{1}{\prod\limits_{i \leq k} p_i} \cdot \mu(f \circ M_{\prod\limits_{i \leq k} p_i} \circ D_{\prod\limits_{i \leq k} p_i}).$$

(2) *Ist f stark multiplikativ, so gilt*

$$\mu(f{\cdot}1\!\!1_{\bigcup\limits_{p\in S} p\mathbb{N}}) = \sum_{k=1}^{|S|}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{p_1<\ldots<p_k \\ (p_i)_{i\leq k}\in S^k}} \frac{f(\prod\limits_{i\leq k} p_i)}{\prod\limits_{i\leq k} p_i} \cdot \mu(f{\circ}D_{\prod\limits_{i\leq k} p_i}).$$

Beweis.
(1) Wir haben

$$1\!\!1_{\bigcup\limits_{p\in S} p\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{|S|}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{p_1<\ldots<p_k \\ (p_i)_{i\leq k}\in S^k}} 1\!\!1_{(\prod\limits_{i\leq k} p_i)\mathbb{N}}.$$

Hieraus folgt die Behauptung aus Lemma 6.8 (1).
(2) Das erhalten wir direkt aus (1), da für stark multiplikative f gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(f{\circ}M_n{\circ}D_n) = f(n){\cdot}\mu(f{\circ}D_n).$$

□

Wir beweisen nun den angekündigten Satz.

Satz 6.11. **D1** *und* **D2** *sind äquivalente Bedingungen.*

Beweis.
D1⇒D2: Sei λ regulär. Wir wenden das *Starke Gesetz der großen Zahlen* auf die λ-unabhängige Familie $(\mathcal{L}{\circ}\mathcal{S}^a)_{a\in\mathbb{N}}$ an (mit $a_n := \frac{1}{n}$). Da die $({}^*(\mathcal{L}{\circ}\mathcal{S}^a)^\circ)_{a\in\mathbb{N}_0}$ identisch verteilt sind, gilt im Loebraum $\lambda_{\mathcal{L}}$-fastsicher:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{a\leq N} {}^*(\mathcal{L}{\circ}\mathcal{S}^a)^\circ(x) = \lambda_{\mathcal{L}}({}^*\mathcal{L}^\circ) = \lambda\mathcal{L}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach Lemma 6.8 $\lambda{\circ}D_n^\star$ ebenfalls regulär, so daß wir $(\lambda{\circ}D_n^\star)_{\mathcal{L}}$-fastsicher haben:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{a\leq N} {}^*(\mathcal{L}{\circ}\mathcal{S}^a)^\circ(x) = (\lambda{\circ}D_n^\star)_{\mathcal{L}}({}^*\mathcal{L}^\circ) = \lambda{\circ}D_n^\star(\mathcal{L}).$$

Da $\lambda{\circ}D_n^\star$ λ-stetig ist (Korollar 6.9), folgt $\lambda\mathcal{L} = \lambda{\circ}D_n^\star(\mathcal{L})$. Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schließen nun mit Hilfe von Lemma 6.10 (2), daß für alle endlichen Primzahlmengen S gilt:

$$\lambda(\mathcal{L}{\cdot}1\!\!1_{\bigcup\limits_{p\in S} p\mathbb{N}}) = (1 - \prod_{p\in S}(1 + \frac{1}{p}))\lambda\mathcal{L}.$$

Aus der Divergenz von $\prod\limits_{p\in S}(1+\frac{1}{p})$ für gegen die Menge der Primzahlen aufsteigende S schließen wir auf $\lambda\mathcal{L} = 0$. Da die $\mathcal{L}{\circ}\mathcal{S}^a$ identisch nach $\mathcal{L}$ verteilt sind, erhalten wir

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \ \lambda(\mathcal{L}{\circ}\mathcal{S}^a) = 0.$$

Sei nun $P(x) = \prod\limits_{i\leq n}(x + a_i)$ ein Polynom der Gestalt wie in der Bedingung **D2**. Wegen der Multiplikativität von $\mathcal{L}$ gilt

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}\circ P(x) = \prod_{i \le n} \mathcal{L}(x+a_i) = \prod_{i \le n} \mathcal{L}\circ\mathcal{S}^{a_i}(x).$$

Aus der Unabhängigkeit der Familie $(\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a)_{a\in\mathbb{N}_0}$ folgt daher

$$\forall \text{ Polynome } P \text{ wie in } \mathbf{D2} \text{ gilt } \lambda(\mathcal{L}\circ P) = \prod_{P(-a)=0} \lambda(\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a) = 0.$$

Dieses ist richtig für alle regulären λ. Wir schließen mit Satz 5.17 auf die Gültigkeit von **D2**.

