

Stabil lineare Homotopiedarstellungen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Gesa Ott
aus
Hamel

Göttingen 1997

D7

Referent: **Prof. Dr. T. tom Dieck**

Korreferent: **Prof. Dr. U. Bunke**

Tag der mündlichen Prüfung: 6.11.1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Grundlagen	9
1.1 Homotopiedarstellungen	9
1.1.1 Definition und wichtigste Eigenschaften	10
1.1.2 Orientierungen	14
1.1.3 Stabile Klassifizierung	18
1.2 Gradfunktionen von äquivarianten Abbildungen zwischen Homotopiedarstellungen	20
2 Zwei Beispiele	26
2.1 Die orthogonale Gruppe $O(2)$	26
2.2 Topologisch zyklische Gruppen	27
3 Stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen	31
3.1 Äquivariante K -Theorie	33
3.1.1 Bottperiodizität für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen	35
3.1.2 Eulerklassen	37
3.2 Kongruenzen für Gradfunktionen	42
3.3 Invarianten für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen	48
3.4 Komplexe Darstellungssphären von p -Gruppen ungerader Ordnung	54
4 Stabil lineare Homotopiedarstellungen	66
4.1 Bevorzugte Orientierungen für Darstellungssphären	67
4.2 Kongruenzen für Gradfunktionen	69
4.3 Invarianten für stabil lineare Homotopiedarstellungen	73
Literaturverzeichnis	80

Einleitung

In dem Gebiet der geometrischen Darstellungstheorie gehen Algebra (speziell die Darstellungstheorie) und Topologie (speziell die Theorie der Transformationsgruppen) eine fruchtbare Verbindung ein: Wichtige und interessante Beispiele von Gruppenoperationen auf Sphären werden von der Darstellungstheorie von Gruppen geliefert, denn bei jeder orthogonalen \mathbf{G} -Darstellung V einer Gruppe \mathbf{G} läßt sich die Operation von \mathbf{G} auf die Einheitskugel S^V von V einschränken. Handelt es sich bei \mathbf{G} um eine Liesche Gruppe, so sind solche \mathbf{G} -Darstellungssphären zudem differenzierbare \mathbf{G} -Mannigfaltigkeiten. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit homotopietheoretischen Aspekten von Darstellungssphären und stabil linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen (wobei \mathbf{G} stets eine kompakte Liesche Gruppe sei).

Darstellungssphären sind in der Vergangenheit schon unter vielfältigsten Aspekten, z. B. als Objekte verschiedener Kategorien untersucht worden. Hier nur eine kleine Auswahl möglicher Fragen:

- Wann sind zwei Darstellungssphären S^V und S^W \mathbf{G} -diffeomorph? De Rham hat bewiesen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn V und W isomorph sind [33].
- Wann sind zwei Darstellungssphären S^V und S^W \mathbf{G} -homöomorph? Hier hängt die Antwort von der Gruppe \mathbf{G} ab: Ist beispielsweise $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{G}$ die Zusammenhangskomponente der Eins und \mathbf{G}/\mathbf{G}_0 von ungerader Ordnung, so sind S^V und S^W genau dann \mathbf{G} -homöomorph, wenn V und W isomorph sind (Hsiang–Pardon [21]).
- Welche Darstellungssphären S^V und S^W erlauben eine \mathbf{G} -Abbildung $S^V \rightarrow S^W$ vom Abbildungsgrad ± 1 ? Antworten auf diese oder ähnliche Fragen finden sich beispielsweise bei Atiyah–Tall [4], Lee–Wasserman [26], Meyerhoff–Petrie [29] und anderen Autoren.
- Wann sind zwei Darstellungssphären S^V und S^W \mathbf{G} -homotopieäquivalent? Dies ist eine der Fragen, der wir uns in dieser Arbeit widmen werden.

Mit „Äquivalenz“ sei von nun an äquivariante Homotopieäquivalenz gemeint. Eine weitere mögliche Frage ist dann die nach stabiler Äquivalenz:

- Es seien V und W gegeben. Gibt es eine \mathbf{G} -Darstellung U , s. d. $S(V \oplus U)$ und $S(W \oplus U)$ äquivalent sind?

Diese Frage nach stabiler Äquivalenz hat zu der Definition folgender Untergruppen des reellen bzw. komplexen Darstellungsringes geführt:

$$\begin{aligned} RO_h(\mathbf{G}) &:= \{V - W \in RO(\mathbf{G}) \mid SV \text{ und } SW \text{ sind stabil äquivalent}\}, \\ R_h(\mathbf{G}) &:= \{V - W \in R(\mathbf{G}) \mid SV \text{ und } SW \text{ sind stabil orientiert äquivalent}\}. \end{aligned}$$

Diese letzte Definition ist sinnvoll, da komplexe Darstellungssphären SV sich in kanonischer Weise, und zwar induziert durch die komplexe Struktur des Vektorraumes V , orientieren lassen. Ist

$$RO_0(\mathbf{G}) := \{V - W \in RO(\mathbf{G}) \mid \forall \mathbf{H} \subset \mathbf{G} : \dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbf{H}} = \dim_{\mathbb{R}} W^{\mathbf{H}}\} \subset RO(\mathbf{G})$$

und $R_0(\mathbf{G}) \subset R(\mathbf{G})$ die analog definierte Untergruppe von $R(\mathbf{G})$, so gilt in jedem Fall $RO_h(\mathbf{G}) \subset RO_0(\mathbf{G})$ und $R_h(\mathbf{G}) \subset R_0(\mathbf{G})$. T. tom Dieck hat beispielsweise gezeigt, wie sich die durch diese homotopietheoretische Fragen definierten Faktorgruppen

$$RO_0(\mathbf{G})/RO_h(\mathbf{G}) \quad \text{und} \quad R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}),$$

falls \mathbf{G} eine p -Gruppe ist, in rein algebraischer Weise beschreiben lassen ([10]; [12], Theorem (9.1.5)).

Eine anderer Zugang (der über die Untersuchung von Darstellungssphären hinausgeht) ist der, die wichtigsten homotopietheoretischen Eigenschaften von \mathbf{G} -Darstellungssphären zu einem neuen Begriff zusammenzufassen und diese so definierten Objekte bzw. ihre möglichen (stabilen) \mathbf{G} -Homotopietypen gesondert zu untersuchen. Dies haben T. tom Dieck und T. Petrie mit der Definition des Begriffes der \mathbf{G} -Homotopiedarstellung, mit dem wir uns auch in dieser Arbeit beschäftigen, getan: Eine Homotopiedarstellung ist im wesentlichen eine Homotopiesphäre X , auf der die Gruppe \mathbf{G} so operiert, daß die Fixpunktmenge $X^{\mathbf{H}}$ einer Untergruppe $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ (entsprechend der Einheitssphäre des Fixpunktuntervektorraums $V^{\mathbf{H}}$ einer orthogonalen Darstellung V) jeweils eine Homotopiesphäre $S^{n(\mathbf{H})}$ der topologischen Dimension $n(\mathbf{H})$ ist. Auf der Menge der Äquivalenzklassen von \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen liefert der Join eine assoziative und kommutative Verknüpfung $(X, Y) \mapsto X * Y$; in der zugehörigen Grothendieckgruppe $V(\mathbf{G})$ bilden die stabil linearen Homotopiedarstellungen, d. h. diejenigen X , für die $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} SW$ für geeignete \mathbf{G} -Darstellungen V und W , eine (im allgemeinen echte) Untergruppe $JO(\mathbf{G})$. Der Schwerpunkt unserer Untersuchungen liegt auf diesen, den tatsächlichen Darstellungssphären am nächsten stehenden Objekten, den stabil linearen Homotopiedarstellungen.

Inhalt dieser Arbeit

Eine offensichtliche homotopietheoretische Invariante einer Homotopiedarstellung X ist ihre Dimensionsfunktion $\text{Dim}_{\mathbf{G}} X : \mathbf{H} \mapsto n(\mathbf{H}) + 1$, die einen Gruppenhomomorphismus $\text{Dim}_{\mathbf{G}}$ von $V(\mathbf{G})$ in die (additive) Gruppe der stetigen Funktionen auf der Menge der abgeschlossenen Untergruppen von \mathbf{G} mit Werten in \mathbb{Z} liefert. $\text{Dim}_{\mathbf{G}} X$ klassifiziert den Homotopietyp von X i. a. jedoch nicht ausreichend. Wir zeigen, daß für stabil lineare

Homotopiedarstellungen mit Hilfe äquivarianter K -Theorie weitere instabile (und auch stabile) Invarianten gefunden werden können. Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

Es sei $\Phi(\mathbf{G})$ der Raum der abgeschlossenen Untergruppen \mathbf{H} von \mathbf{G} mit endlicher Weylgruppe $W\mathbf{H} = N\mathbf{H}/\mathbf{H}$. Grundlage für alle weiteren Überlegungen ist die Beobachtung, daß es für je zwei kohärent orientierte Homotopiedarstellungen X und Y gleicher Dimensionsfunktion D Zahlen $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} \in \mathbb{Z}$ (wobei $\mathbf{H} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{G}$) gibt, so daß gilt: Für eine stetige Funktion $d : \Phi(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$ existiert genau dann eine äquivariante Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $\deg(f^{\mathbf{H}}) = d(\mathbf{H})$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$, wenn d (außer gewissen von der Dimensionsfunktion D abhängigen Instabilitätsbedingungen) die Kongruenzen

$$d(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}:\mathbf{H}<\mathbf{K} \\ \mathbf{1}\neq\mathbf{K}/\mathbf{H}\text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} d(\mathbf{K}) \pmod{|N\mathbf{H}/\mathbf{H}|} \quad (0.1)$$

erfüllt. (Für endliche Gruppen \mathbf{G} und endliche \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X, Y wurde dies bereits von Laitinen bewiesen [24].)

Die bei der Klassifikation von Homotopiedarstellungen auftretende Frage lautet nun: Es seien \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X, Y gleicher Dimensionsfunktion gegeben. Gibt es eine äquivariante Abbildung $h : X \rightarrow Y$ mit Abbildungsgraden $\deg(h^{\mathbf{H}}) = \pm 1$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$? h wäre dann die gesuchte \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz. Bei genauer Kenntnis obiger Zahlen $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$ kann diese Frage also beantwortet werden. Zunächst ist allerdings nur die Existenz der $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$ gesichert: alle Informationen über X und Y verstecken sich weiterhin in diesen Koeffizienten.

In zwei Spezialfällen konnten die Zahlen $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$ bisher explizit berechnet werden: für komplexe Darstellungssphären (tom Dieck und Petrie [11], [17], Kap. II.5) mit Hilfe äquivarianter K -Theorie und für reelle Darstellungssphären endlicher Gruppen (Tornehave [37]) mit Hilfe äquivarianter KO -Theorie. Im ersten Fall geht wesentlich die Bottperiodizität der äquivarianten K -Theorie $K_{\mathbf{G}}(X) \cong K_{\mathbf{G}}(X \times (DV, SV))$ für eine beliebige komplexe \mathbf{G} -Darstellung V ein, im zweiten Fall das Analogon der äquivarianten KO -Theorie $KO_{\mathbf{G}}(X) \cong KO_{\mathbf{G}}(X \times (DV, SV))$ für reelle Spin- \mathbf{G} -Moduln V . In beiden Fällen ist dann $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(SV, SW)$ als Summe von Quotienten bestimmter von den \mathbf{G} -Darstellungen V und W abhängiger Klassenfunktionen darstellbar.

Die von tom Dieck und Petrie bzw. Tornehave verwendeten Methoden (und Ergebnisse) kann man im Fall stabil linearer Homotopiedarstellungen nutzen: Das Prinzip bleibt, die Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(X, Y)$ als Summe von Funktionswerten der Quotienten bestimmter X und Y zugeordneter Klassenfunktionen $\lambda(X)_{\mathbf{H}}$ und $\lambda(Y)_{\mathbf{H}} : W\mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}^*$ darzustellen ($\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$). Mit Hilfe dieser Klassenfunktionen kann dann jeder stabil linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X eine ihre (stabile) Äquivalenzklasse eindeutig beschreibende Invariante zugeordnet werden. Wenn die Homotopiedarstellung X sogar stabil komplex linear ist, wenn es also zwei komplexe \mathbf{G} -Darstellungen V und W gibt, s. d. $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} SW$, so gehen wir dabei jedoch anders vor als wenn X „nur“ stabil linear ist:

Ist X eine stabil komplex lineare Homotopiedarstellung, so zeigen wir, daß ein Analogon zur Bottperiodizität für komplexe \mathbf{G} -Darstellungen existiert, d. h. es gibt ein Element

$b(X) \in K_{\mathbf{G}}(CX, X)$ (eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit einer Einheit $\tau \in R(\mathbf{G})^*$), s. d. für jeden \mathbf{G} -Raum A die Abbildung

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{G}}^*(A) &\longrightarrow K_{\mathbf{G}}^*(A \times (CX, X)) \\ \omega &\longmapsto \omega \cdot b(X) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $R(\mathbf{G})$ -Moduln ist. Insbesondere ist $K_{\mathbf{G}}(CX, X)$ ein freier $R(\mathbf{G})$ -Modul vom Rang 1, mit erzeugendem Element $b(X)$. Diese „Bottklasse“ $b(X)$ liefert eine Art „Eulerklasse“ $e(X) \in R(\mathbf{G})$, mit deren Hilfe sich beispielsweise der ($\mathbb{Z}/2$ -graduierte) $R(\mathbf{G})$ -Modul $K_{\mathbf{G}}^*(X)$ beschreiben läßt.

Zum anderen kann man anhand dieser Bottperiodizität auf direktem Wege die oben bereits erwähnten Klassenfunktionen $\lambda(X)_{\mathbf{H}}$ definieren (die noch von der speziellen Wahl von $b(X)$ abhängen), die in die Berechnung der für die Kongruenzen (0.1) notwendigen Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(X, Y)$ eingehen. Wir konstruieren mit Hilfe der $\lambda(X)_{\mathbf{H}}$ folgende Invarianten:

1. Die Invariante $\Lambda_D(X)$ beschreibt, zusammen mit der Dimensionsfunktion D von X , den \mathbf{G} -Homotopietyp von X eindeutig.
2. Für jede komplexe \mathbf{G} -Darstellung V beschreibt eine nur von der Isomorphieklasse von V abhängige Invariante $\Lambda(V)$, wiederum zusammen mit der Dimensionsfunktion D von SV , eindeutig den stabilen \mathbf{G} -Homotopietyp von SV .
3. Wegen der oben bereits erwähnten möglichen kanonischen Orientierung komplexer Darstellungssphären SV ist es außerdem sinnvoll, für jede \mathbf{G} -Darstellung V eine dritte Invariante $\Lambda_{\text{or}}(V)$ (die ebenfalls nur von der Isomorphieklasse von V abhängt) als Element einer Gruppe $\mathcal{J}_{\text{or}}(\mathbf{G})$ zu konstruieren, die ihren orientierten stabilen \mathbf{G} -Homotopietyp (eindeutig) beschreibt: mit unseren Methoden ist dies für endliche Gruppen \mathbf{G} möglich.

Ist \mathbf{G} endlich, so liefert diese dritte Invariante also einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}) \ni [V - W] \longmapsto \Lambda_{\text{or}}(V)\Lambda_{\text{or}}(W)^{-1} \in \mathcal{J}_{\text{or}}(\mathbf{G}),$$

d. h. wir erhalten eine rein algebraische Beschreibung der eingangs erwähnten (und aus topologischen Gründen definierten) Faktorgruppe $R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G})$.

Für p -Gruppen ($p \neq 2$) läßt sich diese letzte Aussage vereinfachen: zwei komplexe Darstellungssphären SV und SW (gleicher Dimensionsfunktion) sind bereits dann orientiert \mathbf{G} -homotopieäquivalent, wenn der Quotient ihrer Klassenfunktionen $\frac{\lambda(V)_{\mathbf{1}}}{\lambda(W)_{\mathbf{1}}}$ für die triviale Untergruppe $\mathbf{H} = \mathbf{1}$ eine Einheit im Darstellungsring $R(\mathbf{G})^*$ ist.

Bei der Klassifizierung stabil (reell) linearer Homotopiedarstellungen gehen wir, aufgrund der im allgemeinen für orthogonale \mathbf{G} -Darstellungen fehlenden Bottperiodizität, etwas andere Wege. So ist es u. a. zunächst nötig, sich um eine gewisse Festlegung der Orientierung von Darstellungssphären zu bemühen. Zumindest für endliche Gruppen können wir

dann, unter Ausnutzung der Ergebnisse von Tornehave [37], Invarianten ähnlicher Bauart wie in dem stabil komplex linearen Fall konstruieren. Insbesondere erreichen wir damit auch eine rein darstellungstheoretische Beschreibung der Untergruppe

$$RO_0(\mathbf{G})/RO_h(\mathbf{G}) \cong jO(\mathbf{G}) = \text{Kern}(\text{Dim}_{\mathbf{G}}) \cap JO(\mathbf{G}) \subset V(\mathbf{G})$$

der Grothendieckgruppe $V(\mathbf{G})$ aller \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen.

Es folgt eine kurzer Überblick über den Aufbau dieser Arbeit:

Im ersten Kapitel stellen wir alle für diese Arbeit wichtigen Begriffe und Resultate über Homotopiedarstellungen zusammen. Wir zeigen, inwiefern sich die Gradfunktionen von \mathbf{G} -Abbildungen $X \rightarrow Y$ zwischen Homotopiedarstellungen mit Hilfe von Kongruenzen der Form (0.1) beschreiben lassen. Dieses Ergebnis wird in allen darauffolgenden Kapiteln benutzt.

Die anderen drei Kapitel können unabhängig voneinander gelesen werden: Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit der orthogonalen Gruppe $O(2)$ des \mathbb{R}^2 sowie mit topologisch zyklischen Gruppen; wir zeigen, daß für diese Beispiele von kompakten Lieschen Gruppen \mathbf{G} jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung stabil linear sein muß, d. h. $V(\mathbf{G}) = JO(\mathbf{G})$. Im Fall von $O(2)$ zeigen wir zusätzlich, daß die Dimensionsfunktion einer Homotopiedarstellung bereits eindeutig ihre Äquivalenzklasse bestimmt. Mit stabil komplex linearen Homotopiedarstellungen befassen wir uns im dritten Kapitel, mit stabil linearen Homotopiedarstellungen endlicher Gruppen in Kapitel 4. Das oben erwähnte Resultat für komplexe Darstellungssphären von p -Gruppen ungerader Ordnung beweisen wir im letzten Abschnitt des dritten Kapitels.

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen meinen Dank aussprechen, die in verschiedener Weise am Entstehen dieser Arbeit beteiligt waren:

Ich danke Herrn Prof. Dr. tom Dieck für die Betreuung der Arbeit und den Vorschlag des Themas aus diesem spannenden Gebiet, sowie für seine Geduld und nützlichen Anregungen. Meinen Kolleginnen und Kollegen danke ich für ihre Anteilnahme und Gesprächsbereitschaft; ganz besonders möchte ich mich bei Bernd Beyerstedt für die Hilfe und sein offenes Ohr bedanken. Dem SFB 170 und der S. Berliner-Stiftung bin ich dankbar für die Finanzierung meiner Arbeit.

Allen meinen Freunden, Freundinnen und Verwandten danke ich für ihre rückhaltlose Unterstützung und Freundschaft, besonders in den letzten Monaten des Entstehens dieser Arbeit. Ganz besonders herzlich möchte ich mich bei allen BabysitterInnen bedanken, insbesondere bei Markus, Marlies und Jutta, ohne deren liebevolle Hilfe die Arbeit sicherlich erst sehr viel später hätte beendet werden können.

Johannes: Danke, daß es Dich gibt und daß Du so ein unkompliziertes Kind bist. Markus, Dir möchte ich einfach für alles danken: ich verspreche, in Zukunft mehr Zeit zu haben.

Kapitel 1

Grundlagen

In dieser Arbeit sei \mathbf{G} stets eine kompakte Liesche Gruppe. Wir nennen zwei \mathbf{G} -Räume X und Y äquivalent und schreiben $X \simeq_{\mathbf{G}} Y$, wenn sie äquivariant homotopieäquivalent sind. Mit dem Begriff „Invariante von X “ sei stets eine Invariante des \mathbf{G} -Homotopietyps eines \mathbf{G} -Raumes X gemeint.

1.1 Homotopiedarstellungen

In dem Begriff der \mathbf{G} -Homotopiedarstellung haben T. tom Dieck und T. Petrie die wichtigsten homotopietheoretischen Eigenschaften von Einheitssphären endlichdimensionaler orthogonaler \mathbf{G} -Darstellungen zusammengefaßt: es handelt sich im wesentlichen um Homotopiesphären, auf denen die Gruppe \mathbf{G} so operiert, daß die Fixpunkt Mengen von Untergruppen (entsprechend den Einheitssphären von Untervektorräumen) wiederum Homotopiesphären sind. In der Arbeit [13] haben tom Dieck und Petrie Homotopiedarstellungen endlicher Gruppen \mathbf{G} eingeführt. In [17], II.10, sowie [16] finden sich Definition sowie einige wichtige Eigenschaften von Homotopiedarstellungen kompakter Liescher Gruppen. Eine gut lesbare Arbeit über die Grundlagen der Theorie der Homotopiedarstellungen endlicher Gruppen ist außerdem der Artikel [24] von E. Laitinen.

Wir werden in diesem Abschnitt die Definition von Homotopiedarstellungen sowie einige ihrer wichtigen Eigenschaften, die später immer wieder benötigt werden, zusammenstellen. Entsprechende Beweise finden sich zumeist in den oben zitierten Arbeiten. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wir auf, wie mögliche äquivariante Abbildungen zwischen Homotopiedarstellungen $X \rightarrow Y$ beschrieben werden können: es existieren bestimmte Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(X, Y) \in \mathbb{Z}$ ($\mathbf{H} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{G}$), die eine Beschreibung ermöglichen. Bei Kenntnis dieser Koeffizienten kann also theoretisch entschieden werden, ob eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $h : X \rightarrow Y$ existiert. Dies werden wir in den darauffolgenden Kapiteln benutzen, um für bestimmte Klassen von Homotopiedarstellungen, die sogenannten stabil linearen Homotopiedarstellungen, Invarianten des Äquivalenztyps zu definieren: in diesen Fällen können wir die Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$ nämlich explizit berechnen.

1.1.1 Definition und wichtigste Eigenschaften

Um befriedigend mit Homotopiedarstellungen arbeiten zu können, wird gefordert, daß sie den \mathbf{G} -Homotopietyp eines \mathbf{G} -CW-Komplexes haben. Ausführliche Beschreibungen von \mathbf{G} -CW-Komplexen und ihren Eigenschaften finden sich z. B. in den Büchern von Lück ([28], Chap. 1 und 2) oder tom Dieck ([17], II.1 und II.2).

Definition 1.1 *Eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung ist ein \mathbf{G} -Raum X' , der äquivariant homotopieäquivalent zu einem endlichdimensionalen \mathbf{G} -CW-Komplex X ist, welcher die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (i) *X hat endlichen Orbittyp, d. h. es gibt nur eine endliche Anzahl von Isomorphieklassen von Bahnen der Operation von \mathbf{G} auf X .*
- (ii) *Für jede Untergruppe \mathbf{H} von \mathbf{G} hat die Fixpunktmenge $X^{\mathbf{H}}$ den Homotopietyp einer Sphäre $S^{n(\mathbf{H})}$ (wobei im Fall von $X^{\mathbf{H}} = \emptyset$ $n(\mathbf{H}) = -1$ gesetzt werden soll).*
- (iii) *Für jede Untergruppe \mathbf{H} von \mathbf{G} hat $X^{\mathbf{H}}$ die topologische Dimension $n(\mathbf{H})$.*
- (iv) *Ist \mathbf{H} eine Isotropiegruppe von X und $\mathbf{L} \supsetneq \mathbf{H}$, so ist $n(\mathbf{L}) < n(\mathbf{H})$.*

X' heißt endlich, falls für X ein endlicher \mathbf{G} -CW-Komplex gewählt werden kann.