D2$\Rightarrow$**D1**: Aus der Bedingung **D2** ergibt sich mittels Satz 5.17, daß für alle Polynome P, $P(x) = \prod_{i\le n}(x+a_i)$, wie in **D2** und für alle regulären λ gilt

$$\lambda(\prod_{i\le n} \mathcal{L}\circ\mathcal{S}^{a_i}) = \lambda(\mathcal{L}\circ P) = 0 = \prod_{i \le n} \lambda(\mathcal{L}\mathcal{S}^{a_i}).$$

Daher ist die Familie $(\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a)_{a\in\mathbb{N}}$ λ-unkorreliert. Da die Zufallsvariablen $\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a$ lediglich Werte in $\{1,-1\}$ annehmen, ist die Familie $(\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a)_{a\in\mathbb{N}}$ λ-unabhängig für alle regulären λ. □

Es ergibt sich nun ohne Schwierigkeiten folgendes Korollar.

Korollar 6.12. *Unter der Voraussetzung* **D1** *bzw.* **D2** *gilt für alle regulären λ:*
Die Zufallsvariablen $(\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a)_{a\in\mathbb{N}}$ sind unabhängig und identisch verteilt nach $\mathcal{L}$. Es gilt

$$\mathrm{E}\mathcal{L} = 0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{Var}\mathcal{L} = 1.$$

Wir deuten jetzt Denjoys Interpretation der Riemannschen Vermutung. Im voranstehenden Korollar spiegelt sich die Vorstellung wieder, daß für alle regulären λ die Zufallsvariable $\mathcal{L}$ ein "faires Münzwurfexperiment" darstellt. Daß die "Riemansche Vermutung mit Wahrscheinlichkeit 1 richtig ist", wird bedeuten, daß für alle regulären λ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \sum_{a \le N} ({}^*\mathcal{L}(x+a))^\circ = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad \lambda_{\mathcal{L}}\text{-fastsicher.}$$

Dieses Resultat kann unter der Voraussetzung **D1** bzw. **D2** ohne Mühe hergeleitet werden. Wir beweisen eine etwas schärfere Aussage, deren Beweis statt mit dem Satz von de Moivre Laplace mit dem Satz von Berry-Esséen argumentiert. Das diese Arbeit abschließende Korollar ist die asymptotische Variante der Aussage, daß die "Riemansche Vermutung mit Wahrscheinlichkeit 1 richtig ist", unter der Annahme von **D1** bzw. **D2**.

Satz 6.13. *Unter der Annahme* **D1** *bzw.* **D2** *gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\lambda_N(\{x\in\mathbb{N}, \frac{|\sum_{a=0}^{n-1}\mathcal{L}(x+a)|}{\sqrt{n}} \le \alpha\}) - (\phi(\alpha)-\phi(-\alpha))| \le \frac{1,6}{\sqrt{n}}.$$

(Hierbei bedeutet ϕ wieder die Normalverteilung; zur Definition von λ_N sei auf Seite 44 verwiesen.)

Beweis. Wir werden den Satz von Berry-Esséen für W-Inhalte (Satz 5.6) anwenden auf die Familie $(\mathcal{L}\circ\mathcal{S}^a)_{a\in\mathbb{N}}$. Das obige Korollar gibt Auskunft über Erwartungswert und Varianz. Wir bemerken weiterhin, daß für alle (regulären) Inhalte wegen $|\mathcal{L}| = 1$ gilt: $\lambda|\mathcal{L}|^3 = 1$.
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir setzen

$$f(x) := \frac{|\sum_{a=0}^{n-1} \mathcal{L}(x+a)|}{\sqrt{n}}, \quad F(\alpha) := \phi(\alpha) - \phi(-\alpha) \quad \text{und} \quad c := \frac{1,6}{\sqrt{n}}.$$

Nach Satz 5.6 haben wir mit diesen Bezeichnungen für alle regulären λ:

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\lambda(\{x \in \mathbb{N},\ f(x) \leq \alpha\}) - F(\alpha)| \leq c.$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus Satz 6.1. □