Eigenschaft (i) ist äquivalent dazu, daß es nur endlich viele Konjugationsklassen (\mathbf{H}) von Isotropiegruppen $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ der Operation von \mathbf{G} auf X gibt. Ist die Gruppe \mathbf{G} endlich, so folgt aus Eigenschaft (iv), daß die Menge $Iso(X)$ der Isotropiegruppen von X abgeschlossen unter Durchschnitten ist (Laitinen [24], Proposition 2.8). Ist \mathbf{G} kompakt, so gilt dies nicht. In [17], II.10, erklärt tom Dieck die Eigenschaft „ $Iso(X)$ ist abgeschlossen unter Durchschnitten“ zu einem weiteren Teil der Definition von Homotopiedarstellungen; da diese Bedingung aber auch von Einheitssphären orthogonaler \mathbf{G} -Darstellungen (wenn \mathbf{G} kompakt ist) nicht immer erfüllt ist, müssen wir in dieser Arbeit auf sie verzichten.

In früheren Ansätzen (siehe z. B. [13]) haben tom Dieck und Petrie die Definition von \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen außerdem ohne die Eigenschaft (iv) formuliert, u. a. da diese Eigenschaft stabil (genau wie die Abgeschlossenheit von $Iso(X)$ unter Durchschnitten) immer erzwingbar ist. Da wir jedoch auch instabile Ergebnisse erzielen wollen und dabei auf die äquivariante Form des Klassifikationstheorems von Hopf zurückgreifen, ist diese Eigenschaft für uns unverzichtbar.

Da wir uns im wesentlichen nur für die möglichen \mathbf{G} -Homotopietypen (und nicht für die tatsächliche Zellstruktur) von Homotopiedarstellungen interessieren, und um unter anderem die folgenden Aussagen (i) und (iii) zu ermöglichen, ist es notwendig, bei der Definition von Homotopiedarstellungen nur zu fordern, daß diese den \mathbf{G} -Homotopietyp eines \mathbf{G} -CW-Komplexes haben:

Bemerkung 1.2 *Es sei \mathbf{G} eine kompakte Liesche Gruppe, $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ eine abgeschlossene Untergruppe und X eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung.*

- (i) $\text{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}X$, d. h. X gesehen als \mathbf{H} -Raum, ist eine \mathbf{H} -Homotopiedarstellung.
- (ii) Ist $X^{\mathbf{H}}$ die \mathbf{H} -Fixpunktmenge von X und $W\mathbf{H} := N\mathbf{H}/\mathbf{H}$ die Weylgruppe von \mathbf{H} , d. h. der Quotient von \mathbf{H} in seinem Normalisator $N\mathbf{H}$, so ist $X^{\mathbf{H}}$ eine $W\mathbf{H}$ -Homotopiedarstellung.
- (iii) Der Join (Verbund) $X * Y$ zweier \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X und Y , d. h. der Quotient von $X \times [0, 1] \times Y$ nach der von $(x, 0, y) \sim (x, 0, y')$ und $(x, 1, y) \sim (x', 1, y)$ erzeugten Äquivalenzrelation, mit \mathbf{G} -Operation $g[(x, t, y)] = [(gx, t, gy)]$, ist wiederum eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung.

Beweis: In jedem der drei Fälle besteht die Schwierigkeit darin, zu sehen, daß die entsprechenden Räume wiederum die Struktur eines (endlichdimensionalen) äquivarianten CW-Komplexes von endlichem Orbittyp haben. Wir werden hier nur Beweisskizzen geben:

Ein Beweis, daß auch $\text{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}X$ den Homotopietyp eines (endlichdimensionalen, da X endlichdimensional ist) \mathbf{H} -CW-Komplexes X' hat, findet sich bei Waner ([38], Prop. 3.8). Benutzt man, daß die homogenen Räume \mathbf{G}/\mathbf{K} (für abgeschlossene Untergruppen \mathbf{K} von \mathbf{G}), da sie differenzierbare kompakte \mathbf{H} -Mannigfaltigkeiten sind, die Struktur eines *endlichen* \mathbf{H} -CW-Komplexes haben (Illman [23], Cor. 7.2), so sieht man anhand des von Waner gegebenen Beweises, daß, wenn X endlichem Orbittyp hat, auch der zu $\text{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}X$ äquivalente \mathbf{H} -CW-Komplex X' von endlichem Orbittyp gewählt werden kann. Es ist aber zu betonen, daß, wenn \mathbf{G}/\mathbf{H} nicht diskret ist, es auf $\text{Res}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}X$ keine *kanonische* Struktur eines \mathbf{H} -CW-Komplexes gibt. Ist \mathbf{G} diskret, so siehe [28], (1.7), oder [17], Prop. II.(1.16).

Die zweite Behauptung wird z. B. bei tom Dieck ([17], Prop. II.(1.14)) oder bei Lück ([28], (1.36)) bewiesen: $X^{\mathbf{H}}$ besitzt sogar eine kanonische $W\mathbf{H}$ -CW-Struktur, da $(\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}}$ jeweils eine kanonische $W\mathbf{H}$ -CW-Struktur hat; der $W\mathbf{H}$ -Raum $(\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}}$ ist nämlich die disjunkte Vereinigung endlich vieler Bahnen (Bredon [7], II.(5.7)).

Um zu sehen, daß der Join zweier \mathbf{G} -CW-Komplexe wiederum ein \mathbf{G} -CW-Komplex ist, benutzt man, daß, wenn A ein \mathbf{G} -CW-Komplex ist und B ein \mathbf{H} -CW-Komplex, $A \times B$ die kanonische Struktur eines $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ -Komplexes hat ([28], (1.27)). Außerdem ist mit A auch der Kegel CA über A ein \mathbf{G} -CW-Komplex ([28], (1.29)). Damit besitzt der Raum $CX \times Y \cup X \times CY$ eine kanonische $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ -CW-Struktur. Benutzt man nochmals [28], (1.29), sowie die (da X und Y lokal kompakte Hausdorff-Räume sind) äquivariante Homöomorphie $X * Y \cong_{\mathbf{G}} (CX \times Y) \cup_{X \times Y} (X \times CY)$, so sieht man, daß $X * Y$ in kanonischer Weise die Struktur eines endlichdimensionalen $(\mathbf{G} \times \mathbf{G})$ -CW-Komplexes endlichem Orbittyps besitzt. Nun folgt die Behauptung, wenn man Teil (i) der Bemerkung auf die (abgeschlossene) Untergruppe der diagonalen Elemente $\mathbf{G} = \{(g, g) | g \in \mathbf{G}\} \subset \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ anwendet. \square

Auf der Menge der Äquivalenzklassen (bzgl. äquivarianter Homotopie) von \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen liefert der Join eine assoziative und kommutative Halbgruppe $V^+(\mathbf{G})$.

Definition 1.3 $V(\mathbf{G})$ sei die zu $V^+(\mathbf{G})$ gehörige Grothendieckgruppe der \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen. Zwei Homotopiedarstellungen X und Y heißen stabil äquivalent, wenn $[X] - [Y] = 0 \in V(\mathbf{G})$, d. h. wenn es eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung Z gibt, s. d. $X * Z \simeq_{\mathbf{G}} Y * Z$.

Beispiele für \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen sind, wie bereits zu Anfang erwähnt, die Einheitsphären SV orthogonaler (endlichdimensionaler) \mathbf{G} -Darstellungen V : SV ist eine (kompakte) differenzierbare \mathbf{G} -Mannigfaltigkeit und hat somit, da \mathbf{G} kompakt ist, die Struktur eines endlichen \mathbf{G} -CW-Komplexes (Illman [23], Cor. 7.2). (Ist \mathbf{G} endlich, so kann man die \mathbf{G} -CW-Struktur von SV auch direkt angeben, siehe Lück [28], Example (1.8)). Eine Homotopiedarstellung X mit dem äquivarianten Homotopietyp einer solchen Darstellungssphäre SV heißt linear, sie heißt stabil linear, wenn es zwei orthogonale \mathbf{G} -Darstellungen V und W gibt, s. d. $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} SW$.

Wegen

$$SV * SU \simeq_{\mathbf{G}} S(V \oplus U)$$

bilden auch die Äquivalenzklassen von Darstellungssphären mit dem Join als Verknüpfung eine Halbgruppe, deren Grothendieckgruppe $JO(\mathbf{G})$ genannt wird. Ist $RO(\mathbf{G})$ der reelle Darstellungsring und

$$RO_h(\mathbf{G}) = \{V - W \in RO(\mathbf{G}) \mid \text{Es gibt ein } U: S(V \oplus U) \simeq_{\mathbf{G}} S(W \oplus U)\},$$

so ist

$$JO(\mathbf{G}) = RO(\mathbf{G})/RO_h(\mathbf{G}).$$

Der kanonische Gruppenhomomorphismus $JO(\mathbf{G}) \rightarrow V(\mathbf{G})$ ist injektiv (siehe Bemerkung 1.16), d. h. wir können $JO(\mathbf{G})$ als eine Untergruppe von $V(\mathbf{G})$ auffassen, die Untergruppe der stabil linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen. Eine Homotopiedarstellung X ist also insbesondere bereits dann stabil linear, wenn $[X] = [SV] - [SW] \in JO(\mathbf{G}) \subset V(\mathbf{G})$. Ist \mathbf{G} endlich, so existiert sogar für jede gegebene Homotopiedarstellung Y eine Homotopiedarstellung Z sowie eine (o. E. komplexe) Darstellungssphäre SV , s. d. $Y * Z \simeq_{\mathbf{G}} SV$ (tom Dieck–Petrie [13], Theorem 8.24).

Im allgemeinen ist weder eine stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung notwendig linear noch ist $JO(\mathbf{G}) = V(\mathbf{G})$, d. h. der Begriff der Homotopiedarstellung erweitert tatsächlich den der Darstellungssphäre:

Bemerkung 1.4

- (a) (Nagasaki [30]) \mathbf{G} sei eine endliche Gruppe. Genau dann sind alle \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen stabil linear, wenn $\mathbf{G} \cong \mathbb{Z}/m$ zyklisch ist oder $\mathbf{G} \cong D_{2^m}$ eine Diedergruppe der Ordnung 2^m .
- (b) (Nagasaki [32]) \mathbf{G} sei eine endliche Gruppe. Genau dann sind alle \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen linear, wenn $\mathbf{G} \cong \mathbb{Z}/p^m$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung ist oder $\mathbf{G} \cong D_{2^m}$.

(c) (tom Dieck [14]) Ist $\mathbf{G} \cong S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ der n -dimensionale Torus, so sind alle \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen stabil linear.

In Kapitel 2 werden wir zeigen, daß es für kompakte, nicht endliche Liesche Gruppen weitere Beispiele dieser Art gibt:

Satz 1.5 Sei $\mathbf{G} = O(2)$ die orthogonale Gruppe des \mathbb{R}^2 oder \mathbf{G} eine topologisch zyklische Gruppe, d. h. \mathbf{G} enthält eine zyklische dichte Untergruppe. Dann ist jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung stabil linear.

Es sei $\Psi(\mathbf{G})$ die Menge der abgeschlossenen Untergruppen von \mathbf{G} , versehen mit der Hausdorffschen Topologie (siehe [17], IV.3). Die Dimensionsfunktion

$$\begin{aligned} \text{Dim}_{\mathbf{G}} X : \quad \Psi(\mathbf{G}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \mathbf{H} &\longmapsto \text{Dim}_{\mathbf{G}} X(\mathbf{H}) := n(\mathbf{H}) + 1 \end{aligned}$$

(wenn $X^{\mathbf{H}} \simeq S^{n(\mathbf{H})}$) einer \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X (die konstant auf Konjugationsklassen ist), meist kurz $\text{Dim } X$ genannt, liefert eine erste Invariante von X . Da für die Fixpunkt mengen $(X * Y)^{\mathbf{H}} = X^{\mathbf{H}} * Y^{\mathbf{H}}$ gilt und der Join $S^n * S^m$ zweier Sphären stets homotopieäquivalent zu S^{n+m+1} ist, erfüllt die Dimensionsfunktion

$$\text{Dim}_{\mathbf{G}}(X * Y) = \text{Dim}_{\mathbf{G}} X + \text{Dim}_{\mathbf{G}} Y.$$

Daher erhalten wir sogar einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{Dim}_{\mathbf{G}} : V(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}); \mathbb{Z})$$

von $V(\mathbf{G})$ in die Gruppe der stetigen Funktionen $\Psi(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, wobei \mathbb{Z} hier mit der diskreten Topologie versehen sei (siehe [17], Prop. II.(3.3) und (3.4)).

Auch die Dimensionsfunktionen von Homotopiedarstellungen sind nicht notwendig linear oder stabil linear: Nach der Definition von Bauer [5] heiße eine kompakte Liesche Gruppe niltoral, wenn jede abgeschlossene Untergruppe $\mathbf{H} \subsetneq \mathbf{G}$ echte Untergruppe ihres Normalisators ist. Jede nilpotente Gruppe ist auch niltoral, aber die Umkehrung gilt nicht, da beispielsweise $O(2)$ niltoral aber nicht nilpotent ist. Für endliche Gruppen stimmen die beiden Begriffe jedoch überein.

Satz 1.6 Genau dann sind alle Dimensionsfunktionen von \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen stabil linear, d. h. für jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X gibt es zwei orthogonale \mathbf{G} -Darstellungen V und W mit $\text{Dim}_{\mathbf{G}} X = \text{Dim}_{\mathbf{G}} SV - \text{Dim}_{\mathbf{G}} SW$, wenn \mathbf{G} niltoral ist.

Beweis: tom Dieck und Petrie ([13], Prop. 10.23) für endliche Gruppen, Bauer [5] für kompakte Liesche Gruppen. □

Für die (stabile) Äquivalenz zweier Homotopiedarstellungen ist die Gleichheit der Dimensionsfunktionen zwar notwendig, aber im allgemeinen nicht hinreichend:

Bemerkung 1.7

(a) (Nagasaki [31]) Sei \mathbf{G} endlich. Genau dann ist der Kern der Dimensionsfunktion Null, d. h. zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion sind stabil äquivalent, wenn \mathbf{G} isomorph zu einer der folgenden Gruppen ist:

$$\mathbb{Z}/n \ (n = 1, 2, 3, 4, 6), \ D_{2n} \ (n = 2, 3, 4, 6), \ A_4, \ S_4.$$

Dabei sei A_4 bzw. S_4 die alternierende bzw. symmetrische Gruppe von n Elementen.

(b) (tom Dieck [14]) Sei $\mathbf{G} \cong S^1 \times \dots \times S^1$ ein Torus. Genau dann sind zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen äquivalent, wenn sie dieselbe Dimensionsfunktion haben.

Wir zeigen in Kapitel 2, daß die Aussage (b) auch auf $\mathbf{G} = O(2)$ zutrifft.

Es seien X und Y zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion. Die Frage, ob es eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$ gibt, ist äquivalent zu der Frage, ob eine \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ existiert, s. d. alle durch f induzierten Fixpunktabbildungen $f^{\mathbf{H}} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ für beliebige $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ Homotopieäquivalenzen sind ([17], II.(2.7)). Da $X^{\mathbf{H}}$ und $Y^{\mathbf{H}}$ Homotopiesphären derselben Dimension sind, kann man der Abbildung $f^{\mathbf{H}}$ bis auf das Vorzeichen einen Abbildungsgrad $\deg(f^{\mathbf{H}})$ zuordnen, der genau dann $= \pm 1$ ist, wenn $f^{\mathbf{H}}$ eine Homotopieäquivalenz ist. Um auch dieses Vorzeichen exakt definieren zu können, ist es nötig, Homotopiedarstellungen zu orientieren.

1.1.2 Orientierungen

Für unsere Zwecke ist es wichtig, alle \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen einer Dimensionsfunktion *gleichzeitig* zu orientieren.

Sei CA der Kegel über einem Raum A (also der aus einem Punkt bestehende Raum, falls $A = \emptyset$) und $H^n(\cdot)$ die singuläre Kohomologie mit ganzzahligen Koeffizienten. Für jede Untergruppe $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ ist dann $H^{\dim X(\mathbf{H})}(CX^{\mathbf{H}}, X^{\mathbf{H}}) \cong \mathbb{Z}$.

Ist $N\mathbf{H}$ der Normalisator von \mathbf{H} in \mathbf{G} , so operiert die Weylgruppe

$$W\mathbf{H} := N\mathbf{H}/\mathbf{H}$$

auf dem Raumpaar $(CX^{\mathbf{H}}, X^{\mathbf{H}})$, damit auch auf $H^{\dim X(\mathbf{H})}(CX^{\mathbf{H}}, X^{\mathbf{H}})$ und induziert somit einen Homomorphismus

$$e_{X,\mathbf{H}} : W\mathbf{H} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^* = \{1, -1\};$$

die Familie der $e_{X,\mathbf{H}}$ ($\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$) heißt das Orientierungsverhalten von X . Dieses hängt nur von der Dimensionsfunktion von X ab: Ist $w \in W\mathbf{H}$ und $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{H}$ das inverse Bild in $N\mathbf{H}$ von der von w erzeugten abgeschlossenen Untergruppe von $W\mathbf{H}$, so gilt

$$e_{X,\mathbf{H}}(w) = (-1)^{\dim X(\mathbf{H}) - \dim X(\mathbf{K})} \tag{1.1}$$

(Laitinen–Lück [25], Prop. 6.4). Für zwei punktierte Räume (A, a) und (B, b) sei $A \wedge B$ das Smashprodukt $A \wedge B = A \times B / (A \times \{b\} \cup \{a\} \times B)$. Wegen der Äquivalenz

$$C(X * Y) / X * Y \simeq_{\mathbf{G}} (CX \times CY) / (CX \times Y \cup X \times CY) = (CX/X) \wedge (CY/Y)$$

und der Künneth–Formel für das Kreuzprodukt

$$H^n(CX^{\mathbf{H}}, X^{\mathbf{H}}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^m(CY^{\mathbf{H}}, Y^{\mathbf{H}}) \xrightarrow{\cong} H^{n+m}((CX^{\mathbf{H}}, X^{\mathbf{H}}) \times (CY^{\mathbf{H}}, Y^{\mathbf{H}}))$$

(mit $n = \text{Dim}_{\mathbf{G}} X(\mathbf{H})$, $m = \text{Dim}_{\mathbf{G}} Y(\mathbf{H})$) ist $e_{X, \mathbf{H}} \cdot e_{Y, \mathbf{H}} = e_{X * Y, \mathbf{H}}$, wir erhalten einen Homomorphismus $e_{\mathbf{H}} : V(\mathbf{G}) \rightarrow \text{Hom}(W\mathbf{H}, \mathbb{Z}^*)$. Die Wahl von Erzeugern

$$z(X, \mathbf{H}) \in H^{\text{Dim } X(\mathbf{H})}(CX^{\mathbf{H}}, X^{\mathbf{H}})$$

für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ ist eine Orientierung von X . Damit jedoch z. B. sichergestellt ist, daß $z(X, \mathbf{H}) = z(X, \mathbf{K})$ falls $X^{\mathbf{H}} = X^{\mathbf{K}}$, und damit Gradfunktionen von \mathbf{G} –Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ zwischen Homotopiedarstellungen (der selben Dimensionsfunktion) konstant auf Konjugationsklassen sind, muß diese Wahl in geeigneter Weise getroffen werden. Dazu zunächst einige technische Bemerkungen, die auch später noch häufiger benötigt werden:

Es sei

$$\Phi(\mathbf{G}) := \{\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G}) \mid |W\mathbf{H}| < \infty\}. \quad (1.2)$$

Lemma 1.8 *Seien $\mathbf{H} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{G}$ kompakte Liegruppen. Ist $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$, so auch $\mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G})$.*

Beweis: (Siehe auch tom Dieck [17], S. 126.) Auf dem Raum $(\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}}$ operiert $W\mathbf{H}$ mittels

$$\begin{aligned} W\mathbf{H} \times (\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}} &\longrightarrow (\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}} \\ (\bar{x}, g\mathbf{K}) &\longmapsto xg\mathbf{K} \quad (x \in N\mathbf{H}), \end{aligned}$$

dabei treten nur endlich viele Bahnen auf ([7], Cor. II.(5.7)). Da jede Bahn höchstens $|W\mathbf{H}| < \infty$ Elemente hat, ist also auch $|(\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}}| < \infty$. Auf der anderen Seite haben wir die freie Operation von $W\mathbf{K}$ auf $(\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}} \times W\mathbf{K} &\longrightarrow (\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}} \\ (g\mathbf{K}, \bar{y}) &\longmapsto gy\mathbf{K} \quad (y \in N\mathbf{K}). \end{aligned}$$

$(\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}}$ enthält mindestens die Restklasse des Einselementes $\alpha := e\mathbf{K}$, dessen Bahn, da die Operation frei ist, genau $|W\mathbf{K}|$ Elemente enthält, also $|W\mathbf{K}| = |W\mathbf{K} \cdot \alpha| \leq |(\mathbf{G}/\mathbf{K})^{\mathbf{H}}| < \infty$. \square

Lemma 1.9 *Sei $\mathbf{L} \in \Phi(\mathbf{G})$. Dann enthält $\mathcal{F} := \{\mathbf{P} \supset \mathbf{L} \mid \mathbf{P} \in \text{Iso}(X)\}$ nur endlich viele Elemente.*

Beweis: Da X endlichen Orbittyp hat, ist die Anzahl der (\mathbf{P}) mit $\mathbf{P} \in \mathcal{F}$ kleiner unendlich. In jeder Konjugationsklasse (\mathbf{P}) eines $\mathbf{P} \in \mathcal{F}$ sind aber nur endlich viele $\mathbf{P}' \in \mathcal{F}$, denn für $\mathbf{P}' = a\mathbf{P}a^{-1}$ gilt:

$$\mathbf{L} \subset \mathbf{P}' \iff a^{-1}\mathbf{L}a \subset \mathbf{P} \iff a\mathbf{P} \in (\mathbf{G}/\mathbf{P})^{\mathbf{L}},$$

und $|(\mathbf{G}/\mathbf{P})^{\mathbf{L}}| < \infty$, wie bereits im Beweis zu Lemma 1.8 erläutert. \square

Es sei $D := \text{Dim } X = \text{Dim } Y$. Für jede Untergruppe $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ enthält die Menge $I(D, \mathbf{H}) := \{\mathbf{K} \subset \mathbf{G} \mid \mathbf{K} \supset \mathbf{H}, D(\mathbf{K}) = D(\mathbf{H})\}$ ein eindeutig bestimmtes maximales Element, genannt $\bar{\mathbf{H}} = m(D, \mathbf{H})$ ([17], II. Prop. (10.14)).

Lemma 1.10 *Sei $\mathbf{L} \in \Phi(\mathbf{G})$ und D die Dimensionsfunktion einer \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X . Dann ist $\bar{\mathbf{L}} = m(D, \mathbf{L}) \in \Phi(\mathbf{G})$ eine Isotropiegruppe von X .*

Beweis: Angenommen, diese Aussage ist falsch. Für $\mathbf{P} \not\supseteq \bar{\mathbf{L}}$ ist nach Definition $D(\mathbf{P}) < D(\bar{\mathbf{L}}) = D(\mathbf{L})$. Also ist, nach den Lemmata 1.8 und 1.9,

$$X^{\bar{\mathbf{L}}} = \bigcup_{\substack{\mathbf{P} \supset \bar{\mathbf{L}} \\ \mathbf{P} \in \text{Iso}(X)}} X^{\mathbf{P}}$$

eine endliche Vereinigung von topologischen Räumen kleinerer Dimension. Dies ist ein Widerspruch. \square

Die Menge

$$\text{Iso}(D) := \{\mathbf{H} \subset \mathbf{G} \mid \mathbf{H} = m(D, \mathbf{H}), D(\mathbf{H}) > 0\}$$

hängt nur von der Dimensionsfunktion D ab. Es folgt

Folgerung 1.11 *Ist D die Dimensionsfunktion der \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X , so gilt*

$$\Phi(\mathbf{G}) \cap \text{Iso}(X) = \Phi(\mathbf{G}) \cap \text{Iso}(D).$$

\square

Bei der Wahl der Orientierungen von \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D gehen wir nun folgendermaßen vor:

Aus jeder Konjugationsklasse (\mathbf{H}) eines $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ wählen wir jeweils eine Gruppe \mathbf{H}' fest aus, $\Psi_D(\mathbf{G}) \subset \Psi(\mathbf{G})$ sei die Menge dieser Repräsentantinnen. Dabei können wir $\Psi_D(\mathbf{G})$ o. E. so festlegen, daß mit \mathbf{H} auch stets $m(D, \mathbf{H})$ als Vertreterin ausgewählt wird. (Diese Konvention ist nicht notwendig, erleichtert aber unsere Berechnungen in Kapitel 4.) Für jedes weitere $\mathbf{K} \in (\mathbf{H})$ bestimmen wir ein $g_{\mathbf{K}} \in \mathbf{G}$ mit $\mathbf{K} = g_{\mathbf{K}}\mathbf{H}'g_{\mathbf{K}}^{-1}$. (Falls das Orientierungsverhalten der Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D trivial ist, so z. B. falls D nur geradzahlige Werte annimmt, so ist es egal, welches g gewählt wird.)

Ist $\overline{\mathbf{K}} = m(D, \mathbf{K})$, so gilt damit (wegen der Eindeutigkeit von $\overline{\mathbf{H}'} = m(D, \mathbf{H}')$) auch $\overline{\mathbf{K}} = g_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{H}'} g_{\mathbf{K}}^{-1}$. Es sei

$$\text{Konj}(\mathbf{G}, \Psi_D(\mathbf{G})) := (g_{\mathbf{K}})_{\mathbf{K} \in \Psi(\mathbf{G}) \setminus \Psi_D(\mathbf{G})}.$$

Eine Homotopiedarstellung X der Dimensionsfunktion D orientieren wir nun in folgender Weise:

1. Ist $\mathbf{H} \in \text{Iso}(D) \cap \Psi_D(\mathbf{G})$, so legen wir eine Orientierung von $X^{\mathbf{H}}$, d. h. einen Erzeuger $z(X, \mathbf{H}) \in H^{D(\mathbf{H})}(CX^{\mathbf{H}}, X^{\mathbf{H}})$, fest.
2. Für jedes weitere $\mathbf{K} \in \text{Iso}(D)$ mit $(\mathbf{K}) = (\mathbf{H})$ für eine Untergruppe $\mathbf{H} \in \Psi_D(\mathbf{G})$ wählen wir dann die Orientierung $z(X, \mathbf{K})$ so aus, daß, mit $g := g_{\mathbf{K}}$, für die durch die Operation von g auf X definierte Linkstranslation $l_{X,g} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow X^{\mathbf{K}}$ gilt:

$$(l_{X,g})^*(z(X, \mathbf{K})) = z(X, \mathbf{H}).$$

3. Für eine beliebige abgeschlossene Untergruppe $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ mit $D(\mathbf{H}) \neq 0$ sei die Orientierung $z(X, \mathbf{H})$ schließlich so gewählt, daß für die Inklusion $i : X^{\overline{\mathbf{H}}} \hookrightarrow X^{\mathbf{H}}$ die Gleichheit

$$i^*(z(X, \mathbf{H})) = z(X, \overline{\mathbf{H}})$$

gilt.

Letzteres ist möglich, da für je zwei $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}_2 \subset \mathbf{G}$ mit $D(\mathbf{H}_1) = D(\mathbf{H}_2)$ die Inklusion $X^{\mathbf{H}_2} \subset X^{\mathbf{H}_1}$ eine Homotopieäquivalenz ist ([24], Lemma 2.1, oder [17], Prop. II.(10.12)). Ist X nach obiger Methode orientiert, so gilt für beliebige $\mathbf{H} \in \Psi_D(\mathbf{G})$ und $\mathbf{K} = g_{\mathbf{K}} \mathbf{H} g_{\mathbf{K}}^{-1}$

$$(l_{X,g_{\mathbf{K}}})^*(z(X, \mathbf{K})) = e_{X,\overline{\mathbf{H}}}(g_{\mathbf{K}}^{-1} g_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{H}}) \cdot z(X, \mathbf{H}). \quad (1.3)$$

Für je zwei zueinander konjugierte Untergruppen \mathbf{H}_1 und $\mathbf{H}_2 = g \mathbf{H}_1 g^{-1}$ definiert die Gleichung $(l_{X,g})^*(z(\mathbf{H}_2, X)) = \epsilon(g, \mathbf{H}_1, X) \cdot z(\mathbf{H}_1, X)$ ein Vorzeichen $\epsilon(g, \mathbf{H}_1, X) \in \{\pm 1\}$.

Definition 1.12 *Zwei orientierte \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X_1 und X_2 derselben Dimensionsfunktion D heißen kohärent orientiert, wenn folgendes gilt:*

1. $\epsilon(g, \mathbf{H}, X_1) = \epsilon(g, \mathbf{H}, X_2)$ für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$, $g \in \mathbf{G}$.
2. Für alle $\mathbf{K} \subset \mathbf{H}$ mit $D(\mathbf{H}) = D(\mathbf{K}) \neq 0$ gilt für die Inklusion $i_{X_l} : X_l^{\mathbf{H}} \hookrightarrow X_l^{\mathbf{K}}$ stets $i_{X_l}^*(z(X_l, \mathbf{K})) = z(X_l, \mathbf{H})$ ($l = 1, 2$).

Da das Orientierungsverhalten $(e_{X,\mathbf{K}})$ einer Homotopiedarstellung X nur von ihrer Dimensionsfunktion abhängt ([25], Prop. 6.4), haben wir mit der obigen Methode also alle Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D kohärent orientiert. Wenn wir zusätzlich für die $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ mit $D(\mathbf{H}) = 0$ stets $\text{deg}(f^{\mathbf{H}}) = 1$ festlegen, so hat jede \mathbf{G} -Abbildung

$f : X \longrightarrow Y$ zwischen Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D durch die Gleichungen

$$(f^{\mathbf{H}})^*(z(\mathbf{H}, Y)) = \deg(f^{\mathbf{H}}) \cdot z(\mathbf{H}, X) \quad (1.4)$$

wohldefinierte Abbildungsgrade $\deg(f^{\mathbf{H}})$. Die Gradfunktion

$$\begin{aligned} d(f) : \Psi(\mathbf{G}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \mathbf{H} &\longmapsto \deg(f^{\mathbf{H}}) \end{aligned}$$

ist stetig, d. h. $d(f) \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ ([17], Prop. IV.(3.3) und (3.4)). Dank der kohärenten Orientierungen haben wir u. a. sichergestellt, daß $d(f)$ auf Konjugationsklassen konstant ist. Gradfunktionen $d = d(f)$ erfüllen also die folgenden, von D abhängigen Instabilitätsbedingungen $B(D)$:

- (i) $d(\mathbf{H}) = d(\mathbf{K})$ falls $(\mathbf{H}) = (\mathbf{K})$,
- (ii) $d(\mathbf{H}) = 1$ falls $D(\mathbf{H}) = 0$,
- (iii) $d(\mathbf{H}) \in \{1, 0, -1\}$ falls $D(\mathbf{H}) = 1$,
- (iv) $d(\mathbf{H}) = d(\mathbf{K})$ falls $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$ und $D(\mathbf{K}) = D(\mathbf{H})$.

1.1.3 Stabile Klassifizierung

Es sei $o(\mathbf{G})$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen $|W\mathbf{H}|$ der endlichen Weylgruppen der $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ und $\Phi'(\mathbf{G}) = \{(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})\}$. $o(\mathbf{G})$ ist endlich (tom Dieck [9] oder [17], Prop. IV.(6.15)). Zu je zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X, Y gleicher Dimensionsfunktion existiert eine \mathbf{G} -Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, deren sämtliche Abbildungsgrade $\deg(f^{\mathbf{H}})$ teilerfremd zu $o(\mathbf{G})$ sind; wir sagen, daß f eine invertierbare Gradfunktion hat ([17], Theorem II.(10.20)). Weiterhin existiert zu solch einem f stets eine \mathbf{G} -Abbildung $g : Y \longrightarrow X$, so daß $\deg(f^{\mathbf{H}}) \cdot \deg(g^{\mathbf{H}}) \equiv 1 \pmod{o(\mathbf{G})}$ für alle $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ ist ([17], Prop. II.(10.21)). Wir definieren

$$C(\mathbf{G}) := \mathcal{C}(\Phi'(\mathbf{G}), \mathbb{Z}), \quad (1.5)$$

d. h. $C(\mathbf{G})$ ist die (additive) Gruppe der stetigen Funktionen $\Phi'(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Die Restklasse von $d(f)$ in $\overline{C(\mathbf{G})} := C(\mathbf{G})/o(\mathbf{G})C(\mathbf{G})$ ist also ein Element aus $\overline{C(\mathbf{G})}^*$, der Gruppe der multiplikativen Einheiten in $\overline{C(\mathbf{G})}$.

Der Burnside-Ring $A(\mathbf{G})$ einer kompakten Lieschen Gruppe wird definiert auf der Menge der Äquivalenzklassen $[X]$ von endlichen \mathbf{G} -CW-Komplexen X , wobei $X \sim Y$ genau dann, wenn für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ die Fixpunkträume $X^{\mathbf{H}}$ und $Y^{\mathbf{H}}$ dieselbe Eulercharakteristik haben, $\chi(X^{\mathbf{H}}) = \chi(Y^{\mathbf{H}})$. Addition bzw. Multiplikation werden induziert durch disjunkte Vereinigung bzw. kartesisches Produkt von \mathbf{G} -Komplexen; $A(\mathbf{G})$ ist damit ein kommutativer Ring mit 1 (siehe beispielsweise [17], IV.2). Jeder endliche \mathbf{G} -CW-Komplex X induziert eine Abbildung $\varphi_X \in \mathcal{C}(\Phi'(\mathbf{G}), \mathbb{Z}) = C(\mathbf{G})$, $(\mathbf{H}) \mapsto \chi(X^{\mathbf{H}})$. Diese liefern wiederum einen wohldefinierten und injektiven Ringhomomorphismus $\varphi : A(\mathbf{G}) \longrightarrow C(\mathbf{G})$,

$[X] \mapsto \varphi_X$ ([17], Prop. IV.(4.6)). Der Burnside-Ring $A(\mathbf{G})$ kann also als Unterring von $C(\mathbf{G})$ aufgefaßt werden. Dieser Unterring $A(\mathbf{G}) \subset C(\mathbf{G})$ läßt sich mittels Kongruenzen beschreiben:

Satz 1.13 *Es sei $d' \in C(\mathbf{G})$ und ϕ die Eulersche ϕ -Funktion. Genau dann ist $d' \in A(\mathbf{G}) \subset C(\mathbf{G})$, wenn d' für alle $(\mathbf{H}) \in \Phi'(\mathbf{G})$ die Burnside-Ringkongruenzen*

$$\sum_{\substack{(\mathbf{K}): \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K}, \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} |N\mathbf{H}/N\mathbf{H} \cap N\mathbf{K}| \phi(|\mathbf{K}/\mathbf{H}|) \cdot d'(\mathbf{K}) \equiv 0 \pmod{|W\mathbf{H}|} \quad (1.6)$$

erfüllt, wobei über die $N\mathbf{H}$ -Konjugationsklassen der \mathbf{K} summiert wird. Ist d die durch d' induzierte stetige Abbildung $d : \Phi(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$, die konstant auf Konjugationsklassen ist, so ist dies äquivalent dazu, daß d für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ die Burnside-Ringkongruenzen

$$\sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K}, \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} \phi(|\mathbf{K}/\mathbf{H}|) \cdot d(\mathbf{K}) \equiv 0 \pmod{|W\mathbf{H}|} \quad (1.7)$$

erfüllt.

Beweis: tom Dieck [17], Theorem IV.(5.7). Für endliche Gruppen \mathbf{G} siehe auch Laitinen [24], §1. \square

Insbesondere ist also $o(\mathbf{G})C(\mathbf{G}) \subset A(\mathbf{G})$. Es seien $\overline{A(\mathbf{G})} := A(\mathbf{G})/o(\mathbf{G})C(\mathbf{G})$ und

$$Pic(\mathbf{G}) := \overline{C(\mathbf{G})}^* / C(\mathbf{G})^* \overline{A(\mathbf{G})}^* \quad (1.8)$$

(wobei R^* die Einheitengruppe eines Ringes R sei); die Namensgebung dieses Quotienten rührt daher, daß die so definierte multiplikative Gruppe $Pic(\mathbf{G})$ isomorph zur Picard-Gruppe des Burnside-Ringes $A(\mathbf{G})$ ist (tom Dieck [16], Kapitel 5).

Satz 1.14 *Ist X eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung und $f : X \rightarrow X$ eine \mathbf{G} -Abbildung, so ist die Gradfunktion $d(f) \in A(\mathbf{G})$.*

Beweis: tom Dieck [16], Hilfssatz (3.4); Laitinen-Lück [25], Prop. 6.5. \square

Es seien X, Y zwei Homotopiedarstellungen derselben Dimensionsfunktion und $f : X \rightarrow Y$ eine \mathbf{G} -Abbildung mit invertierbarer Gradfunktion. Benutzen wir Satz 1.14 sowie die oben erwähnte zu $d(f) \pmod{o(\mathbf{G})}$ in $\overline{C(\mathbf{G})}^*$ inverse Gradfunktion $d(g)$ einer \mathbf{G} -Abbildung $g : Y \rightarrow X$, so sehen wir, daß die Restklasse $[d(f)] \in Pic(\mathbf{G})$ nur von X und Y und nicht von der speziellen Wahl von f abhängt. Durch Quotientenbildung über $C(\mathbf{G})^*$ wird außerdem die Willkür bei der Wahl der Orientierungen von X und Y korrigiert. Wegen $d(f_1 * f_2) = d(f_1)d(f_2)$, und da die Gradabbildung einer \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz aus $C(\mathbf{G})^*$ ist, erhalten wir also einen Homomorphismus

$$\theta : \quad Kern(\text{Dim}_{\mathbf{G}}) \rightarrow Pic(\mathbf{G}).$$

Satz 1.15 θ ist ein Isomorphismus.

Beweis: tom Dieck [16], Kapitel 3 und 4. Ein Beweis der Injektivität von θ findet sich auch in [17], Theorem II.(10.27). \square

Für den Beweis der Injektivität von θ wird gezeigt, daß es für zwei Homotopiedarstellungen X, Y mit $[X] - [Y] \in \text{Kern } \theta \subset \text{Kern}(\text{Dim}_{\mathbf{G}})$ stets eine \mathbf{G} -Darstellung V mit $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} Y * SV$ gibt. Daraus folgt die bereits im ersten Abschnitt erwähnte

Bemerkung 1.16 Der kanonische Homomorphismus $JO(\mathbf{G}) \rightarrow V(\mathbf{G})$ ist injektiv. Gibt es für eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X zwei orthogonale \mathbf{G} -Darstellungen V und W , s. d. $[X] = [SV] - [SW] \in V(\mathbf{G})$, d. h. $[X] \in JO(\mathbf{G}) \subset V(\mathbf{G})$, so ist X stabil linear.

Weiterhin folgt aus Satz 1.15 bzw. aus dem dazugehörigen Beweis (siehe [17], II.(10.18) und (10.19))

Bemerkung 1.17 Existiert für zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X und Y gleicher Dimensionsfunktion eine \mathbf{G} -Abbildung $h : X \rightarrow Y$ mit $\deg(h^{\mathbf{H}}) = \pm 1$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$, so ist bereits für jedes $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ $\deg(h^{\mathbf{H}}) = \pm 1$, d. h. h ist eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz.

Mit Hilfe des Isomorphismus $\theta : \text{Kern}(\text{Dim}_{\mathbf{G}}) \rightarrow \text{Pic}(\mathbf{G})$ können somit \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen im Prinzip bereits bis auf stabile Äquivalenz klassifiziert werden: Haben X und Y dieselbe Dimensionsfunktion, so kann die Frage, ob sie stabil äquivalent sind, beantwortet werden, sobald man die Gradfunktion (bzw. deren Werte auf $\Phi(\mathbf{G})$) einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit invertierbaren Abbildungsgraden kennt. Man besitzt aber damit noch keine hinreichenden Invarianten, die \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen direkt zugeordnet werden könnten. Nicht beantwortet ist damit auch die Frage nach instabiler Äquivalenz von X und Y .

Für endliche Gruppen \mathbf{G} gibt es eine weitere Beschreibung von $\text{Kern}(\text{Dim}_{\mathbf{G}})$ von Lück ([28], Chapter 20), formuliert mit Hilfe von reduzierter äquivarianter Reidemeister-Torsion.

1.2 Gradfunktionen von äquivarianten Abbildungen zwischen Homotopiedarstellungen

Ziel der Kapitel 3 und 4 dieser Arbeit ist die Klassifikation der Äquivalenztypen stabil (komplex) linearer \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen mittels direkter Zuordnung von Invarianten. In diesem Abschnitt werden Vorbereitungen dazu getroffen:

Nach Bemerkung 1.17 reicht es zur Beantwortung der Frage, ob zwei Homotopiedarstellungen X und Y derselben Dimensionsfunktion äquivalent sind, aus, die Gradfunktionen $d(f)$ aller möglichen \mathbf{G} -Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ als Funktionen $d(f) \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ beschreiben zu können.

Einen Weg zur Beschreibung dieser Gradfunktionen anhand bestimmter Kongruenzen hat Laitinen in [24] aufgezeigt, sofern \mathbf{G} endlich ist und X und Y endliche Homotopiedarstellungen sind. Er benutzt dies weiter, um einige Folgerungen für die Klassifikation solcher Homotopiedarstellungen zu ziehen. Laitinens Ergebnis und der von ihm gegebene Beweis sind auch, mit leichten Modifikationen, auf die allgemeine Situation übertragbar. Seinen Ideen folgend zeigen wir zunächst, daß solche Gradfunktionen $d(f) \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ stets bestimmte Kongruenzen erfüllen:

Satz 1.18 *Es seien X und Y kohärent orientierte \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen der gleichen Dimensionsfunktion. Dann gibt es Zahlen $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \in \mathbb{Z}$ ($\mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K}$; $\mathbf{H}, \mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G})$), so daß die Abbildungsgrade jeder \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ die Kongruenz*

$$\deg(f^{\mathbf{H}}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K} : \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \deg(f^{\mathbf{K}}) \pmod{|W\mathbf{H}|} \quad (1.9)$$

erfüllen. Dabei können die Koeffizienten $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ so gewählt werden, daß $n_{g\mathbf{H}g^{-1}, g(n\mathbf{K}n^{-1})g^{-1}} = n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ für alle $g \in \mathbf{G}$, $n \in N\mathbf{H}$.

Beweis: Es sei ϕ die Eulersche ϕ -Funktion und $g : Y \rightarrow X$ eine fest gewählte \mathbf{G} -Abbildung mit invertierbarer Gradfunktion. Dann können wir für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ ganze Zahlen $d'(\mathbf{H})$ finden, so daß $\deg(g^{\mathbf{H}}) \cdot d'(\mathbf{H}) \equiv 1 \pmod{|W\mathbf{H}|}$.