Korollar 6.14. *Unter der Annahme* **D1** *bzw.* **D2** *gilt für alle* $n \geq 3$*:*

$$\limsup_{N\to\infty} \lambda_N(\{x \in \mathbb{N},\ |\sum_{a=0}^{n-1} \mathcal{L}(x+a)| \geq \sqrt{n\log(n)}\ \}) \leq \frac{3,2}{\sqrt{n}}.$$

Beweis. Das ist eine einfache Herleitung aus obigem Satz. Aus diesem folgt nämlich für $\alpha := \log(n)^{\frac{1}{2}}$:

$$\limsup_{N\to\infty} |\lambda_N(\{x \in \mathbb{N},\ \frac{|\sum_{a=0}^{n-1} \mathcal{L}(x+a)|}{\sqrt{n}} \geq \log(n)^{\frac{1}{2}}\}) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\log(n)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{2})dy| \leq \frac{1,6}{\sqrt{n}}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\log(n)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{2})dy \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\log(n)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} \exp(-\frac{y\log(n)^{\frac{1}{2}}}{2})dy = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{(n\log(n))^{\frac{1}{2}}} < \frac{1,6}{\sqrt{n}}.$$

□

Literatur

[Bau] H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1978.

[Cutl1] N. Cutland: Nonstandard Analysis and its applications. Cambridge University Press, 1988.

[Cutl2] N. Cutland: Nonstandard Measure Theory and its applications. Bull. London Math.Soc. 15 (1983), 529-589.

[Den] A. Denjoy: L' Hypothèse de Riemann sur la distribution des zéros de $\zeta(s)$, reliée à la théorie des probabilites. C.R. Acad. Sci. Paris 192 (1931), 656-658.

[Edw] H.M. Edwards: Riemann's Zeta Function. Academic Press, New York and London 1974.

[Fur] Furstenberg: Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton University Press, 1981.

[Gal] J. Galambos: Advanced Probability Theory 3. Marcel Dekker, Inc. New York 1988.

[Gla] S. Glasner: Proximal flows. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1976.

[Hirz-Sch] F. Hirzebruch & W. Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis. B.I.-Hochschultaschenbücher, Mannheim 1971.

[Hur-Loe] A.E. Huerd & P.A. Loeb: An Introduction to Nonstandard Real Analysis. Israel J. Math 42, 284-290.

[Kub] J. Kubilius: Probabilistic Methods in the Theory of Numbers. Translation of Mathematical monographs, Vol 11, AMS. Providence, Rhode Island 1964.

[Lind] T. Lindstrøm: An Invitation to Nonstandard Analysis. In: [Cutl1].

[Loe1] P.A. Loeb: An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory. In: Probabilistic Analysis and related Topics II. Academic Press, New York 1979, 105-142.

[Loe2] P.A. Loeb: A functional approach to nonstandard measure theory. In: Conference on Modern Analysis and Probability, AMS, Providence, Rhode Island, 259-262.

[Mach-Hir] MACHOVER & HIRSCHFELD: Lectures on Nonstandard Analysis. Lecture Notes in Mathematics 94. Springer-Verlag, Berlin, New York 1969.

[Mañ] R. MAÑÉ: Ergodic Theory and Differentiable Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980.

[Mur] G.J. MURPHY: C^*-Algebras and Operator Theory. Academic Press 1990, Appendix.

[Rich] M.M. RICHTER: Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandard-Methoden. Vieweg-Verlag, Braunschweig, Wiesbaden 1982.

[Schu] H. SCHUBERT: Topologie. Teubner, Stuttgart 1964.

[Walk] R.C. WALKER: The Stone-Čech Compactification. Springer-Verlag, Berlin, New York 1974.

Lebenslauf

geboren am	08.03.1966	in Nordenham, Landkreis Wesermarsch
Eltern		Helmut Beyerstedt und Irmgard Beyerstedt, geb. Jung
Schulausbildung	1972 – 1976	Grundschule Hermann-Ehlers-Schule (Oldenburg)
	1976 – 1978	Orientierungsstufe Friedrichsfehn
	1978 – 1985	Gymnasium Hindenburgschule (Oldenburg)
Wehrdienst	1985 – 1986	Grundwehrdienst
Studium	1986 – 1992	Studium der Mathematik mit Nebenfach Theoretische Physik an der Georg–August–Universität Göttingen Abschluß: Diplom am 27.04.1992. Thema der Diplomarbeit: "Artin-Weilsche L-Reihen und Explizite Formeln"
	1992 – 1996	wissenschaftlicher Mitarbeiter des Mathematischen Instituts Göttingen