Ist $f : X \rightarrow Y$ gegeben, so erfüllt die Gradfunktion $d(g \circ f) = d(g) \cdot d(f)$ von $g \circ f : X \rightarrow X$ nach Satz 1.14 die Burnsidekongruenzen (1.7)

$$\deg(g^{\mathbf{H}})\deg(f^{\mathbf{H}}) = d(g \circ f)(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K} : \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} \phi(|\mathbf{K}/\mathbf{H}|) \cdot \deg(g^{\mathbf{K}})\deg(f^{\mathbf{K}}) \pmod{|W\mathbf{H}|}$$

($\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$). Für die Abbildungsgrade von f gilt demnach

$$\begin{aligned} \deg(f^{\mathbf{H}}) &\equiv d'(\mathbf{H})\deg(g^{\mathbf{H}})\deg(f^{\mathbf{H}}) \\ &\equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K} : \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} \phi(|\mathbf{K}/\mathbf{H}|)d'(\mathbf{H})\deg(g^{\mathbf{K}}) \cdot \deg(f^{\mathbf{K}}) \pmod{|W\mathbf{H}|}; \end{aligned}$$

wir können also

$$n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} := \phi(|\mathbf{K}/\mathbf{H}|) \cdot d'(\mathbf{H}) \cdot \deg(g^{\mathbf{K}})$$

wählen, falls \mathbf{H} normal in \mathbf{K} ist, \mathbf{H} (und damit nach Lemma 1.8 auch \mathbf{K}) ein Element aus $\Phi(\mathbf{G})$ und \mathbf{K}/\mathbf{H} zyklisch aber nicht trivial ist. Sonst setzen wir einfach $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} = 0$. \square

Nun wollen wir Laitinens Aussage über hinreichende Bedingungen für die Existenz von \mathbf{G} -Abbildungen $X \rightarrow Y$ mit einer gegebenen Gradfunktion d ([24], Theorem 2) in der Verallgemeinerung für beliebige Homotopiedarstellungen X, Y einer kompakten Lieschen Gruppe \mathbf{G} formulieren. Für den dazugehörigen Beweis benötigen wir die äquivalente Form des Satzes von Hopf:

Dazu erinnern wir daran, daß das Orientierungsverhalten einer \mathbf{G} –Homotopiedarstellung nur von ihrer Dimensionsfunktion abhängt, d. h. wenn X und Y dieselbe Dimensionsfunktion D haben, sind die $W\mathbf{K}$ –Moduln $\tilde{H}^{D(\mathbf{K})-1}(X^{\mathbf{K}}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und $\tilde{H}^{D(\mathbf{K})-1}(Y^{\mathbf{K}}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ stets isomorph. Damit erfüllen je zwei \mathbf{G} –Homotopiedarstellungen der gleichen Dimensionsfunktion insbesondere die Voraussetzungen, die für die äquivariante Form des Klassifikationstheorems von Hopf benötigt werden. Mit \mathbf{G}_x bezeichnen wir die Isotropiegruppe von $x \in X$ und $X^{>\mathbf{H}} := \{x \in X \mid \mathbf{H} \subsetneq \mathbf{G}_x\} \subset X^{\mathbf{H}}$. Ist $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ eine Isotropiegruppe von X , so ist

$$X^{>\mathbf{H}} = \bigcup_{\substack{\mathbf{P} \supsetneq \mathbf{H} \\ \mathbf{P} \in \text{Iso}(X)}} X^{\mathbf{P}}$$

nach Lemma 1.9 eine endliche Vereinigung von Homotopiesphären kleinerer Dimensionen $D(\mathbf{P}) - 1 < D(\mathbf{H}) - 1$, für die topologischen Dimensionen gilt also $\dim X^{>\mathbf{H}} < \dim X^{\mathbf{H}}$. Die für uns wichtige Aussage des Satzes von Hopf können wir daher folgendermaßen formulieren:

Satz 1.19 (Satz von Hopf für Homotopiedarstellungen) *Es seien X und Y zwei kohärent orientierte \mathbf{G} –Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion D . Dann gilt*

- (i) *Es gibt \mathbf{G} –Abbildungen $X \rightarrow Y$.*
- (ii) *Es seien $f : X \rightarrow Y$ eine \mathbf{G} –Abbildung und $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G}) \cap \text{Iso}(X)$ so, daß $D(\mathbf{H}) \geq 2$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine \mathbf{G} –Abbildung $g : X \rightarrow Y$ mit $g|_{X^{>\mathbf{H}}} = f|_{X^{>\mathbf{H}}}$ und $\deg(g^{\mathbf{H}}) = \deg(f^{\mathbf{H}}) + k \cdot |W\mathbf{H}|$.*
- (iii) *Sei \mathbf{H} wie in (ii). Sind für zwei \mathbf{G} –Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ $f_0|_{X^{>\mathbf{H}}}$ und $f_1|_{X^{>\mathbf{H}}}$ als $W\mathbf{H}$ –Abbildungen homotop, so gilt*

$$\deg(f_0^{\mathbf{H}}) \equiv \deg(f_1^{\mathbf{H}}) \pmod{|W\mathbf{H}|}.$$

- (iv) *Gilt für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G}) \cap \text{Iso}(X)$ $D(\mathbf{H}) \geq D(\mathbf{L}) + 2$ für alle $\mathbf{L} \supsetneq \mathbf{H}$, dann sind zwei äquivariante Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ genau dann \mathbf{G} –homotop, wenn $\deg(f_0^{\mathbf{H}}) = \deg(f_1^{\mathbf{H}})$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G}) \cap \text{Iso}(X)$.*

Beweis: tom Dieck [17], Theorem II.(4.11). □

Weiterhin brauchen wir

Lemma 1.20 *Es seien X und Y zwei \mathbf{G} –Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D und $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ so, daß $D(\mathbf{H}) \geq 2$. Dann läßt sich jede $W\mathbf{H}$ –Abbildung $g : X^{>\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ zu einer $W\mathbf{H}$ –Abbildung $g' : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ erweitern.*

Beweis: Mit $n := D(\mathbf{H}) - 1 \geq 1$ ist $Y^{\mathbf{H}} \simeq S^n$ n -einfach und $(n - 1)$ -zusammenhängend, und $(X^{\mathbf{H}}, X^{>\mathbf{H}})$ ist ein relativer $W\mathbf{H}$ -CW-Komplex mit freier Operation auf $X^{\mathbf{H}} \setminus X^{>\mathbf{H}}$ einer Dimension $\leq n$. Die Behauptung folgt daher nach [17], Prop. II.(3.15). \square

Tieferer Grund für die Erweiterbarkeit eines jeden solchen g ist das Verschwinden sämtlicher Kohomologiegruppen $\mathcal{H}_{W\mathbf{H}}^m(X^{\mathbf{H}}, X^{>\mathbf{H}}; \pi_{m-1}(Y^{\mathbf{H}}))$ der äquivarianten Hindernistheorie, in denen die Hindernisse zur Existenz der Erweiterung g' liegen (siehe [17], II.3): Diese Kohomologiegruppen, die unter Verwendung des zellulären Kettenkomplexes $C_*(X^{\mathbf{H}}, X^{>\mathbf{H}})$

$$\dots \longrightarrow H_{m+1}(X_{m+1}^{\mathbf{H}}, X_m^{\mathbf{H}}) \xrightarrow{d_m} H_m(X_m^{\mathbf{H}}, X_{m-1}^{\mathbf{H}}) \xrightarrow{d_{m-1}} H_{m-1}(X_{m-1}^{\mathbf{H}}, X_{m-2}^{\mathbf{H}}) \longrightarrow \dots$$

definiert werden, sind nach Konstruktion Null für $m \geq D(\mathbf{H})$, da die zelluläre Dimension des relativen $W\mathbf{H}$ -CW-Komplexes $(X^{\mathbf{H}}, X^{>\mathbf{H}})$ kleiner gleich der topologischen Dimension von $X^{\mathbf{H}}$ ist, welche nach Definition $D(\mathbf{H}) - 1$ ist. Ist $m < D(\mathbf{H})$, so ist $\pi_{m-1}(Y^{\mathbf{H}}) = 0$.

Nun folgt der Satz über hinreichende Bedingungen für die Existenz von \mathbf{G} -Abbildungen $X \longrightarrow Y$ mit einer gegebenen Gradfunktion d .

Satz 1.21 *Es seien X und Y kohärent orientierte \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen der gleichen Dimensionsfunktion D und die Zahlen $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \in \mathbb{Z}$ ($\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$, $\mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K}$; mit $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} = n_{\mathbf{H}', \mathbf{K}'}$ falls $\mathbf{H}' = g\mathbf{H}g^{-1}$ und $\mathbf{K}' = gn\mathbf{K}(gn)^{-1}$ für $g \in \mathbf{G}$, $n \in N\mathbf{H}$) so gegeben, daß alle \mathbf{G} -Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ die Kongruenzen (1.9) aus Satz 1.18 erfüllen.*

Erfüllt dann $d \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ die Instabilitätsbedingungen $B(D)$

- (i) $d(\mathbf{H}) = d(\mathbf{K})$ falls $(\mathbf{H}) = (\mathbf{K})$,
- (ii) $d(\mathbf{H}) = 1$ falls $D(\mathbf{H}) = 0$,
- (iii) $d(\mathbf{H}) \in \{1, 0, -1\}$ falls $D(\mathbf{H}) = 1$,
- (iv) $d(\mathbf{H}) = d(\mathbf{K})$ falls $\mathbf{K} \subset \mathbf{H}$ und $D(\mathbf{K}) = D(\mathbf{H})$,

sowie die Kongruenzen

$$d(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} d(\mathbf{K}) \pmod{|N\mathbf{H}/\mathbf{H}|} \quad (1.10)$$

für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G}) \cap Iso(X)$, so gibt es eine \mathbf{G} -Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit Gradfunktion $d(f) = d$, d. h. $deg(f^{\mathbf{H}}) = d(\mathbf{H})$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$.

Beweis: Wir konstruieren die gesuchte \mathbf{G} -Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $d(\mathbf{H}) = deg(f^{\mathbf{H}})$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ per Induktion über die Orbitsypen.

Es sei $Iso'(X)$ die Menge der Konjugationsklassen der Isotropiegruppen von X . Da Homotopiedarstellungen per Definition endlichen Orbitsyp haben, können wir

$$Iso'(X) = \{ (\mathbf{H}_1), \dots, (\mathbf{H}_s) \}$$

schreiben und dabei die Indizes so wählen, daß für $(\mathbf{H}_i) > (\mathbf{H}_j)$ gilt $i < j$. Wir definieren die Teilmengen

$$X_r = \{ x \in X \mid (\mathbf{G}_x) = (\mathbf{H}_j) \text{ für ein } j \leq r \}$$

von X und konstruieren damit induktiv \mathbf{G} -Abbildungen $f_r : X_r \rightarrow Y$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ist } \mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G}) \text{ und } (\mathbf{K}) \not\supseteq (\mathbf{H}_{r+1}) \text{ oder } (\mathbf{K}) \geq (\mathbf{H}_i) \text{ für ein } i \leq r \\ \implies \deg(f_r^{\mathbf{K}}) = d(\mathbf{K}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Für solche \mathbf{K} ist nach Konstruktion $X_r^{\mathbf{K}} = X^{\mathbf{K}}$, und wegen $X_s = X$ sind wir nach s Schritten fertig: Ist $\mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G})$ beliebig, so ist nach Lemma 1.10 $\bar{\mathbf{K}} = m(D, \mathbf{K})$, das eindeutig bestimmte maximale Element von $\{\mathbf{L} \subseteq \mathbf{G} \mid \mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}, D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{K})\}$, eine Isotropiegruppe von X und $\in \Phi(\mathbf{G})$, und daher ist auch $\deg(f_s^{\mathbf{K}}) = \deg(f_s^{\bar{\mathbf{K}}}) = d(\bar{\mathbf{K}}) = d(\mathbf{K})$.

Wir beginnen zunächst mit $X_0 := \emptyset$, wobei für f_0 dann nichts zu tun ist. Sei nun f_r bereits gegeben und $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{r+1}$ abgekürzt. Die \mathbf{G} -Erweiterungen $f_{r+1} : X_{r+1} \rightarrow Y$ von f_r entsprechen genau den $W\mathbf{H}$ -Erweiterungen $f'_{r+1} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ von $f'_r := f_r|_{X^{\mathbf{H}}}$ (siehe [17], Satz I.(7.4)).

Falls $D(\mathbf{H}) = 1$, d. h. $X^{\mathbf{H}} = S^0$, $Y^{\mathbf{H}} = S^0$, so ist $X^{>\mathbf{H}} = \emptyset$ und wir können die $W\mathbf{H}$ -Abbildung $f'_{r+1} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ (da X und Y gleiches Orientierungsverhalten haben) problemlos so festlegen, daß $\deg((f'_{r+1})^{\mathbf{H}}) = d(\mathbf{H}) \in \{-1, 0, 1\}$ (und damit auch $\deg(f_{r+1}^{\mathbf{H}}) = d(\mathbf{H})$ für die dazugehörige \mathbf{G} -Abbildung $f_{r+1} : X_{r+1} \rightarrow Y$) erfüllt ist.

Sei nun $D(\mathbf{H}) \geq 2$. Dann existiert nach Lemma 1.20 eine $W\mathbf{H}$ -Erweiterung $f'_{r+1} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ von f'_r . Wendet man dieses Argument $(s - r)$ -mal an, so erhalten wir

Lemma 1.22 *Jede \mathbf{G} -Abbildung $f_r : X_r \rightarrow Y$ läßt sich zu einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ erweitern.* \square

Wir betrachten ein solches f mit $f^{\mathbf{H}} = f'_{r+1}$ und $f|_{X_r} = f_r$:

- (a) Angenommen $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$. Dann gilt für die Abbildungsgrade von f nach Induktionsvoraussetzung für alle $\mathbf{K} \not\supseteq \mathbf{H} = \mathbf{H}_{r+1}$ (da dann nach Lemma 1.8 auch $\mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G})$) $\deg(f^{\mathbf{K}}) = \deg(f_r^{\mathbf{K}}) = d(\mathbf{K})$, also

$$\begin{aligned} \deg(f^{\mathbf{H}}) &\equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} < \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \deg(f^{\mathbf{K}}) \pmod{|W\mathbf{H}|} \\ &\equiv - \sum n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} d(\mathbf{K}) \pmod{|W\mathbf{H}|} \\ &\equiv d(\mathbf{H}) \pmod{|W\mathbf{H}|}. \end{aligned}$$

Da wir $D(\mathbf{H}) \geq 2$ angenommen hatten und da $\mathbf{H} \in Iso(X) \cap \Phi(\mathbf{G})$, können wir, nach dem Satz von Hopf 1.19 (ii), f wie gewünscht abändern: wir können eine $W\mathbf{H}$ -Abbildung $f''_{r+1} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ mit $f''_{r+1}|_{X^{>\mathbf{H}}} = f'_{r+1}|_{X^{>\mathbf{H}}}$ finden, die $d((f''_{r+1})^{\mathbf{H}}) = d(\mathbf{H})$ erfüllt und definieren dann $f_{r+1} : X_{r+1} \rightarrow Y$ als die entsprechende \mathbf{G} -Abbildung mit $f_{r+1}|_{X_r} = f_r$ und $f_{r+1}|_{X^{\mathbf{H}}} = f''_{r+1}$.

- (b) Angenommen $\mathbf{H} \notin \Phi(\mathbf{G})$. Dann nehmen wir eine beliebige \mathbf{G} -Erweiterung $f_{r+1} : X_{r+1} \rightarrow Y$ von $f_r : X_r \rightarrow Y$ (siehe Lemma 1.22).

Wir haben nun für $f_{r+1} : X_{r+1} \longrightarrow Y$ die Bedingung (1.11) zu prüfen, sei also ein entsprechendes $\mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G})$ gegeben:

Gilt bereits $(\mathbf{K}) \not\geq (\mathbf{H}_{r+1})$ oder $(\mathbf{K}) \geq (\mathbf{H}_i)$ für ein $i \leq r$, so ist $X_{r+1}^{\mathbf{K}} = X^{\mathbf{K}} = X_r^{\mathbf{K}}$ und damit nach Induktionsvoraussetzung $\deg(f_{r+1}^{\mathbf{K}}) = \deg(f_r^{\mathbf{K}}) = d(\mathbf{K})$. Die Möglichkeit $(\mathbf{K}) = (\mathbf{H}_{r+1}) = (\mathbf{H})$ scheidet für $D(\mathbf{H}) > 1$ im Fall (b) aus, da dort $\mathbf{H} \notin \Phi(\mathbf{G})$ vorausgesetzt war; im Fall (a) und falls $D(\mathbf{H}) = 1$ ist nach Konstruktion $\deg(f_{r+1}^{\mathbf{K}}) = \deg(f_{r+1}^{\mathbf{H}}) = d(\mathbf{H}) = d(\mathbf{K})$.

Es bleibt also der Fall $(\mathbf{K}) \geq (\mathbf{H}_{r+2})$ zu untersuchen. Sei $\overline{\mathbf{K}} = m(D, \mathbf{K}) \supseteq \mathbf{K}$. Da $\mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G})$, so ist nach Lemma 1.10 $(\overline{\mathbf{K}}) = (\mathbf{H}_i) \in Iso'(X)$ mit einem $i < r+2$. Ist $i = r+1$, so ist nach Konstruktion $\deg(f_{r+1}^{\overline{\mathbf{K}}}) = d(\overline{\mathbf{K}})$, ist $i \leq r$, so ist $\deg(f_{r+1}^{\overline{\mathbf{K}}}) = \deg(f_r^{\overline{\mathbf{K}}}) = d(\overline{\mathbf{K}})$. Daher haben wir $\deg(f_{r+1}^{\mathbf{K}}) = \deg(f_{r+1}^{\overline{\mathbf{K}}}) = d(\overline{\mathbf{K}}) = d(\mathbf{K})$, d. h. $f_{r+1}^{\mathbf{K}}$ hat den gewünschten Abbildungsgrad. \square

Sind die Zahlen $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ explizit bekannt, so kann also geprüft werden, ob eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $f : X \longrightarrow Y$ mit $\deg(f^{\mathbf{H}}) = \pm 1$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ möglich ist. Bei Laitinens (und unserer bisherigen) Vorgehensweise werden die Koeffizienten $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ allerdings nicht konkret berechnet, da sie anhand der (invertierbaren) Gradfunktion einer \mathbf{G} -Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ konstruiert wurden, von der wir im allgemeinen nicht mehr wissen, als daß sie existiert. Es bleiben also zunächst auch weiterhin alle Informationen über X und Y in den Zahlen $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} = n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}(X, Y)$ versteckt.

Eine Folgerung Laitinens aus den Sätzen 1.18 und 1.21 läßt sich ebenfalls verallgemeinern: Es seien

$$\overline{C_D(\mathbf{G})}^* \subset \overline{C(\mathbf{G})}^*, \quad \overline{A_D(\mathbf{G})}^* \subset \overline{A(\mathbf{G})}^* \quad \text{und} \quad C_D(\mathbf{G})^* \subset C(\mathbf{G})^*$$

jeweils die entsprechenden Untergruppen der (Restklassen von) Funktionen, die die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ einer gegebenen Dimensionsfunktion D zweier Homotopiedarstellungen X und Y erfüllen. Genau dann sind X und Y äquivalent, wenn die Restklasse

$$\theta_D([X] - [Y]) := [d(f)] \in Pic_D(\mathbf{G}) := \overline{C_D(\mathbf{G})}^* / C_D(\mathbf{G})^* \overline{A_D(\mathbf{G})}^*$$

einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit invertierbarer Gradfunktion als Element der „instabilen“ Gruppe $Pic_D(\mathbf{G})$ verschwindet, d. h. $[d(f)] = 1 \in Pic_D(\mathbf{G})$.

Eine weitere von Laitinens Schlußfolgerungen ist hingegen nicht mehr möglich, wenn die Gruppe \mathbf{G} nicht endlich ist: Ist \mathbf{G} endlich, so sind zwei Homotopiedarstellungen X und Y bereits dann orientiert äquivalent, wenn sie stabil orientiert äquivalent sind ([24], Theorem 4). Diese Schlußfolgerung kann man, wenn $\Phi(\mathbf{G}) \neq \Psi(\mathbf{G})$, aus Satz 1.21 nicht ziehen, da wir nur Auskunft über die Gradfunktionen $d(f) \in C(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ erhalten: auch wenn $d(f) \equiv 1 : \Phi(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ konstant ist, muß f keine orientierte \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz sein.

Kapitel 2

Zwei Beispiele

In diesem Kapitel wollen wir für weitere Beispiele kompakter Liescher Gruppen \mathbf{G} , und zwar für die orthogonale Gruppe $O(2)$ des \mathbb{R}^2 sowie für topologisch zyklische Gruppen, zeigen, daß jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung stabil linear sein muß. Im Fall von $O(2)$ zeigen wir zusätzlich, daß die Dimensionsfunktion einer Homotopiedarstellung bereits eindeutig ihre Äquivalenzklasse bestimmt; dabei benutzen wir Ergebnisse aus Abschnitt 1.2.

2.1 Die orthogonale Gruppe $O(2)$

Satz 2.1 *Ist \mathbf{G} eine kompakte Liesche Gruppe mit $o(\mathbf{G}) = \text{kgV}\{|\mathbf{WH}| \mid \mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})\} = 1$ oder $= 2$, so hängt der äquivariante Homotopietyp einer \mathbf{G} -Homotopiedarstellung nur von ihrer Dimensionsfunktion ab; insbesondere ist $\text{Kern}(\text{Dim}_{\mathbf{G}}) = \text{Pic}(\mathbf{G}) = 0$. Ist \mathbf{G} zusätzlich niltoral, so ist jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung stabil linear, d. h. $V(\mathbf{G}) = \text{JO}(\mathbf{G})$.*

Beweis: Es seien X und Y zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen derselben Dimensionsfunktion D . Ist $o(\mathbf{G}) = 1$, so folgt aus Satz 1.21, daß jede Funktion $d \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$, die die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ erfüllt, als Gradfunktion einer \mathbf{G} -Abbildung $X \rightarrow Y$ realisierbar ist, insbesondere also auch die konstante Funktion $d \equiv 1$.

Ist $o(\mathbf{G}) = 2$, so muß d noch zusätzlich für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ bestimmte Kongruenzen (1.9)

$$\text{deg}(f^{\mathbf{H}}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} < \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \text{deg}(f^{\mathbf{K}}) \pmod{|\mathbf{WH}|}$$

erfüllen. Ist $|\mathbf{WH}| = 2$, so gilt für eine \mathbf{G} -Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit invertierbarer Gradfunktion $\text{deg}(g^{\mathbf{H}}) \equiv 1 \pmod{2}$; mit der Konstruktion aus Satz 1.18 kann für $\mathbf{K} = \mathbf{NH}$ also $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} = 1$ gewählt werden. Die konstante Funktion $d \equiv 1 : \Phi(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$ erfüllt also auch in diesem Fall die Voraussetzungen, um Gradfunktion einer \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz zu sein; X und Y sind äquivalent.

Ist \mathbf{G} zusätzlich niltoral, so hat jede Homotopiedarstellung eine stabil lineare Dimensionsfunktion (siehe Satz 1.6) und ist damit selbst bereits stabil linear. \square

Folgerung 2.2 *Es sei $\mathbf{G} = O(2)$ die orthogonale Gruppe des \mathbb{R}^2 oder $\mathbf{G} = S^1 \times \dots \times S^1$ ein Torus. Dann sind je zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion äquivalent. Außerdem ist jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung stabil linear, d. h.*

$$V(\mathbf{G}) = JO(\mathbf{G}).$$

Beweis: Die orthogonale Gruppe des \mathbb{R}^2 wird von einer Spiegelung t (an einer festen Achse) sowie den Drehungen $e(\alpha) \in SO(2)$ um den Winkel α erzeugt: Jedes Element $\in O(2)$ hat die Form $e(\alpha)$ oder $e(\alpha)t$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, wobei $t^2 = 1$, $e(\alpha)e(\beta) = e(\alpha+\beta)$ und $te(\alpha)t^{-1} = e(-\alpha) = e(\alpha)^{-1}$. Die abgeschlossenen Untergruppen \mathbf{H} von $O(2)$ außer $O(2)$ und der trivialen Untergruppe sind dann die folgenden:

1. Eine von einer Drehung endlicher Ordnung erzeugte Untergruppe $\langle e(\frac{2\pi}{n}) \rangle \cong \mathbb{Z}/n$ ist für alle n normal in $O(2)$ und damit kein Element von $\Phi(O(2))$.
2. $SO(2)$ ist normal in $O(2)$ mit entsprechender Weylgruppe $O(2)/SO(2) \cong \mathbb{Z}/2$.
3. Die von einer Spiegelung $e(\alpha)t$ erzeugte Untergruppe $\mathbf{H}_\alpha \cong \mathbb{Z}/2$ (wobei alle Untergruppen dieser Form wegen $e(\alpha)t = e(\frac{\alpha}{2})te(\frac{\alpha}{2})^{-1}$ konjugiert zueinander sind) hat den Normalisator $N\mathbf{H}_\alpha = \langle e(\pi), e(\alpha)t \rangle$, d. h. $W\mathbf{H}_\alpha \cong \mathbb{Z}/2$.
4. $\mathbf{H}_{\alpha,n} = \langle e(\alpha)t, e(\frac{2\pi}{n}) \rangle$ ist isomorph zur Diedergruppe D_{2n} der Ordnung $2n$ (und bei festem n sind alle diese Untergruppen mit beliebigem α konjugiert zueinander). Der Normalisator ist in diesem Fall $N\mathbf{H}_{\alpha,n} = \langle e(\alpha)t, e(\frac{2\pi}{2n}) \rangle = \mathbf{H}_{\alpha,2n}$, d. h. auch hier ist $W\mathbf{H}_{\alpha,n} \cong \mathbb{Z}/2$.

Also ist $o(O(2)) = kgV\{|W\mathbf{H}| \mid \mathbf{H} \in \Phi(O(2))\} = 2$, außerdem ist $O(2)$ niltoral; die Voraussetzungen aus Satz 2.1 sind also erfüllt.

Da ein Torus $\mathbf{G} \cong S^1 \times \dots \times S^1$ abelsch und deshalb insbesondere niltoral ist und $\Phi(\mathbf{G}) = \{\mathbf{G}\}$, gilt auch die Aussage über den Torus. Diese wurde allerdings umgekehrt zum Beweis von der hier wesentlich einfließenden Bemerkung 1.17 verwendet und ist somit kein neues Ergebnis (siehe bereits tom Dieck [14]). \square

2.2 Topologisch zyklische Gruppen

(In diesem Abschnitt verwenden wir für die zyklische Gruppe der Ordnung m ausnahmsweise die Bezeichnung $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.)

Satz 2.3 *\mathbf{G} sei eine topologisch zyklische kompakte Liegruppe, also $\mathbf{G} \cong \mathbf{T} \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ mit einem Torus $\mathbf{T} = S^1 \times \dots \times S^1$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann ist jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung stabil linear bzw.*

$$V(\mathbf{G}) = JO(\mathbf{G}).$$

Beweis: Wir wollen für jede \mathbf{G} –Homotopiedarstellung X zwei reelle \mathbf{G} –Moduln V und W konstruieren, s. d. $X * SV$ und SW \mathbf{G} –homotopieäquivalent sind. Dazu reicht es, daß eine \mathbf{G} –Abbildung

$$h : X * SV \longrightarrow SW$$

mit Abbildungsgraden $\deg(h^{\mathbf{H}}) = \pm 1$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ existiert (siehe Bemerkung 1.17).

Da \mathbf{G} abelsch und also insbesondere niltoral ist, hat X eine stabil lineare Dimensionsfunktion (siehe Satz 1.6), d. h. wir können \mathbf{G} –Darstellungen V_0 und W_0 mit

$$\text{Dim}_{\mathbf{G}}(X * SV_0) = \text{Dim}_{\mathbf{G}}(SW_0) =: D_0$$

finden. Dabei seien ohne Einschränkung V_0 und W_0 groß genug, so daß $D_0(\mathbf{G}) \geq 2$ und

$$\text{Iso} := \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_s\},$$

die Menge der paarweise verschiedenen Isotropiegruppen von $X * SV_0$, abgeschlossen unter Durchschnitten ist: Zunächst gibt es Darstellungen V' und W' , s. d. $\text{Dim}_{\mathbf{G}}(X * SV') = \text{Dim}_{\mathbf{G}}(SW')$ und $\text{Dim}_{\mathbf{G}}(SW')(\mathbf{G}) \geq 2$. Da \mathbf{G} abelsch ist, ist die Voraussetzung, daß die Homotopiedarstellung $X * SV'$ endlichen Orbittyp hat, äquivalent dazu, daß sie nur endlich viele Isotropiegruppen besitzt. Deshalb können wir eine Darstellung V finden, so daß $\text{Iso}(X * SV') \subset \text{Iso}(SV)$ (Bredon [7], Theorem 5.2). Ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der $\mathbf{K} \in \text{Iso}(SV)$, so erfüllen $V_0 := V' \oplus nV$ und $W_0 := W' \oplus nV$ die gewünschten Bedingungen.

Iso sei so geordnet, daß aus $\mathbf{H}_i > \mathbf{H}_j$ folgt, daß $i < j$. Weiterhin sei für jede \mathbf{G} –Homotopiedarstellung Y mit $\text{Iso}(Y) = \text{Iso}$

$$Y(r) := \{x \in Y \mid \mathbf{G}_x = \mathbf{H}_i \text{ für ein } i \leq r\}.$$

(Wir erinnern daran, daß $Y(r)^{\mathbf{H}_i} = Y^{\mathbf{H}_i}$ falls $i \leq r$.) $X * SV_0$ und SW_0 seien kohärent orientiert (also z. B. nach der Methode von Abschnitt 1.1.2). Wir konstruieren nun induktiv (orientierte) \mathbf{G} –Darstellungen V_r , W_r und \mathbf{G} –Abbildungen

$$f_r : X_r := X * SV_r \longrightarrow SW_r$$

mit den Eigenschaften

- (i) $\text{Dim}_{\mathbf{G}}X_r = \text{Dim}_{\mathbf{G}}SW_r =: D_r$ erfüllt $D_r(\mathbf{G}) \geq 2$,
- (ii) $\text{Iso}(X_r) = \text{Iso} = \{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_s\}$,
- (iii) $X_r(r-1) = X_{r-1}(r-1)$ und $f_r|X_r(r-1) = f_{r-1}|X_{r-1}(r-1)$,
- (iv) $\deg(f_r^{\mathbf{H}_i}) = 1$ für alle $i \leq r$ mit $\mathbf{H}_i \in \Phi(\mathbf{G})$.

$h := f_s$ ist dann die von uns gesuchte \mathbf{G} –Homotopieäquivalenz, denn für jede abgeschlossene Untergruppe $\mathbf{L} \in \Phi(\mathbf{G})$ ist $m(D_s, \mathbf{L}) = \mathbf{H}_i$ mit einer Isotropiegruppe $\mathbf{H}_i \in \Phi(\mathbf{G})$ von X_s (siehe Lemma 1.10) und damit $\deg(f_s^{\mathbf{L}}) = \deg(f_s^{\mathbf{H}_i}) = 1$.

Wir beginnen mit einer Abbildung $f_0 : X * SV_0 \longrightarrow SW_0$ mit invertierbarer Gradfunktion, d. h. $ggT(deg(f_0^{\mathbf{H}}), o(\mathbf{G})) = 1$ für alle $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$, wobei hier $o(\mathbf{G}) := kgV\{|\mathbf{WH}| \mid \mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})\} = m$.

Sei nun f_r bereits konstruiert und $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{r+1}$ abgekürzt. Falls $\mathbf{H} \notin \Phi(\mathbf{G})$, so setzen wir einfach $X_{r+1} := X_r$, $W_{r+1} := W_r$ und $f_{r+1} := f_r$. Nehmen wir also an, daß $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$.

Wir wollen zunächst zeigen, daß $deg(f_r^{\mathbf{H}})$ stets teilerfremd zu $|\mathbf{WH}|$ ist: Für f_0 ist dies nach Konstruktion so; es sei also $r \geq 1$ und p ein Primteiler von $|\mathbf{WH}|$. Dann gibt es eine Untergruppe $\mathbf{L} \subset \mathbf{G}$ mit $\mathbf{H} \subset \mathbf{L} \subset N\mathbf{H}$ s. d. $\mathbf{L}/\mathbf{H} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (Satz von Cauchy). \mathbb{F}_p sei der Körper mit p Elementen. Aus der P. A. Smith–Theorie folgt insbesondere

Satz 2.4 *Es seien S_1 und S_2 zwei \mathbb{F}_p –Kohomologie– n –Sphären, auf denen $\mathbf{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ so operiert, daß $S_1^{\mathbf{G}}$ und $S_2^{\mathbf{G}}$ jeweils \mathbb{F}_p –Kohomologie– m –Sphären sind. Ist $\phi : S_1 \longrightarrow S_2$ eine beliebige \mathbf{G} –Abbildung, so gilt für die Abbildungsgrade*

$$S_1^{\mathbf{G}} = \emptyset = S_2^{\mathbf{G}} \text{ oder } deg(\phi^{\mathbf{G}}) \neq 0 \in \mathbb{F}_p \iff deg(\phi) \neq 0 \in \mathbb{F}_p.$$

(Ein Beweis findet sich z. B. in [17], III.(4.29).) In unserem Fall ist also genau dann $deg(f_r^{\mathbf{H}}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, wenn $deg(f_r^{\mathbf{L}}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Wegen $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ ist auch $\mathbf{L} \in \Phi(\mathbf{G})$ (Lemma 1.8), und damit ist $m(D_r, \mathbf{L})$ eine Isotropiegruppe von X_r (Lemma 1.10): $\mathbf{H} \subsetneq \mathbf{L} \subset m(D_r, \mathbf{L}) = \mathbf{H}_i$, wobei $i \leq r$ und $\mathbf{H}_i \in \Phi(\mathbf{G})$. Also ist nach Induktionsvoraussetzung $deg(f_r^{\mathbf{L}}) = deg(f_r^{\mathbf{H}_i}) = 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Da dies für alle Primteiler p von $|\mathbf{WH}|$ gilt, ist folglich $ggT(deg(f_r^{\mathbf{H}}), |\mathbf{WH}|) = 1$.

Wir können daher stets ein $q \in \mathbb{N}$ mit $ggT(q, m) = 1$ so wählen, daß

$$q \cdot deg(f_r^{\mathbf{H}}) \equiv 1 \pmod{|\mathbf{WH}|}.$$

Wegen $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ muß $\mathbf{T} \subset \mathbf{H}$ sein, d. h. \mathbf{H} ist von der Form

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} \times (h\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

für einen Teiler h von m .

Wir betrachten nun die unitären Darstellungen von \mathbf{G} : Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ und $V(j)$ die eindimensionale komplexe irreduzible \mathbf{G} –Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times V(j) &\longrightarrow V(j) \\ ((t, l \bmod m), v) &\longmapsto (\xi^j)^l \cdot v \quad (t \in \mathbf{T}, l \in \mathbb{Z}, \xi = e^{2\pi i/m} \in \mathbb{C}); \end{aligned}$$

der Kern von $V(j)$ ist $\mathbf{T} \times (k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \subset \mathbf{G}$ mit $k = \frac{m}{ggT(m, j)}$. $SV(j)$ erhalte die kanonische, durch die komplexe Struktur des Vektorraumes $V(j)$ induzierte Orientierung. Dann hat die äquivariante Abbildung

$$\begin{aligned} g : SV\left(\frac{m}{h}\right) &\longrightarrow SV\left(q \cdot \frac{m}{h}\right) \simeq S^1 \\ \zeta &\longmapsto \zeta^q \end{aligned}$$

den Abbildungsgrad q , und beide Darstellungen haben den Kern \mathbf{H} , also $Iso(SV(\frac{m}{h})) = Iso(SV(q \cdot \frac{m}{h})) = \mathbf{H} = \mathbf{H}_{r+1}$. Es seien $V_{r+1} := V_r \oplus V(\frac{m}{h})$ und $W_{r+1} := W_r \oplus V(q \cdot \frac{m}{h})$ ($V(\frac{m}{h})$ und $V(q \cdot \frac{m}{h})$ jetzt als orthogonale \mathbf{G} -Moduln gesehen), mit entsprechender Produktorientierung, sowie

$$f'_{r+1} := f_r * g : X_r * SV(\frac{m}{h}) \simeq_{\mathbf{G}} X * SV_{r+1} \longrightarrow SW_r * SV(q \cdot \frac{m}{h}) \simeq_{\mathbf{G}} SW_{r+1}.$$

Da $Iso(X_r) = Iso \supset Iso(SV(\frac{m}{h}))$ nach Konstruktion abgeschlossen unter Durchschnitten ist, ist $Iso(X_r * SV(\frac{m}{h})) = Iso$. Außerdem gilt für die Isotropiegruppe \mathbf{G}_y eines $y = [(x, t, v)] \in (X_r * SV(\frac{m}{h})) \setminus X_r$, d. h. $t \neq 1$, $\mathbf{G}_y = \mathbf{G}_x \cap \mathbf{H}_{r+1} \subseteq \mathbf{H}_{r+1}$, also $\mathbf{G}_x = \mathbf{H}_i$ mit $i \geq r + 1$. Somit erfüllen

$$X_{r+1} := X_r * SV(\frac{m}{h}),$$

SW_{r+1} und f'_{r+1} bereits die Bedingungen (i)–(iii), insbesondere ist $deg(f'^{\mathbf{H}_i}_{r+1}) = 1$ falls $i \leq r$ und $\mathbf{H}_i \in \Phi(\mathbf{G})$. Außerdem ist nach Konstruktion

$$deg(f'^{\mathbf{H}}_{r+1}) = q \cdot deg(f_r^{\mathbf{H}}) \equiv 1 \pmod{|\mathbf{WH}|}.$$

Wir betrachten $f'^{\mathbf{H}}_{r+1}$ als $W\mathbf{H}$ -Abbildung. Nach der äquivarianten Form des Klassifikationstheorems von Hopf (Satz 1.19) gibt es dann eine $W\mathbf{H}$ -Abbildung $f''_{r+1} : X_{r+1}^{\mathbf{H}} \longrightarrow SW_{r+1}^{\mathbf{H}}$ mit $f''_{r+1}|_{X_{r+1}^{>\mathbf{H}}} = f'_{r+1}|_{X_{r+1}^{>\mathbf{H}}}$ und $deg(f''_{r+1}^{\mathbf{H}}) = 1$. Diese Erweiterung entspricht genau einer \mathbf{G} -Abbildung

$$f'''_{r+1} : X_{r+1}(r+1) \longrightarrow SW_{r+1}$$

mit $(f'''_{r+1})^{\mathbf{H}} = f''_{r+1}$ und $f'''_{r+1}|_{X_{r+1}(r)} = f'_{r+1}|_{X_{r+1}(r)} = f_r|_{X_r(r)}$ ([17], Satz I.(7.4)). Nach Lemma 1.22 läßt sich f'''_{r+1} zu einer \mathbf{G} -Abbildung $f_{r+1} : X_{r+1} \longrightarrow SW_{r+1}$ erweitern. f_{r+1} genügt nun auch der Bedingung (iv). \square

Kapitel 3

Stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen

\mathbf{G} sei weiterhin eine kompakte Liesche Gruppe und \star stets der aus einem Punkt bestehende Raum. In diesem Kapitel werden wir, mit Hilfe äquivarianter K -Theorie, stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen Invarianten zuordnen, die, zusammen mit der Dimensionsfunktion, ihren (stabilen, orientierten) \mathbf{G} -Homotopietyp eindeutig kennzeichnen:

Im ersten Abschnitt beweisen wir, daß es für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen X ein Analogon zur Bottperiodizität $K_{\mathbf{G}}(\star) \cong \tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^V)$ für komplexe \mathbf{G} -Darstellungen V gibt. Wir konstruieren entsprechende Bottklassen $b(X_h)$ und Eulerklassen $e(X_h) \in R(\mathbf{G})$ für X , wobei der Index h anzeigt, daß die Wahl dieser Klassen noch von der Wahl einer \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} SW$ abhängt. $e(X_h)$ beschreibt dann u. a. die $K_{\mathbf{G}}$ -Gruppen von X . Diese Bottperiodizität benutzen wir, um im zweiten Abschnitt Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(X, Y)$ zu berechnen (wobei X und Y zwei stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion sind), die Satz 1.18 erfüllen: damit erhalten wir explizit Kongruenzen, die die Gradfunktionen von \mathbf{G} -Abbildungen $X \rightarrow Y$ beschreiben. Aus dieser Konstruktion der Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(X, Y)$ entwickeln wir im darauffolgenden Abschnitt 3.3 Invarianten der (evtl. orientierten oder stabilen) Äquivalenzklassen stabil komplex linearer Homotopiedarstellungen. Daß diese Invarianten sich in dem Spezialfall der orientierten Äquivalenzklassen komplexer Darstellungssphären von p -Gruppen ungerader Ordnung vereinfachen lassen, zeigen wir dann im letzten Abschnitt.

Wie wir später sehen werden, könnten die Ergebnisse der Abschnitte 3.2 und 3.3 auch mit den Methoden des Kapitels 4 erzielt werden. Da komplexe Darstellungssphären in kanonischer Weise orientierbar sind, würden zudem die bei (reellen) Darstellungssphären auftretenden Probleme mit der Wahl geeigneter Orientierungen wegfallen, so daß die Sätze 3.10 und 3.12 (und damit alle sich aus ihnen ergebenden Folgerungen) mit weit geringerem Aufwand als dem in diesem Kapitel vorgestellten bewiesen werden könnten. Wir haben hier trotzdem den beweistechnisch längeren Weg zu diesen Ergebnissen gewählt, weil zum einen die Existenz der Bottperiodizität für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen

ein für sich bereits erwähnenswertes Ergebnis ist (zumal sich mit Hilfe einer Bottklasse $b(X_h)$ von X der $(\mathbb{Z}/2$ -graduierte) $R(\mathbf{G})$ -Modul $K_{\mathbf{G}}^*(X)$ berechnen läßt). Zum anderen wird bei der expliziten Berechnung der Invariante $\Lambda_D(X)$ deutlicher, woher diese Invariante stammt, und daß die ihr zugrundeliegenden Klassenfunktionen $\lambda(X)_{\mathbf{H}} : W\mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe bestimmter Charaktere des Darstellungsrings $R(W\mathbf{H})$ definiert werden können, die ihren Ursprung in der $K_{\mathbf{G}}$ -Theorie von X haben. In diesem Sinne ist der hier vorgestellte Beweis „schöner“.

Eine Zusatzstruktur für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen

Eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X heißt stabil komplex linear, falls es zwei komplexe \mathbf{G} -Moduln V und W und eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz

$$h : X * SV \rightarrow SW$$

gibt. Die feste Wahl solch einer Äquivalenz $h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X$ fassen wir in diesem Kapitel zunächst als Zusatzstruktur für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen auf und zeigen dies durch den Index h an, wobei also

$$X_h := (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$$

sei; wir werden der Einfachheit halber solch ein Tupel X_h weiterhin eine stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung nennen.

Weiterhin sei für jede gegebene stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X_h die Homotopiedarstellung X , wie in Abschnitt 1.1.2 erläutert, so mit einer Orientierung versehen, daß je zwei Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion kohärent orientiert sind. Da Homotopiedarstellungen mit geradzahligem Dimensionsfunktion triviales Orientierungsverhalten haben (siehe Gleichung (1.1)), können wir dabei für den Join $X * Y$ zweier orientierter Homotopiedarstellungen o. E. stets die Produktorientierung von X und Y wählen. Weiterhin sei eine komplexe Darstellungssphäre SU o. E. kanonisch, d. h. induziert durch die komplexe Struktur des Vektorraums U , orientiert: ist u_1, \dots, u_n eine Basis von U , so liefert die geordnete Basis $(u_1, iu_1, \dots, u_n, iu_n)$ des U zugrundeliegenden reellen Vektorraums eine Orientierung von U , die unabhängig von der speziellen Wahl von u_1, \dots, u_n ist. Auf diese Weise hat für jede stabil komplex lineare Homotopiedarstellung X_h die stabile Äquivalenz h_X wohldefinierte Abbildungsgrade $\deg(h_X^{\mathbf{H}}) \in \mathbb{Z}^*$ (die die zu der Dimensionsfunktion von $X * SV_X$ bzw. SW_X gehörenden Instabilitätsbedingungen erfüllen).

Ist $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$, so sei mit $X_h^{\mathbf{H}}$ stets die stabil komplex lineare $W\mathbf{H}$ -Homotopiedarstellung

$$X_h^{\mathbf{H}} = (X^{\mathbf{H}}, h_X^{\mathbf{H}} : X^{\mathbf{H}} * SV_X^{\mathbf{H}} \rightarrow SW_X^{\mathbf{H}}) \quad (3.1)$$

gemeint, ebenso können wir X_h , mit den entsprechenden Restriktionen, als stabil komplex lineare \mathbf{H} -Homotopiedarstellung auffassen. Für den Join zweier Homotopiedarstellungen X und Y definieren wir $(X * Y)_h$ vermöge

$$h_{X*Y} := h_X * h_Y : (X * Y) * S(V_X \oplus V_Y) \rightarrow S(W_X \oplus W_Y) \quad (3.2)$$

(wobei wir die – dank der kanonischen Orientierung der Darstellungssphären – orientierten Äquivalenzen $(X * SV_X) * (Y * SV_Y) \simeq_{\mathbf{G}} (X * Y) * S(V_X \oplus V_Y)$ und $SW_X * SW_Y \simeq_{\mathbf{G}} S(W_X \oplus W_Y)$ benutzen).

Die im nächsten Abschnitt konstruierte Bottklasse $b(X_h)$ und Eulerklasse $e(X_h)$ wird eine Invariante der stabil komplex linearen \mathbf{G} –Homotopiedarstellung X_h sein, d. h. abhängig von X mit der Zusatzstruktur $h_X : X * SV_X \longrightarrow SW_X$.

3.1 Äquivariante K –Theorie

Wir wollen zunächst zeigen, daß es für jede stabil komplex lineare \mathbf{G} –Homotopiedarstellung X ein Analogon zur Bottperiodizität der äquivarianten K –Theorie für eine komplexe \mathbf{G} –Darstellung gibt. Insbesondere ist der $K_{\mathbf{G}}^*(\star)$ –Modul $K_{\mathbf{G}}^*(CX, X)$ frei vom Rang 1, d. h. $K_{\mathbf{G}}^i(CX, X) \cong K_{\mathbf{G}}^i(\star) = 0$ falls i ungerade und $K_{\mathbf{G}}^i(CX, X) \cong K_{\mathbf{G}}^i(\star) \cong R(\mathbf{G})$ ist ein freier $R(\mathbf{G})$ –Modul vom Rang 1 falls i gerade.

Dazu zunächst ein paar Vorbemerkungen über äquivariante K –Theorie und die Bottperiodizität für eine komplexe \mathbf{G} –Darstellung.

$K_{\mathbf{G}}^n(\cdot)$ ($n \in \mathbb{Z}$) seien die Kohomologiegruppen der äquivarianten K –Theorie auf der Kategorie der \mathbf{G} –Räume. Für einen endlichen \mathbf{G} –CW-Komplex X können wir $K_{\mathbf{G}}(X) = K_{\mathbf{G}}^0(X)$ als die Grothendieckgruppe der komplexen \mathbf{G} –Vektorraumbündel über X ansehen. Insbesondere ist $K_{\mathbf{G}}^0(\star)$ isomorph zu $R(\mathbf{G})$, dem komplexen Darstellungsring. Der auf diese Weise definierte kontravariante Funktor $K_{\mathbf{G}}$ und die daraus resultierende äquivalente Kohomologietheorie für kompakte \mathbf{G} –Räume werden beispielsweise bei Segal [34] oder Friedrich [19] ausführlich beschrieben. (Siehe auch Atiyah [1], in dessen Buch der Schwerpunkt allerdings auf nicht-äquivarianter topologischer K –Theorie liegt). Mit Hilfe eines die $K_{\mathbf{G}}$ –Theorie darstellenden \mathbf{G} –Spektrums wird die Kohomologietheorie $K_{\mathbf{G}}^*$ für alle \mathbf{G} –Räume definiert. (Eine genau Konstruktion findet sich z. B. in dem Buch von Lewis, May und Steinberger [27], siehe insbesondere Kapitel X und dort speziell Prop. 2.1; einen guten Überblick gibt auch der Übersichtsartikel von Greenlees [20]).

Im einzelnen gelten folgende für uns wichtige Fakten: Ist X ein punktierter \mathbf{G} –Raum mit ausgezeichnetem Basispunkt \star (der ein Fixpunkt der \mathbf{G} –Operation ist), und ist $i : \star \hookrightarrow X$ die Inklusion, so ist die reduzierte $K_{\mathbf{G}}$ –Gruppe $\tilde{K}_{\mathbf{G}}(X)$ definiert als

$$\tilde{K}_{\mathbf{G}}(X) := \text{Kern}(K_{\mathbf{G}}(X) \xrightarrow{i^*} K_{\mathbf{G}}(\star));$$

weiterhin ist für ein \mathbf{G} –Raumpaars (X, Y) $K_{\mathbf{G}}(X, Y) := \tilde{K}_{\mathbf{G}}(X/Y)$ (wobei Y der Basispunkt des Quotienten X/Y sei). Ist der punktierte Raum X^+ die disjunkte Vereinigung aus X und einem zusätzlichen Basispunkt (auf dem \mathbf{G} trivial operiert), so ist $K_{\mathbf{G}}(X) = \tilde{K}_{\mathbf{G}}(X^+)$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt $K_{\mathbf{G}}^{-n}(X) \cong \tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^n \wedge X^+)$; insbesondere ist $K_{\mathbf{G}}^{-1}(\star) = 0$. Für je zwei \mathbf{G} –Raumpaare (A, A') , (B, B') haben wir eine Multiplikation

$$K_{\mathbf{G}}^n(A, A') \otimes_{\mathbb{Z}} K_{\mathbf{G}}^m(B, B') \longrightarrow K_{\mathbf{G}}^{n+m}((A, A') \times (B, B')),$$

bzw. für je zwei punktierte \mathbf{G} –Räume A und B

$$\tilde{K}_{\mathbf{G}}^n(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K}_{\mathbf{G}}^m(B) \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}^{n+m}(A \wedge B).$$

Setzen wir $A = \star^+$, so sehen wir wegen $K_{\mathbf{G}}(\star) = R(\mathbf{G})$, daß mit dieser Multiplikation insbesondere alle Kohomologiegruppen $R(\mathbf{G})$ –Moduln werden.

Die äquivariante Kohomologietheorie $K_{\mathbf{G}}^*(\cdot)$ zeichnet sich durch die Existenz des Bottisomorphismus aus (siehe beispielsweise [34], §3, und [20], 3. und 4.). Ein Spezialfall hiervon ist die sogenannte Bottperiodizität:

Ist V eine unitäre \mathbf{G} –Darstellung, mit Einheitskreisscheibe DV und Einheitskugel SV , bzw. S^V der sogenannte Bottraum, d. h. die Einpunktkompaktifizierung von V mit dem unendlich fernen Punkt als Basispunkt, so ist der $R(\mathbf{G})$ –Modul $\tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^V) \cong K_{\mathbf{G}}(DV, SV)$ frei vom Rang 1, mit einem erzeugenden Element $b(V) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^V) \cong K_{\mathbf{G}}(DV, SV)$, Bottklasse von V genannt, welches mit Hilfe der Vektorraumstruktur von V definiert wird. Für jeden punktierten \mathbf{G} –Raum X ist die Multiplikation mit dieser Bottklasse

$$\begin{aligned} \Theta_V : \quad \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(X) &\longrightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(X \wedge S^V) \\ \omega &\longmapsto \omega \cdot b(V) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von (graduerten) $R(\mathbf{G})$ –Moduln (ein entsprechender Isomorphismus gilt für \mathbf{G} –Raumpaare bzw. unpunktierte \mathbf{G} –Räume). Wegen $K_{\mathbf{G}}^{-n}(X) = \tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^n \wedge X^+)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere, da wir für V die triviale Darstellung $V = \mathbb{C}$ wählen können, $K_{\mathbf{G}}^{-n}(X) \cong K_{\mathbf{G}}^{-n-2}(X)$. (Auf diese Weise wird in der ursprünglichen Konstruktion der Kohomologietheorie die Graduierung vermöge $K_{\mathbf{G}}^{2m+i}(X) := K_{\mathbf{G}}^i(X)$ mit $i \in \{0, -1\}$ auf \mathbb{Z} ausgedehnt.) Wir können $K_{\mathbf{G}}^*(\cdot)$ also auch als $\mathbb{Z}/2$ –graduierete Kohomologietheorie auffassen.

Ist $V \longrightarrow \star$ das triviale Vektorraumbündel und $\pi : DV \longrightarrow \star$, so können wir uns $b(V) \in K_{\mathbf{G}}(DV, SV)$ als das mit Hilfe des Koszul–Komplexes

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \pi^*V \longrightarrow \bigwedge^2 \pi^*V \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigwedge^n \pi^*V \longrightarrow \dots$$

definierte virtuelle Vektorraumbündel über DV vorstellen (zur genauen Definition siehe Segal [34], §3). Es sei $i : \star \hookrightarrow DV$ die Inklusion der Null. Die Abbildung φ_V , die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbf{G}}^*(DV, SV) & \longrightarrow & K_{\mathbf{G}}^*(DV) \\ \uparrow \Theta_V & & \downarrow i^* \\ K_{\mathbf{G}}^*(\star) & \xrightarrow{\varphi_V} & K_{\mathbf{G}}^*(\star) \end{array}$$

kommutieren läßt, ist die Multiplikation mit der sogenannten Eulerklasse $e(V)$ von V ,

$$e(V) := \lambda_{-1}(V) = \sum_{i=0}^{\dim_{\mathbb{C}} V} (-1)^i \wedge^i V \in R(\mathbf{G})$$

(wobei $\wedge^i V$ die i -te äußere Potenz von V sei). Nach Konstruktion sind Bottklasse und Eulerklasse verträglich mit der Restriktion auf Untergruppen $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$, wir werden deshalb bei solch einem Wechsel die Bezeichnungen $b(V)$ bzw. $e(V)$ einfach beibehalten. Die Bottperiodizität ist transitiv in dem Sinne, daß für je zwei komplexe \mathbf{G} -Darstellungen V und W gilt

$$b(V)b(W) = b(V \oplus W) \in K_{\mathbf{G}}(D(V \oplus W), S(V \oplus W)) \cong K_{\mathbf{G}}((DV, SV) \times (DW, SW));$$

entsprechend ist $e(V)e(W) = e(V \oplus W)$.

3.1.1 Bottperiodizität für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen

Betrachten wir die Einheitssphäre einer komplexen (unitären) \mathbf{G} -Darstellung V als Homotopiedarstellung $X = SV$, so entspricht die Einheitskreisscheibe DV dem Kegel CX von X , wobei $CX = X \times [0, 1]/X \times \{0\} \supset X \times \{1\} = X$, insbesondere ist $K_{\mathbf{G}}(DV, SV) = K_{\mathbf{G}}(CX, X)$. Der Bottraum S^V ist \mathbf{G} -homöomorph zur unreduzierten Einhängung CX/X von $X = SV$. Wir schreiben deshalb für einen beliebigen \mathbf{G} -Raum X die unreduzierte Einhängung als

$$\sigma X := CX/X; \tag{3.3}$$

σX ist ein punktierter \mathbf{G} -Raum mit Basispunkt X . Wir formulieren nun das angekündigte Analogon zur Bottperiodizität für stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen in der Version für punktierte Räume, da dies bei unseren späteren Anwendungen am sinnvollsten ist; eine Formulierung für Raumpaare oder nicht punktierte Räume wäre genauso möglich.

Satz 3.1 *Sei X eine stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung. Dann gibt es ein Element $b(X) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X)$ (eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Einheit $\in R(\mathbf{G})^*$), so daß für jeden punktierten \mathbf{G} -Raum A die Abbildung*

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A) &\longrightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A \wedge \sigma X) \\ \omega &\longmapsto \omega \cdot b(X) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $R(\mathbf{G})$ -Moduln ist. Insbesondere sind die $R(\mathbf{G})$ -Moduln $\tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(\sigma X)$ und $K_{\mathbf{G}}^*(\star)$ isomorph, d. h. $K_{\mathbf{G}}^i(CX, X) = \tilde{K}_{\mathbf{G}}^i(\sigma X)$ ist ein freier $R(\mathbf{G})$ -Modul vom Rang 1 falls i gerade und ist Null falls i ungerade.

Beweis: (Siehe auch [14].) Da es nach Voraussetzung zwei komplexe \mathbf{G} -Darstellungen V und W und eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $h : X * SV \rightarrow SW$ gibt, die auf den Kegeln die Abbildung $C(h) : C(X * SV) \rightarrow C(SW) = DW$ induziert, existiert also eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz

$$(CX/X) \wedge (DV/SV) \rightarrow DW/SW,$$

ebenfalls h genannt. Für jeden punktierten \mathbf{G} -Raum A induziert $id_A \wedge h$ damit einen Isomorphismus

$$(id_A \wedge h)^* : \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A \wedge \sigma SW) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A \wedge \sigma X \wedge \sigma SV)$$

von (graduieren) $R(\mathbf{G})$ -Moduln. Deshalb können wir einen Isomorphismus

$$\Theta_A(X_h) : \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A \wedge \sigma X)$$

so definieren, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A \wedge \sigma X) & \xrightarrow{\cdot b(V)} & \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A \wedge \sigma X \wedge \sigma SV) \\ \uparrow \Theta_A(X_h) & & \uparrow (id_A \wedge h)^* \\ \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A) & \xrightarrow{\cdot b(W)} & \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A \wedge \sigma SW) \end{array}$$

kommutiert. Ist speziell $A = \star^+$, so ist $\tilde{K}_{\mathbf{G}}(\star^+) = K_{\mathbf{G}}(\star) \cong R(\mathbf{G}) \ni 1$ und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\Theta(X_h) : K_{\mathbf{G}}(\star) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X). \quad (3.4)$$

Definieren wir

$$b(X_h) := \Theta(X_h)(1) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X), \quad (3.5)$$

so ist also $h^*(b(W)) = b(X_h) \cdot b(V) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X \wedge \sigma SV)$. Da nun für alle $\omega \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A)$

$$\begin{aligned} \Theta_A(X_h)(\omega) \cdot b(V) &= (id_A \wedge h)^*(\omega \cdot b(W)) \\ &= (id_A)^*(\omega) \cdot h^*(b(W)) \\ &= \omega \cdot b(X_h) \cdot b(V), \end{aligned}$$

so gilt wegen der Bottperiodizität für V für den Isomorphismus $\Theta_A(X_h)$

$$\Theta_A(X_h)(\omega) = \omega \cdot b(X_h) \quad (\omega \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}^*(A)).$$

□

3.1.2 Eulerklassen

Die Bottklasse $b(V)$ einer komplexen \mathbf{G} -Darstellung V ist keine topologische Invariante des Bottraumes S^V bzw. σSV , sondern wird (wie eingangs erläutert) mit Hilfe der Vektorraumstruktur von V definiert. Entsprechend gibt es für eine stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X kein ausgezeichnetes erzeugendes Element des freien $R(\mathbf{G})$ -Moduls $\tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X)$ vom Rang 1: wir haben $b(X_h) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X)$ in Abhängigkeit von der Wahl der \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X$ und der Vektorraumstruktur von V_X und W_X festgelegt.

Wir unterdrücken bei h_X , V_X und W_X weiterhin den Index X . Es soll nun das zu $b(X_h) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X)$ gehörige Element $e(X_h) \in R(\mathbf{G})$ bestimmt werden, das Analogon zu der zur Bottklasse $b(V) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^V)$ gehörenden Eulerklasse $e(V) \in R(\mathbf{G})$: wir definieren dieses Element so, daß der durch die Multiplikation mit $e(X_h)$ gegebene Endomorphismus $K_{\mathbf{G}}(\star) \rightarrow K_{\mathbf{G}}(\star)$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K_{\mathbf{G}}(\star) & \xrightarrow{\cdot e(V)} & K_{\mathbf{G}}(\star) \\
 & \nearrow & \uparrow \cdot e(X_h) & & \nearrow h^* = id \\
 \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X) & \xrightarrow{\cdot b(V)} & \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X \wedge \sigma SV) & & \\
 \uparrow \cdot b(X_h) & & \uparrow \cdot e(W) & & \uparrow h^* \\
 K_{\mathbf{G}}(\star) & \xrightarrow{\cdot b(W)} & K_{\mathbf{G}}(\star) & \xrightarrow{\cdot e(W)} & K_{\mathbf{G}}(\star) \\
 & \searrow & \downarrow & & \searrow \\
 & & \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma SW) & &
 \end{array}$$

kommutieren läßt. Dabei seien alle Abbildungen mit Ziel $K_{\mathbf{G}}(\star)$ jeweils durch die Inklusion der Null in die entsprechenden Kegel induziert. Es sei $1 \in K_{\mathbf{G}}(\star) \cong R(\mathbf{G})$.

Definition 3.2 *Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz 3.1 sowie aus obigem Diagramm nennen wir $\Theta(X_h) : K_{\mathbf{G}}(\star) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X)$ den Bottisomorphismus, $b(X_h) := \Theta(X_h)(1) \in \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X)$ die Bottklasse sowie*

$$e(X_h) \in R(\mathbf{G})$$

die Eulerklasse der stabil komplex linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X_h .

Ist h sogar eine orientierte Äquivalenz, so hängen diese Begriffe übrigens nur noch von V und W , nicht aber von der speziellen Wahl von h ab, denn da die Dimensionsfunktion von $X * SV$ bzw. SW nur geradzahlige Werte hat, ist nach dem Satz von Hopf h bis auf \mathbf{G} -Homotopie durch seine Gradfunktion eindeutig bestimmt. Wir werden gleich sehen, daß die Eulerklasse $e(X_h)$ auch sonst nur von V und W abhängt.

Die Eulerklasse $e(X_h) \in R(\mathbf{G})$ von $X_h = (X, h : X * SV \longrightarrow SW)$ erfüllt, wie man dem letzten Diagramm entnehmen kann, die Gleichung

$$e(X_h) \cdot e(V) = e(W).$$

Da $R(\mathbf{G})$ im allgemeinen nicht nullteilerfrei ist, wird $e(X_h)$ durch diese Gleichung noch nicht eindeutig bestimmt (genau dann, wenn V einen trivialen Faktor enthält, ist $e(V)$ sogar identisch Null). Trotzdem läßt sich die Eulerklasse von X in gewisser Weise als Quotient der Eulerklassen von V und W berechnen.

Berechnung der Eulerklasse

Ist eine Gruppe \mathbf{C} abelsch, so zerfällt jede endlichdimensionale komplexe \mathbf{C} -Darstellung U in eindimensionale irreduzible \mathbf{C} -Darstellungen U_ν , $U \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, für diese ist $e(U_\nu) = \sum (-1)^i \wedge^i U_\nu = 1 - U_\nu$. Da die Eulerklasse multiplikativ ist, gilt also $e(U) = \prod_{\nu=1}^k (1 - U_\nu) \in R(\mathbf{C})$. Wird $\mathbf{C} \subset \mathbf{G}$ von g erzeugt, so ist deshalb der Charakterwert $e(U)(g)$ genau dann $\neq 0$, wenn $U^{\mathbf{C}} = 0$; ist $U = U^{\mathbf{C}} \oplus U_{\mathbf{C}}$ die orthogonale Zerlegung der \mathbf{C} -Darstellung U in die Fixpunktmenge und ihr Komplement, so ist insbesondere $e(U_{\mathbf{C}})(g) \neq 0$.

Satz 3.3 *Es sei $g \in \mathbf{G}$ und \mathbf{C} der Abschluß der von g erzeugten zyklischen Untergruppe von \mathbf{G} . Dann gilt für den Charakterwert der Eulerklasse $e(X_h)$ einer stabil komplex linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellung $X_h = (X, h : X * SV \longrightarrow SW)$ an der Stelle g*

$$e(X_h)(g) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \dim_{\mathbf{G}} X(\mathbf{C}) > 0 \\ \frac{e(W_{\mathbf{C}})(g)}{e(V_{\mathbf{C}})(g)} & \text{falls } \dim_{\mathbf{G}} X(\mathbf{C}) = 0 \end{cases} .$$

Beweis: Da die Restriktion $Res_{\mathbf{C}}^{\mathbf{G}}(X_h)$ von X_h eine stabil komplex lineare \mathbf{C} -Homotopiedarstellung ist, können wir zur Berechnung des Charakterwertes $e(X_h)(g)$ o. E. $\mathbf{G}=\mathbf{C}$ annehmen.

Wegen $\dim_{\mathbf{C}} W^{\mathbf{C}} \geq \dim_{\mathbf{C}} V^{\mathbf{C}}$ ist $W \cong W^{\mathbf{C}} \oplus W_{\mathbf{C}} \cong V^{\mathbf{C}} \oplus W'$ mit einer \mathbf{C} -Darstellung W' . $h : \sigma X \wedge \sigma SV \longrightarrow \sigma SW$ induziert deshalb eine \mathbf{C} -Homotopieäquivalenz

$$h' : \sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}} \longrightarrow \sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma SW'.$$

Nach unserer Definition des Erzeugers $b(X_h) \in \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma X)$ ist

$$h^*(b(W)) = b(X_h)b(V) \in \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma X \wedge \sigma SV).$$

Wegen der Transitivität der Bottperiodizität gilt deshalb für den durch h' induzierten $R(\mathbf{C})$ -Modulhomomorphismus $(h')^* : \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma SW') \longrightarrow \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}})$

$$(h')^*(b(V^{\mathbf{C}})b(W')) = b(V^{\mathbf{C}})b(X_h)b(V_{\mathbf{C}}).$$

Wir erhalten deshalb das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
& & K_{\mathbf{C}}(\star) & \xrightarrow{\cdot e(V_{\mathbf{C}})} & K_{\mathbf{C}}(\star) \\
& & \uparrow \cdot e(X_h) & & \uparrow (h')^* = id \\
\tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X) & \xrightarrow{\cdot b(V_{\mathbf{C}})} & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}}) & & \\
& \uparrow \cdot b(X_h) & \uparrow \cdot e(W') & & \\
\tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\cdot b(W')} & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma SW') & \xrightarrow{(h')^*} & K_{\mathbf{C}}(\star)
\end{array}$$

wobei auch hier wiederum alle Abbildungen $\tilde{K}_{\mathbf{C}}(\cdot) \rightarrow K_{\mathbf{C}}(\star)$ durch die Inklusion der Null in die entsprechenden Kegel induziert seien. Für $e(X_h) \in R(\mathbf{C})$ folgt also

$$e(X_h) \cdot e(V_{\mathbf{C}}) = e(W'),$$

wobei $e(V_{\mathbf{C}})(g) \neq 0$, da \mathbf{C} von g erzeugt wird. \square

Die Eulerklasse $e(X_h)$ von $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ ist also nur von V_X und W_X , nicht aber von der speziellen Wahl von h_X abhängig. Sie ist insofern multiplikativ bzgl. des Join, als daß

$$e((X * Y)_h) = e(X_h) \cdot e(Y_h) \quad (3.6)$$

gilt (siehe (3.2)). Da die Bottklasse $b(X_h)$ als erzeugendes Element des freien $R(\mathbf{G})$ -Moduls $\tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma X)$ bis auf Multiplikation mit einem invertierbaren Element aus dem Darstellungsring eindeutig bestimmt ist, ist die Restklasse

$$\bar{e}(X) := [e(X_h)] \in R(\mathbf{G})/R(\mathbf{G})^*$$

nicht mehr von der Wahl der Homotopieäquivalenz $h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X$ abhängig; $\bar{e}(X)$ ist eine Invariante der Äquivalenzklasse von X . Diese Invariante ist multiplikativ bzgl. des Join, d. h.

$$\bar{e}(X * Y) = \bar{e}(X) \cdot \bar{e}(Y).$$

Ein einfaches Beispiel dafür, daß die Eulerklasse auch für eine komplexe Darstellungssphäre keine Invariante des Homotopietyps ist, gibt es schon für $\mathbf{G} = \mathbb{Z}/3$: Es sei V die komplexe eindimensionale \mathbf{G} -Darstellung

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{G} \times V & \longrightarrow & V \\
(l \bmod 3, v) & \longmapsto & \zeta^l \cdot v
\end{array}$$

($l \in \mathbb{Z}$, $\zeta = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$) und $V^2 = V \otimes V$.

Beispiel 3.4 Es sei $V_1 = V \oplus V$ und $V_2 = V^2 \oplus V^2$. Dann sind SV_1 und SV_2 orientiert \mathbf{G} -homotopieäquivalent, aber $e(V_1) \neq e(V_2)$.

Beweis: Wegen $SV_1^{\mathbf{G}} = SV_2^{\mathbf{G}} = \emptyset$ ist jede \mathbf{G} -Abbildung $SV_1 \rightarrow SV_2$ bereits durch ihren gewöhnlichen Abbildungsgrad bis auf \mathbf{G} -Homotopie eindeutig bestimmt (Satz 1.19). Die \mathbf{G} -Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \supset SV &\longrightarrow S(V^2) \\ \lambda &\mapsto \lambda^2 \end{aligned}$$

vom Grad 2 induziert eine Abbildung $f * f : SV_1 \rightarrow SV_2$ vom Grad 4. Nach dem äquivarianten Satz von Hopf ist wegen $1 \equiv 4 \pmod{3}$ deshalb auch eine \mathbf{G} -Abbildung $SV_1 \rightarrow SV_2$ vom Grad 1 realisierbar, die dann die gewünschte orientierte Äquivalenz ist. Identifiziert man nun V mit t in $R(\mathbf{G}) \cong \mathbb{Z}[t]/(1-t^3)$, so ist wegen $V_1 = 2t$ und $V_2 = 2t^2(1-t)^2 \pmod{1-t^3} = e(V_1) \neq e(V_2) = (1-t^2)^2 \pmod{1-t^3}$. \square

Zwei Anwendungen der Eulerklasse

Unter anderem kann man mit Hilfe der Eulerklasse $e(X_h)$ einer stabil komplex linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X_h den $(\mathbb{Z}/2$ -graduierten) $R(\mathbf{G})$ -Modul $K_{\mathbf{G}}^*(X)$ berechnen. Es sei $\text{Ann}_R(x)$ der Annihilator eines Elements x in einem Ring R und (x) das von x in R aufgespannte Hauptideal. Dann gilt unabhängig von der speziellen Wahl der Äquivalenz $h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X$

Bemerkung 3.5 Für eine stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X_h gilt für die $R(\mathbf{G})$ -Moduln der $K_{\mathbf{G}}$ -Kohomologietheorie von X

$$K_{\mathbf{G}}^1(X) \cong \text{Ann}_{R(\mathbf{G})}(e(X_h)) \quad \text{und} \quad K_{\mathbf{G}}^0(X) \cong R(\mathbf{G})/(e(X_h)).$$

Ist die Homotopiedarstellung X so, daß $X * S^0$ stabil komplex linear ist (z. B. $X = S(V \oplus \mathbb{R})$ mit einer unitären \mathbf{G} -Darstellung V), so ist

$$K_{\mathbf{G}}^0(X) \cong R(\mathbf{G}) \oplus R(\mathbf{G}) \quad \text{und} \quad K_{\mathbf{G}}^1(X) = 0.$$

Beweis: (Siehe auch Atiyah [1], Cor. 2.7.3, für den Fall $X = SV$.) Angenommen X ist stabil komplex linear. Aus der langen exakten Sequenz der Kohomologietheorie $K_{\mathbf{G}}^*(\cdot)$ für das Raumpaar (CX, X) erhalten wir mit Hilfe des Isomorphismus $\Theta(X_h)$ und wegen $K_{\mathbf{G}}^{-1}(CX) = 0 = K_{\mathbf{G}}^1(CX, X)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{\mathbf{G}}^{-1}(X) & \longrightarrow & K_{\mathbf{G}}^0(CX, X) & \longrightarrow & K_{\mathbf{G}}^0(CX) & \longrightarrow & K_{\mathbf{G}}^0(X) & \longrightarrow & 0, \\ & & & & \uparrow \Theta(X_h) & & \cong & & & & \\ & & & & K_{\mathbf{G}}^0(\star) & \xrightarrow{\varphi(X_h)} & K_{\mathbf{G}}^0(\star) & & & & \end{array}$$

wobei $\varphi(X_h)$ die Multiplikation mit $e(X_h)$ ist. Daher haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K_{\mathbf{G}}^1(X) \longrightarrow R(\mathbf{G}) \xrightarrow{\cdot e(X_h)} R(\mathbf{G}) \longrightarrow K_{\mathbf{G}}^0(X) \longrightarrow 0,$$

woraus die erste Behauptung folgt. Ist X so, daß $X * S^0$ stabil komplex linear ist, so ist wegen $C(X * S^0)/X * S^0 \simeq_{\mathbf{G}} S^1 \wedge (CX/X)$

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{G}}^0(CX, X) &\cong K_{\mathbf{G}}^1(C(X * S^0), X * S^0) = 0 \\ \text{und } K_{\mathbf{G}}^{-1}(CX, X) &\cong K_{\mathbf{G}}^0(C(X * S^0), X * S^0) \cong R(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

Die lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow K_{\mathbf{G}}^{-1}(X) \rightarrow 0 \rightarrow K_{\mathbf{G}}^0(CX) \rightarrow K_{\mathbf{G}}^0(X) \rightarrow K_{\mathbf{G}}^1(CX, X) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

ergibt also, da $K_{\mathbf{G}}^1(CX, X) \cong R(\mathbf{G})$ als freier $R(\mathbf{G})$ -Modul die exakte Sequenz $0 \rightarrow R(\mathbf{G}) \rightarrow K_{\mathbf{G}}^0(X) \rightarrow R(\mathbf{G}) \rightarrow 0$ spaltet, $K_{\mathbf{G}}^0(X) \cong R(\mathbf{G}) \oplus R(\mathbf{G})$ und $K_{\mathbf{G}}^1(X) = 0$. \square

Bemerkung 3.6 *Es sei $\mathbf{G} = S^1$ und X eine \mathbf{G} -Homotopiedarstellung mit leerer Fixpunktmenge $X^{\mathbf{G}} = \emptyset$. Dann ist X stabil komplex linear, und die (eindeutig bestimmte) Eulerklasse $e(X) \in R(\mathbf{G})$ von X beschreibt die Dimensionsfunktion und damit auch die Äquivalenzklasse von X eindeutig.*

Beweis: tom Dieck beweist in [14], Theorem 1, daß es für jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X genau ein $W - V \in RO(\mathbf{G})$ mit $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} SW$ gibt. Ist U die eindimensionale komplexe \mathbf{G} -Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times U &\longrightarrow U \\ (\zeta, v) &\longmapsto \zeta \cdot v \end{aligned}$$

($\zeta \in \mathbf{G} = S^1 \subset \mathbb{C}$), so ist eine reelle irreduzible \mathbf{G} -Darstellung entweder trivial oder die Reellifizierung von U^k für ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ist daher $X^{\mathbf{G}} = \emptyset$, so können V und W mit $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} SW$ sogar komplex gewählt werden, d. h. jede \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X mit leerer Fixpunktmenge ist stabil komplex linear, und $W - V \in R(\mathbf{G})$ und $e(X) := e(X_h)$ sind dabei eindeutig bestimmt.

Ist die erste Behauptung bewiesen, so folgt die zweite aus der Tatsache, daß für einen Torus zwei Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion bereits äquivalent sind ([14], Prop. 1).

Nun zur ersten Behauptung. Identifizieren wir die \mathbf{G} -Darstellung U mit t , so ist der komplexe Darstellungsrings des Torus $R(\mathbf{G})$ isomorph zu $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, dem Polynomring in der Unbestimmten t und t^{-1} . Wir können daher $R(\mathbf{G})$ als Unterring der auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktionen auffassen. Wie oben erläutert, ist $X * SV \simeq_{\mathbf{G}} SW$, wobei o. E. $V^{\mathbf{G}} = 0 = W^{\mathbf{G}}$, also

$$V = \sum_{d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} n(d)U^d \quad \text{und} \quad W = \sum_{d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} m(d)U^d$$

mit $m(d), n(d) \in \mathbb{N}_0$. Für die Eulerklasse $e(X)$ gilt dann $e(X) \cdot e(V) = e(W)$. Da nach Voraussetzung $e(V) \neq 0 \neq e(W)$, ist $e(X) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ die holomorphe Fortsetzung der rationalen Funktion

$$\frac{e(W)}{e(V)} = \frac{\prod(1 - t^d)^{m(d)}}{\prod(1 - t^d)^{n(d)}}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es sei $\xi_k := e^{2\pi i/k} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Für die von ξ_k erzeugte Untergruppe \mathbf{K} von S^1 ist

$$(U^d)^{\mathbf{K}} = \begin{cases} U^d & \text{falls } k|d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

und deshalb gilt für die Dimensionsfunktion von X

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Dim}_{\mathbf{G}} X(\mathbf{K}) &= \text{Dim}_{\mathbf{G}} SW(\mathbf{K}) - \text{Dim}_{\mathbf{G}} SV(\mathbf{K}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} W^{\mathbf{K}} - \dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbf{K}} \\ &= \sum_{d: k|d} (m(d) - n(d)) \cdot \dim_{\mathbb{R}} U^d \\ &= 2 \cdot o(k), \end{aligned}$$

wobei $o(k) := \sum_{d: k|d} (m(d) - n(d))$ sei. Zugleich ist ξ_k aber auch Nullstelle von $e(X)$ der Ordnung $o(k)$. Da eine (abgeschlossene) Untergruppe von S^1 entweder S^1 selber ist (nach Voraussetzung war $\text{Dim}_{\mathbf{G}} X(\mathbf{G}) = 0$) oder aber von einem Element der Form ξ_k erzeugt wird, so ist die Dimensionsfunktion von X durch die Nullstellenordnungen von $e(X)$ in den ξ_k ($k \in \mathbb{N}$) festgelegt. \square

3.2 Kongruenzen für Gradfunktionen

Wie in Kapitel 1.2 beschrieben, ist ein gegebenes $d \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ genau dann Gradfunktion einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X und Y gleicher Dimensionsfunktion D , wenn d die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ sowie bestimmte Kongruenzen

$$d(\mathbf{H}) \equiv \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ \mathbf{1} \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} d(\mathbf{K}) \pmod{|W\mathbf{H}|}$$

erfüllt (Satz 1.18 und Satz 1.21). Bei Kenntnis der von X und Y abhängigen Koeffizienten $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \in \mathbb{Z}$ kann also festgestellt werden, ob eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $X \rightarrow Y$ existiert. Wir wollen nun in dem Fall, daß X und Y stabil komplex linear sind, mit Hilfe der Bottperiodizität die Zahlen $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ berechnen. Dabei folgen wir Ideen von tom Dieck und Petrie ([11], [17] II.5).

Gegeben seien also zwei stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ und $Y_h = (Y, h_Y : Y * SV_Y \rightarrow SW_Y)$ sowie eine äquivariante Abbildung $f : X \rightarrow Y$. f induziert einen $R(\mathbf{G})$ -Modulhomomorphismus

$$f^* : \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma Y) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X).$$

Da $\tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma Y)$ bzw. $\tilde{K}_{\mathbf{G}}(\sigma X)$ jeweils frei vom Rang 1 mit Erzeuger $b(Y_h)$ bzw. $b(X_h)$ sind, gibt es ein Element $a_{\mathbf{G}}(f_h) \in R(\mathbf{G})$, äquivarianter K -theoretischer Abbildungsgrad von f bzgl. h_X und h_Y genannt, so daß f^* beschrieben wird durch

$$f^*(b(Y_h)) = a_{\mathbf{G}}(f_h) \cdot b(X_h). \quad (3.7)$$

Die Charakterwerte von $a_{\mathbf{G}}(f_h)$ sollen nun berechnet werden.

Es seien $\mathbf{C} \subset \mathbf{G}$ der Abschluß der von einem Element $g \in \mathbf{G}$ erzeugten zyklischen Untergruppe und $i_X : X^{\mathbf{C}} \hookrightarrow X$ sowie $i_Y : Y^{\mathbf{C}} \hookrightarrow Y$ die Inklusionen der jeweiligen \mathbf{C} -Fixpunktmenge. Wir können, da X_h und Y_h – mit den entsprechenden Restriktionen – stabil komplex lineare \mathbf{C} -Homotopiedarstellungen sind und $a_{\mathbf{G}}(f_h)(g) = a_{\mathbf{C}}(f_h)(g)$, o. E. annehmen, daß $\mathbf{C} = \mathbf{G}$. Mit der Einschränkung $f^{\mathbf{C}} : X^{\mathbf{C}} \rightarrow Y^{\mathbf{C}}$ von f auf die Fixpunktmenge kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{\mathbf{C}}^*(\sigma Y) & \xrightarrow{f^*} & \tilde{K}_{\mathbf{C}}^*(\sigma X) \\ \downarrow i_Y^* & & \downarrow i_X^* \\ \tilde{K}_{\mathbf{C}}^*(\sigma Y^{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{(f^{\mathbf{C}})^*} & \tilde{K}_{\mathbf{C}}^*(\sigma X^{\mathbf{C}}). \end{array}$$

Wir definieren nun die Elemente $\lambda_{\mathbf{C}}(X_h)$ und $\lambda_{\mathbf{C}}(Y_h) \in R(\mathbf{C})$ so, daß

$$i_Y^*(b(Y_h)) = \lambda_{\mathbf{C}}(Y_h) \cdot b(Y_h^{\mathbf{C}}) \quad (3.8)$$

$$\text{sowie } i_X^*(b(X_h)) = \lambda_{\mathbf{C}}(X_h) \cdot b(X_h^{\mathbf{C}}). \quad (3.9)$$

Da $f^{\mathbf{C}}$ eine Abbildung zwischen Homotopiesphären mit trivialer \mathbf{C} -Operation ist, gilt

$$(f^{\mathbf{C}})^*(b(Y_h^{\mathbf{C}})) = \deg(f^{\mathbf{C}}) \cdot b(X_h^{\mathbf{C}}), \quad (3.10)$$

wobei $\deg(f^{\mathbf{C}})$ der in Abschnitt 1.1.2 definierte Abbildungsgrad von $f^{\mathbf{C}}$ ist (siehe dazu auch [4], II §1). Wegen der Kommutativität obigen Diagrammes erhalten wir also

$$\begin{aligned} i_X^* \circ f^*(b(Y_h)) &= a_{\mathbf{C}}(f_h) \lambda_{\mathbf{C}}(X_h) \cdot b(X_h^{\mathbf{C}}) \\ &= (f^{\mathbf{C}})^* \circ i_Y^*(b(Y_h)) \\ &= \deg(f^{\mathbf{C}}) \lambda_{\mathbf{C}}(Y_h) \cdot b(X_h^{\mathbf{C}}), \end{aligned}$$

und damit, wegen des Bottisomorphismus für $X_h^{\mathbf{C}}$,

$$a_{\mathbf{C}}(f_h) \lambda_{\mathbf{C}}(X_h) = \lambda_{\mathbf{C}}(Y_h) \deg(f^{\mathbf{C}}). \quad (3.11)$$

Nun gilt es, die Charakterwerte $\lambda_{\mathbf{C}}(X_h)(g)$ und $\lambda_{\mathbf{C}}(Y_h)(g)$ für den Erzeuger g von \mathbf{C} zu berechnen.

Bemerkung 3.7 Sei \mathbf{C} eine kompakte Liesche Gruppe und $X_h = (X, h : X * SV \rightarrow SW)$ eine stabil komplex lineare \mathbf{C} -Homotopiedarstellung. Dann gilt

$$\lambda_{\mathbf{C}}(X_h) \cdot e(V_{\mathbf{C}}) = e(W_{\mathbf{C}}) \cdot \text{deg}(h^{\mathbf{C}}).$$

Beweis: Mit der durch die Inklusion der Null in $DV_{\mathbf{C}}$ induzierten Abbildung

$$\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \rightarrow \sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}}$$

kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}}) & \longrightarrow & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X) \xrightarrow{(id \wedge i_X)^*} \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X^{\mathbf{C}}) \\ \Big| \cong & & \Big| \cong \\ \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma(X * SV)) & \xrightarrow{i_{X*SV}^*} & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma(X * SV)^{\mathbf{C}}). \end{array}$$

Sind weiterhin $i_W : SW^{\mathbf{C}} \hookrightarrow SW$ die Inklusion der Fixpunktmenge sowie, wie im Beweis zu Satz 3.3, $W = V^{\mathbf{C}} \oplus W'$ und

$$h' : \sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}} \rightarrow \sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma SW'$$

die durch $h : X * SV \rightarrow SW$ induzierte \mathbf{C} -Homotopieäquivalenz, so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma SW'^{\mathbf{C}}) \\ & & & & \uparrow i_W^* \\ & & & & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X^{\mathbf{C}}) \\ & & & & \uparrow \cdot e(V_{\mathbf{C}}) \\ & & & & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X) \xleftarrow{(id \wedge i_X)^*} \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X^{\mathbf{C}}) \\ & & & & \uparrow \cdot e(V_{\mathbf{C}}) \\ & & & & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}}) \xleftarrow{(id \wedge i_X)^*} \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X) \xrightarrow{\cdot b(V_{\mathbf{C}})} \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X \wedge \sigma SV_{\mathbf{C}}) \\ & & & & \uparrow \cdot b(X_h) \quad \uparrow (h')^* \\ & & & & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}}) \xrightarrow{\cdot b(W')} \tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma SW') \end{array}$$

Wegen

$$(h'^{\mathbf{C}})^*(b(V^{\mathbf{C}})b(W'^{\mathbf{C}})) = \text{deg}(h^{\mathbf{C}}) \cdot b(V^{\mathbf{C}})b(X_h^{\mathbf{C}})$$

und $\deg(h'^{\mathbf{C}}) = \deg(h^{\mathbf{C}})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(h'^{\mathbf{C}})^* \circ i_W^* (b(V^{\mathbf{C}})b(W')) &= (h'^{\mathbf{C}})^* (e(W_{\mathbf{C}}) \cdot b(V^{\mathbf{C}})b(W'^{\mathbf{C}})) \\
&= \deg(h^{\mathbf{C}}) e(W_{\mathbf{C}}) \cdot b(V^{\mathbf{C}})b(X_h^{\mathbf{C}}) \\
&= e(V_{\mathbf{C}}) \cdot (id \wedge i_X)^* (b(V^{\mathbf{C}})b(X_h)) \\
&= e(V_{\mathbf{C}}) \lambda_{\mathbf{C}}(X_h) \cdot b(V^{\mathbf{C}})b(X_h^{\mathbf{C}}),
\end{aligned}$$

und somit, da $b(V^{\mathbf{C}})b(X_h^{\mathbf{C}})$ den freien $R(\mathbf{C})$ -Modul $\tilde{K}_{\mathbf{C}}(\sigma SV^{\mathbf{C}} \wedge \sigma X^{\mathbf{C}})$ erzeugt,

$$\deg(h^{\mathbf{C}})e(W_{\mathbf{C}}) = e(V_{\mathbf{C}})\lambda_{\mathbf{C}}(X_h),$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. \square

Erzeugt g topologisch die abgeschlossene Untergruppe $\mathbf{C} \subset \mathbf{G}$, so ist, wie auf Seite 38 erläutert, $e(V_{\mathbf{C}})(g) \neq 0$.

Folgerung 3.8 *Es sei \mathbf{C} der Abschluß der von $g \in \mathbf{G}$ erzeugten zyklischen Untergruppe. Dann ist in der obigen Situation für $X_h = (X, h : X * SV \rightarrow SW)$*

$$\lambda(X_h)(g) := \lambda_{\mathbf{C}}(X_h)(g) = \frac{e(W_{\mathbf{C}})(g)}{e(V_{\mathbf{C}})(g)} \cdot \deg(h^{\mathbf{C}}) \neq 0. \quad (3.12)$$

Auch für diese Klassenfunktionen $\lambda(X_h)$ gilt, genauso wie für die Eulerklassen $e(X_h)$, die multiplikative Formel

$$\lambda((X * Y)_h) = \lambda(X_h)\lambda(Y_h). \quad (3.13)$$

Wir haben hiermit den Charakter des äquivarianten K -theoretischen Abbildungsgrades $a_{\mathbf{G}}(f_h) \in R(\mathbf{G})$ von $f : X \rightarrow Y$ aus (3.7), d. h.

$$a_{\mathbf{G}}(f_h)(g) = a_{\mathbf{C}}(f_h)(g) = \frac{\lambda(Y_h)(g)}{\lambda(X_h)(g)} \cdot \deg(f^{\mathbf{C}}) \quad (g \in \mathbf{G}, \overline{\langle g \rangle} = \mathbf{C}) \quad (3.14)$$

(nach Gleichung (3.11)), berechnet.

Nehmen wir vorübergehend an, daß \mathbf{G} endlich ist, so gilt nach den Orthogonalitätsrelationen für jede virtuelle Darstellung χ von \mathbf{G}

$$\sum_{g \in \mathbf{G}} \chi(g) = |\mathbf{G}| \cdot \langle \chi, 1 \rangle_{\mathbf{G}} = |\mathbf{G}| \cdot \dim \chi^{\mathbf{G}}$$

(wobei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{G}}$ das innere Produkt im Darstellungsring bezeichnet werde); wir haben also

$$\sum_{g \in \mathbf{G}} a_{\mathbf{G}}(f_h)(g) \equiv 0 \pmod{|\mathbf{G}|}. \quad (3.15)$$

Es seien \mathbf{C}^* die erzeugenden Elemente einer zyklischen Gruppe \mathbf{C} . Definieren wir zusammenfassend für jede zyklische Untergruppe \mathbf{C} von \mathbf{G}

$$n(Y_h - X_h, \mathbf{C}) := \sum_{g \in \mathbf{C}^*} \frac{\lambda(Y_h)(g)}{\lambda(X_h)(g)} \in \mathbb{C}$$

(wobei diese Summe nur von der Konjugationsklasse von \mathbf{C} in \mathbf{G} abhängt), so erfüllen also die Abbildungsgrade von $f : X \rightarrow Y$ die Kongruenz

$$\sum_{\mathbf{C} \subset \mathbf{G} \text{ zyklisch}} n(Y_h - X_h, \mathbf{C}) \cdot \deg(f^{\mathbf{C}}) \equiv 0 \pmod{|\mathbf{G}|}.$$

Lemma 3.9 *Die Koeffizienten $n(Y_h - X_h, \mathbf{C})$ sind ganze Zahlen.*

Beweis: (Siehe auch tom Dieck [17], Lemma II.(5.10).) Es sei o. E. $|\mathbf{C}| = n \neq 1$ und $\xi := e^{2\pi i/n}$. Da für alle $g \in \mathbf{C}$ $\lambda(Y_h)(g)$ und $\lambda(X_h)(g)$ in $\mathbb{Q}(\xi)$ liegen, gilt dies auch für $n(Y_h - X_h, \mathbf{C})$. Ist $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ die Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\xi)$ über \mathbb{Q} , wobei Γ isomorph zu $(\mathbb{Z}/|\mathbf{C}|)^*$ ist vermöge $(\mathbb{Z}/|\mathbf{C}|)^* \ni k \mapsto (\gamma_k : \xi \mapsto \xi^k) \in \Gamma$, so operiert Γ auch auf $R(\mathbf{C})$ mittels GaloisKonjugation der Charakterwerte. γ_k entspricht dabei der Adams-Operation

$$\begin{aligned} \psi^k : R(\mathbf{C}) &\longrightarrow R(\mathbf{C}) \\ \chi &\longmapsto (\psi^k \chi : g \mapsto \chi(g^k)). \end{aligned}$$

Wegen der Summation über die erzeugenden Elemente von \mathbf{C} ist

$$n(Y_h - X_h, \mathbf{C}) = \pm \sum_{g \in \mathbf{C}^*} \frac{e((W_Y)_{\mathbf{C}})e((V_X)_{\mathbf{C}})}{e((W_X)_{\mathbf{C}})e((V_Y)_{\mathbf{C}})}(g)$$

daher invariant unter Γ und damit $n(Y_h - X_h, \mathbf{C}) \in \mathbb{Q}$. Andererseits ist $n(Y_h - X_h, \mathbf{C})$ aber auch ganz über \mathbb{Z} : Es sei

$$R_0(\mathbf{G}) := \{V - W \in R(\mathbf{G}) \mid \text{Dim}_{\mathbf{G}}(SV) = \text{Dim}_{\mathbf{G}}(SW)\}. \quad (3.16)$$

Ist $\mathbb{Z}[\Gamma]$ der ganzzahlige Gruppenring von Γ und

$$I(\Gamma) = \left\{ \sum n_i \gamma_i \in \mathbb{Z}[\Gamma] \mid n_i \in \mathbb{Z}, \gamma_i \in \Gamma; \sum n_i = 0 \right\}$$

das Augmentationsideal, so gilt

$$R_0(\mathbf{G}) = I(\Gamma)R(\mathbf{G}) \quad (3.17)$$

(siehe z. B. [17], III.(5.8) und (5.9) oder [26], Prop. 3.17; die dort gegebenen Beweise für den reellen Darstellungsringsring $RO(\mathbf{G})$ sind genauso für $R(\mathbf{G})$ durchführbar). Demnach ist $\frac{e((W_Y \oplus V_X)_{\mathbf{C}})}{e((W_X \oplus V_Y)_{\mathbf{C}})}(g)$ also ein Produkt von Quotienten der Form $\frac{1-\xi^l}{1-\xi^k}$, wobei $ggT(l, n) = ggT(k, n)$. Für t mit $t \cdot k \equiv l \pmod{n}$ ist

$$\frac{1-\xi^l}{1-\xi^k} = \sum_{j=0}^{t-1} (\xi^k)^j \in \mathbb{Z}[\xi],$$

somit ist auch $n(Y_h - X_h, \mathbf{C}) \in \mathbb{Z}[\xi]$, also ganz algebraisch. Jede ganz algebraische Zahl $\in \mathbb{Q}$ ist aber bereits $\in \mathbb{Z}$. \square

Bisher war angenommen worden, daß die Gruppe \mathbf{G} endlich ist. Gehen wir nun von einer beliebigen kompakten Lieschen Gruppe \mathbf{G} aus, so ist für jede abgeschlossene Untergruppe \mathbf{H} von \mathbf{G} $X_h^{\mathbf{H}}$ bzw. $Y_h^{\mathbf{H}}$ eine stabil komplex lineare $W\mathbf{H}$ -Homotopiedarstellung (siehe Bemerkung 1.2 sowie (3.1)) und $f^{\mathbf{H}} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ eine $W\mathbf{H}$ -Abbildung. So erhalten wir für jedes \mathbf{H} mit endlicher Weylgruppe $W\mathbf{H}$ eine Kongruenz

$$\sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} \deg(f^{\mathbf{K}}) \equiv 0 \pmod{|W\mathbf{H}|},$$

wobei

$$n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} := \frac{\deg(h_X^{\mathbf{H}})}{\deg(h_Y^{\mathbf{H}})} \cdot n(Y_h^{\mathbf{H}} - X_h^{\mathbf{H}}, \mathbf{K}/\mathbf{H}) \in \mathbb{Z}.$$

Speziell ist $n_{\mathbf{H},\mathbf{H}} = 1$. Außerdem hängen die $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$ nur von den entsprechenden Konjugationsklassen von \mathbf{H} und \mathbf{K} ab, d. h. $n_{g\mathbf{H}g^{-1}, g\mathbf{K}g^{-1}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H}, n\mathbf{K}n^{-1}}$ für alle $g \in \mathbf{G}$, $n \in N\mathbf{H}$.

Satz 3.10 *Es seien $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ und $Y_h = (Y, h_Y : Y * SV_Y \rightarrow SW_Y)$ zwei kohärent orientierte, stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion $D \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$, sowie $d \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$. Genau dann ist d Gradfunktion einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$, wenn (i) und (ii) erfüllt sind:*

(i) *Für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G}) \cap Iso(X)$ ist*

$$d(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ \mathbf{1} \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} \cdot d(\mathbf{K}) \pmod{|W\mathbf{H}|},$$

wobei für die Koeffizienten dieser Kongruenzen gilt

$$n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = \frac{\deg(h_X^{\mathbf{H}})}{\deg(h_Y^{\mathbf{H}})} \sum_{g \in (\mathbf{K}/\mathbf{H})^*} \frac{\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})(g)}{\lambda(X_h^{\mathbf{H}})(g)}.$$

(ii) *d erfüllt die Instabilitätsbedingungen $B(D)$, d. h.*

- (a) *d ist konstant auf Konjugationsklassen,*
- (b) *$d(\mathbf{H}) = 1$ falls $D(\mathbf{H}) = 0$,*
- (c) *$d(\mathbf{H}) = d(\mathbf{H}')$ für alle $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{H}'$ mit $D(\mathbf{H}) = D(\mathbf{H}')$.*

Weiterhin erfüllt die Gradfunktion $d(f)$ einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ die Kongruenzen aus (i) auch für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$.

Bemerkung 3.11 Definieren wir $n'_{\mathbf{H},\mathbf{K}} := |N\mathbf{H}/N\mathbf{H} \cap N\mathbf{K}| \cdot n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$, so können die Kongruenzen aus (i) ersetzt werden durch

$$d(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{(\mathbf{K}): \mathbf{H} < \mathbf{K} \\ \mathbf{1} \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n'_{\mathbf{H},\mathbf{K}} \cdot d(\mathbf{K}) \pmod{|W\mathbf{H}|},$$

wobei dann über $N\mathbf{H}$ -Konjugationsklassen solcher \mathbf{K} summiert wird. Dabei ist die Kongruenz für $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ nur von der Konjugationsklasse von \mathbf{H} in \mathbf{G} abhängig, der Satz kann somit auch für Abbildungen $d \in \mathcal{C}(\Phi'(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ formuliert werden. Wir haben dies hier nicht getan, weil für uns die einzelnen Summanden $\pm \frac{\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})(g)}{\lambda(X_h^{\mathbf{H}})(g)}$ der Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$ in ihrer Eigenschaft als Werte von Klassenfunktionen auf $W\mathbf{H}$ von Bedeutung sind.

Beweis des Satzes 3.10: Daß die Gradfunktion $d(f)$ einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stets die Kongruenzen aus (i) erfüllt, haben wir soeben hergeleitet. Die Behauptung folgt also mit Satz 1.21. \square

3.3 Invarianten für stabil komplex lineare Homotopiedarstellungen

Aus Satz 3.10 kann man ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Äquivalenz zweier stabil komplex linearer \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen herleiten. Aus jeder Konjugationsklasse (\mathbf{H}) von Untergruppen $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ wählen wir eine Untergruppe \mathbf{H}' fest aus, $\Phi_V(\mathbf{G}) \subset \Phi(\mathbf{G})$ sei die Menge dieser Vertreterinnen.

Satz 3.12 Seien $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ und $Y_h = (Y, h_Y : Y * SV_Y \rightarrow SW_Y)$ zwei kohärent orientierte, stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion $D \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$. Dann sind äquivalent:

- (1) X und Y sind \mathbf{G} -homotopieäquivalent.
- (2) Es gibt eine stetige Funktion $\epsilon \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$, die die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ erfüllt, sowie für alle $\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G}) \cap \text{Iso}(X) = \Phi_V(\mathbf{G}) \cap \text{Iso}(D)$ ein $\tau_{\mathbf{H}} \in R(W\mathbf{H})^*$, s. d. für jedes $g \in W\mathbf{H} = N\mathbf{H}/\mathbf{H}$, das eine Untergruppe $\mathbf{K}/\mathbf{H} \subseteq W\mathbf{H}$ erzeugt, gilt

$$\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})(g) = \lambda(X_h^{\mathbf{H}})(g) \cdot \frac{\tau_{\mathbf{H}}(g)}{\epsilon(\mathbf{K})}.$$

- (3) Es gibt eine stetige Funktion $\epsilon \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$, die die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ erfüllt, sowie für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ ein $\tau_{\mathbf{H}} \in R(W\mathbf{H})^*$, s. d. für jedes $g \in W\mathbf{H}$, das topologisch eine (abgeschlossene) Untergruppe $\mathbf{K}/\mathbf{H} \subseteq W\mathbf{H}$ erzeugt, gilt

$$\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})(g) = \lambda(X_h^{\mathbf{H}})(g) \cdot \frac{\tau_{\mathbf{H}}(g)}{\epsilon(\mathbf{K})}.$$

Ist (2) (und damit auch (1) und (3)) erfüllt, so ist $\epsilon \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$ die Gradfunktion einer \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $X \rightarrow Y$. Weiterhin gilt für die Eulerklassen von $Y_h^{\mathbf{H}}$ bzw. $X_h^{\mathbf{H}}$

$$e(Y_h^{\mathbf{H}}) = \tau_{\mathbf{H}} \cdot e(X_h^{\mathbf{H}})$$

für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$.

Beweis: ((3) \implies (2)) ist klar.

((2) \implies (1)): Es seien $\epsilon \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$ (also $\epsilon(\mathbf{K}) = \pm 1$ für alle $\mathbf{K} \in \Phi(\mathbf{G})$) und die $\tau_{\mathbf{H}} \in R(W\mathbf{H})^*$ für alle $\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G}) \cap Iso(X)$ mit den unter (2) genannten Eigenschaften gegeben. Dann ist also für solche \mathbf{H} und jede zyklische Untergruppe \mathbf{K}/\mathbf{H} von $W\mathbf{H}$

$$n(Y_h^{\mathbf{H}} - X_h^{\mathbf{H}}, \mathbf{K}/\mathbf{H}) = \sum_{g \in (\mathbf{K}/\mathbf{H})^*} \frac{\tau_{\mathbf{H}}(g)}{\epsilon(\mathbf{K})}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{H}) + \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \cdot \epsilon(\mathbf{K}) &= \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} \frac{\deg(h_X^{\mathbf{H}})}{\deg(h_Y^{\mathbf{H}})} n(Y_h^{\mathbf{H}} - X_h^{\mathbf{H}}, \mathbf{K}/\mathbf{H}) \cdot \epsilon(\mathbf{K}) \\ &= \pm \sum_{g \in W\mathbf{H}} \tau_{\mathbf{H}}(g) \equiv 0 \pmod{|W\mathbf{H}|}, \end{aligned}$$

d. h. ϵ erfüllt für alle $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G}) \cap Iso(X)$ die Kongruenzen aus Theorem 3.10 (die nur von der Konjugationsklasse von \mathbf{H} in \mathbf{G} abhängen). Da nach Voraussetzung auch die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ von ϵ erfüllt werden, ist ϵ als Gradfunktion einer \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $h : X \rightarrow Y$ realisierbar.

((1) \implies (3)): Sei nun umgekehrt $h : X \rightarrow Y$ eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz. Dann ist für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ die dadurch induzierte Abbildung $h^{\mathbf{H}} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ eine $W\mathbf{H}$ -Homotopieäquivalenz, die einen Isomorphismus

$$(h^{\mathbf{H}})^* : \tilde{K}_{W\mathbf{H}}(\sigma Y^{\mathbf{H}}) \rightarrow \tilde{K}_{W\mathbf{H}}(\sigma X^{\mathbf{H}})$$

von $R(W\mathbf{H})$ -Moduln liefert; für die jeweiligen Erzeuger $b(Y_h^{\mathbf{H}})$ bzw. $b(X_h^{\mathbf{H}})$ gilt also

$$(h^{\mathbf{H}})^*(b(Y_h^{\mathbf{H}})) = \tau_{\mathbf{H}} \cdot b(X_h^{\mathbf{H}})$$

mit einer Einheit $\tau_{\mathbf{H}} \in R(W\mathbf{H})^*$. Sei \mathbf{H} normal in \mathbf{K} . Wir betrachten $h^{\mathbf{H}} : X^{\mathbf{H}} \rightarrow Y^{\mathbf{H}}$ als \mathbf{K}/\mathbf{H} -Homotopieäquivalenz. Mit den entsprechenden Inklusionen i_Y und i_X kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(\sigma Y^{\mathbf{H}}) & \xrightarrow{(h^{\mathbf{H}})^*} & \tilde{K}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(\sigma X^{\mathbf{H}}) \\ \downarrow i_Y^* & & \downarrow i_X^* \\ \tilde{K}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(\sigma Y^{\mathbf{K}}) & \xrightarrow{(h^{\mathbf{K}})^*} & \tilde{K}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(\sigma X^{\mathbf{K}}) \end{array} .$$

Also ist

$$\begin{aligned}
i_X^* \circ (h^{\mathbf{H}})^*(b(Y_h^{\mathbf{H}})) &= \text{Res}_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}^{W\mathbf{H}}(\tau_{\mathbf{H}})\lambda_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(X_h^{\mathbf{H}}) \cdot b(X_h^{\mathbf{K}}) \\
&= (h^{\mathbf{K}})^* \circ i_Y^*(b(Y_h^{\mathbf{H}})) \\
&= \lambda_{\mathbf{K}/\mathbf{H}}(Y_h^{\mathbf{H}})\text{deg}(h^{\mathbf{K}}) \cdot b(X_h^{\mathbf{K}}),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung (3) wegen der Bottperiodizität für $X_h^{\mathbf{K}}$ unmittelbar folgt, wenn man für ϵ die Gradfunktion $d(h)$ von h wählt.

Sind (1) bis (3) erfüllt, so liefert (wiederum mit den Inklusionen der Null in die entsprechenden Kegel) das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{K}_{W\mathbf{H}}(\sigma Y^{\mathbf{H}}) & \xrightarrow{(h^{\mathbf{H}})^*} & \tilde{K}_{W\mathbf{H}}(\sigma X^{\mathbf{H}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{W\mathbf{H}}(\star) & \xrightarrow{(h^{\mathbf{H}})^* = id} & K_{W\mathbf{H}}(\star)
\end{array}$$

außerdem $e(Y_h^{\mathbf{H}}) = \tau_{\mathbf{H}} \cdot e(X_h^{\mathbf{H}})$. □

Die Frage nach orientierter Äquivalenz zweier \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen ist mit den hier entwickelten Methoden nur beantwortbar, wenn die Gruppe \mathbf{G} endlich ist: in diesem Fall ist $\Phi(\mathbf{G}) = \Psi(\mathbf{G})$. Genau dann kann also für zwei stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen X_h und Y_h bei Kenntnis der Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(X_h, Y_h)$ der Kongruenzen aus Satz 3.10 geprüft werden, ob eine \mathbf{G} -Abbildung $h : X \rightarrow Y$ mit $\text{deg}(h^{\mathbf{H}}) = 1$ für alle Untergruppen \mathbf{H} von \mathbf{G} , also eine orientierte \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz, existiert. Wir erhalten

Satz 3.13 *Die Gruppe \mathbf{G} sei endlich, und X_h und Y_h seien zwei kohärent orientierte, stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen der gleichen Dimensionsfunktion D . Dann sind äquivalent:*

- (1) X und Y sind orientiert \mathbf{G} -homotopieäquivalent.
- (2) X und Y sind stabil orientiert \mathbf{G} -homotopieäquivalent.
- (3) Für alle $\mathbf{H} \in \text{Iso}(X) \cap \Psi_V(\mathbf{G}) = \text{Iso}(D) \cap \Psi_V(\mathbf{G})$ ist $\frac{\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})}{\lambda(X_h^{\mathbf{H}})} \in R(W\mathbf{H})^*$.
- (4) Für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ ist $\frac{\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})}{\lambda(X_h^{\mathbf{H}})} \in R(W\mathbf{H})^*$.

Beweis: Da die konstante Funktion $\epsilon \equiv 1 : \Psi(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{Z}^*$ die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ für jede Dimensionsfunktion D erfüllt, folgt nach Satz 3.12 aus (3), daß eine orientierte Äquivalenz $X \rightarrow Y$ existiert. Zu zeigen ist also nur die Implikation ((2) \implies (4)):

gilt aber für eine Homotopiedarstellung Z , daß $X * Z$ und $Y * Z$ orientiert äquivalent sind, so ist nach Satz 3.12

$$R(W\mathbf{H})^* \ni \frac{\lambda((Y * Z)_h^{\mathbf{H}})}{\lambda((X * Z)_h^{\mathbf{H}})} = \frac{\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})\lambda(Z_h^{\mathbf{H}})}{\lambda(X_h^{\mathbf{H}})\lambda(Z_h^{\mathbf{H}})} = \frac{\lambda(Y_h^{\mathbf{H}})}{\lambda(X_h^{\mathbf{H}})}$$

für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$.

Zu ((1) \iff (2)) siehe auch Laitinen [24], Theorem 4. \square

Da die für eine stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung X gewählte Orientierung im wesentlichen willkürlich ist, ist die Frage nach orientierter \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz im allgemeinen müßig. Interessant ist sie ausschließlich, wenn wir uns mit komplexen Darstellungssphären SV beschäftigen: Orientierung und Bottklasse können dann in kanonischer Weise, d. h. induziert durch die komplexe Struktur des jeweiligen Vektorraumes V , gewählt werden, woraus offensichtlich

$$\lambda(V)_{\mathbf{H}}(g) := \lambda(SV_h^{\mathbf{H}})(g) = e((V^{\mathbf{H}})_{\mathbf{C}})(g) \quad (\mathbf{H} \subset \mathbf{G}, g \in W\mathbf{H}) \quad (3.18)$$

folgt (wobei $\mathbf{C} \subset W\mathbf{H}$ die von dem Element g erzeugte zyklische Untergruppe sei). $\lambda(V)_{\mathbf{H}}$ ist also eine mit Hilfe von K -theoretischen Eulerklassen definierte, nur von der Isomorphieklasse von V abhängige Klassenfunktion.

Folgerung 3.14 *Ist die Gruppe \mathbf{G} endlich, so sind zwei komplexe Darstellungssphären SV und SW genau dann orientiert äquivalent bzw. stabil orientiert äquivalent, wenn*

$$\frac{\lambda(V)_{\mathbf{H}}}{\lambda(W)_{\mathbf{H}}} \in R(W\mathbf{H})^*$$

für alle $\mathbf{H} \in Iso(SV) \cap \Psi_V(\mathbf{G}) = Iso(SW) \cap \Psi_V(\mathbf{G})$. \square

Wir werden im nächsten Abschnitt 3.4 beweisen, daß wir uns in dem Fall, daß \mathbf{G} eine p -Gruppe ist ($p \neq 2$ prim), in der Formulierung obiger Folgerung auf die triviale Untergruppe $\mathbf{H} = \mathbf{1}$ beschränken können, d. h. SV und SW sind genau dann (stabil) orientiert äquivalent, wenn $\frac{\lambda(V)_{\mathbf{1}}}{\lambda(W)_{\mathbf{1}}} \in R(\mathbf{G})^*$.

Man kann Satz 3.12 auch benutzen, um die Frage nach stabiler Äquivalenz komplexer Darstellungssphären zu beantworten.

Satz 3.15 *Es seien V und W zwei komplexe \mathbf{G} -Darstellungen der gleichen Dimensionsfunktion. Dann sind äquivalent:*

- (1) *SV und SW sind stabil \mathbf{G} -homotopieäquivalent.*
- (2) *Es gibt eine stetige Funktion $\epsilon \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$, die konstant auf Konjugationsklassen von Untergruppen ist, sowie für alle $\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})$ ein $\tau_{\mathbf{H}} \in R(W\mathbf{H})^*$, s. d. für jedes $g \in W\mathbf{H}$, das eine Untergruppe $\mathbf{K}/\mathbf{H} \subseteq W\mathbf{H}$ erzeugt, gilt*

$$\lambda(V)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda(W)_{\mathbf{H}}(g) \cdot \frac{\tau_{\mathbf{H}}(g)}{\epsilon(\mathbf{K})}.$$

Beweis: Ist U eine \mathbf{G} -Darstellung, so sei $Iso'(U)$ die Menge der Konjugationsklassen von Isotropiegruppen von SU . Für jede stetige Funktion $\epsilon \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$, die konstant auf Konjugationsklassen ist, existiert eine endliche Menge $Iso(\epsilon)$ von Konjugationsklassen von Untergruppen von \mathbf{G} , abgeschlossen unter Durchschnitten, so daß es für jedes $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ ein eindeutig bestimmtes minimales Element $\bar{\mathbf{H}} \supset \mathbf{H}$ gibt, s. d. $(\bar{\mathbf{H}}) \in Iso(\epsilon)$ und $\epsilon(\mathbf{H}) = \epsilon(\mathbf{L}) = \epsilon(\bar{\mathbf{H}})$ für alle $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \bar{\mathbf{H}}$. Weiterhin existiert für jede endliche Menge M von Konjugationsklassen von Untergruppen von \mathbf{G} eine (o. E. komplexe) \mathbf{G} -Darstellung U , so daß $Iso'(U)$ abgeschlossen unter Durchschnitten ist und $Iso'(U) \supset M$ (Bauer [5], Lemma (2.4)).

Ist $\epsilon \in \mathcal{C}(\Phi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$ aus (2) gegeben und $Iso(\epsilon)$ mit den obigen Eigenschaften entsprechend definiert, so können wir also eine komplexe \mathbf{G} -Darstellung U finden, s. d. $Iso'(U)$ abgeschlossen unter Durchschnitten ist und $Iso'(U) \supset \{(\mathbf{G})\} \cup Iso(\epsilon) \cup Iso'(V)$. Insbesondere ist $Iso'(U) = Iso'(V \oplus U)$. Damit erfüllt ϵ die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ für $D = \text{Dim}_{\mathbf{G}}(S(V \oplus U)) = \text{Dim}_{\mathbf{G}}(S(W \oplus U))$:

Wegen $(\mathbf{G}) \in Iso'(V \oplus U)$ ist $D(\mathbf{G}) \geq 2$. Ist $\mathbf{H} \subset \mathbf{K}$ mit $D(\mathbf{H}) = D(\mathbf{K})$ gegeben, so ist wegen $\mathbf{H} \subset \mathbf{K} \subset \bar{\mathbf{K}}$ nach Voraussetzung auch $\mathbf{H} \subset \bar{\mathbf{H}} \cap \bar{\mathbf{K}} \in Iso(\epsilon)$, und da $\bar{\mathbf{H}}$ eindeutig war, ist also $\bar{\mathbf{H}} \subset \bar{\mathbf{K}}$. Nach Voraussetzung ist $\mathbf{H} \subset \mathbf{K} \subset m(D, \mathbf{H}) = m(D, \mathbf{K}) =: \mathbf{M} \in Iso(V \oplus U)$ (siehe Lemma 1.10) und damit auch $\bar{\mathbf{H}} \cap \mathbf{M} \in Iso(V \oplus U)$. Wäre $\mathbf{M} \not\supseteq \bar{\mathbf{H}} \cap \mathbf{M} \supset \mathbf{H}$, so erhielten wir die unseren Annahmen widersprechende Ungleichung $D(\mathbf{M}) < D(\bar{\mathbf{H}} \cap \mathbf{M}) \leq D(\mathbf{H})$, also ist $\mathbf{H} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{M} \subset \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{K}}$ und demnach $\epsilon(\mathbf{H}) = \epsilon(\mathbf{K})$.

Nach Satz 3.12 sind $S(V \oplus U)$ und $S(W \oplus U)$ also \mathbf{G} -homotopieäquivalent.

Die Umkehrung ((1) \implies (2)) folgt wie im Beweis von Satz 3.13. \square

Wir wollen diese Ergebnisse nun zusammenfassend, mit Hilfe bestimmter Faktorgruppen, beschreiben.

Für $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ sei $\mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})$ der Ring der Klassenfunktionen $W\mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, mit der Multiplikation $(\tau \cdot \varphi)(g) = \tau(g) \cdot \varphi(g)$, und $\mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$ seine Einheitengruppe. Dann ist

$$\mathcal{K}^*(\mathbf{G}) := \prod_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^* \quad (3.19)$$

eine abelsche Gruppe durch komponentenweise Multiplikation

$$\left(\tau_{\mathbf{H}} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} \cdot \left(\varphi_{\mathbf{H}} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} := \left(\tau_{\mathbf{H}} \cdot \varphi_{\mathbf{H}} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})},$$

mit Untergruppe

$$\mathcal{R}^*(\mathbf{G}) := \prod_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} R(W\mathbf{H})^* \subset \mathcal{K}^*(\mathbf{G}). \quad (3.20)$$

Sei $D \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ die Dimensionsfunktion einer \mathbf{G} -Homotopiedarstellung. Dann definieren wir des weiteren

$$\mathcal{K}_D^*(\mathbf{G}) := \prod_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G}) \cap Iso(D)} \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^* \subset \mathcal{K}^*(\mathbf{G}) \quad (3.21)$$

sowie

$$\mathcal{R}_D^*(\mathbf{G}) := \prod_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G}) \cap Iso(D)} R(W\mathbf{H})^* \subset \mathcal{R}^*(\mathbf{G}), \quad (3.22)$$

wobei $\mathcal{R}_D^*(\mathbf{G}) \subset \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G})$. Sei außerdem $\mathcal{E}'(\mathbf{G})$ die multiplikative Gruppe der stetigen Funktionen $\Phi(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{Z}^*$, die konstant auf Konjugationsklassen sind. Zu jedem $\epsilon \in \mathcal{E}'(\mathbf{G})$ definieren wir $\epsilon_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$ durch

$$\epsilon_{\mathbf{H}}(g\mathbf{H}) := \epsilon(\langle g, \mathbf{H} \rangle) \quad \text{für } g \in N\mathbf{H}, \quad (3.23)$$

wobei $\langle g, \mathbf{H} \rangle$ die von \mathbf{H} und g erzeugte Untergruppe von \mathbf{G} sei ($\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$). Das Bild des Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(\mathbf{G}) &\longrightarrow \mathcal{K}^*(\mathbf{G}) \\ \epsilon &\longmapsto \left(\epsilon_{\mathbf{H}}^{-1} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} = \left(\epsilon_{\mathbf{H}} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} \end{aligned}$$

in $\mathcal{K}^*(\mathbf{G})$ nennen wir $\mathcal{E}(\mathbf{G})$. Ist $\mathcal{E}'_D(\mathbf{G}) \subset \mathcal{E}'(\mathbf{G})$ die Untergruppe der $\epsilon \in \mathcal{E}'(\mathbf{G})$, die die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ erfüllen, so sei weiterhin

$$\mathcal{E}_D(\mathbf{G}) := \left\{ \left(\epsilon_{\mathbf{H}} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G}) \cap Iso(D)} \in \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G}) \mid \epsilon \in \mathcal{E}'_D(\mathbf{G}) \right\} \subset \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G}).$$

($\mathcal{E}'_D(\mathbf{G})$ und damit auch $\mathcal{E}_D(\mathbf{G})$ beschreiben die Willkür bei der Wahl möglicher Orientierungen für Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D .)

Wir definieren nun folgende Faktorgruppen:

$$\mathcal{J}(\mathbf{G}) := \mathcal{K}^*(\mathbf{G}) / \mathcal{R}^*(\mathbf{G}) \mathcal{E}(\mathbf{G}); \quad (3.24)$$

$$\mathcal{J}_D(\mathbf{G}) := \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G}) / \mathcal{R}_D^*(\mathbf{G}) \mathcal{E}_D(\mathbf{G}); \quad (3.25)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{G})_{\text{or}} := \mathcal{K}^*(\mathbf{G}) / \mathcal{R}^*(\mathbf{G}). \quad (3.26)$$

Weiter sei, falls \mathbf{G} endlich ist,

$$R_h(\mathbf{G}) \subset R_0(\mathbf{G}) \quad (3.27)$$

die Untergruppe der $V - W \in R(\mathbf{G})$, für die SV und SW (stabil) orientiert \mathbf{G} -homotopieäquivalent sind (siehe Satz 3.13).

Ist $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ eine stabil komplex lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung, so haben wir für jedes $\mathbf{H} \in \Phi(\mathbf{G})$ die Klassenfunktion

$$\lambda(X_h)_{\mathbf{H}} := \lambda(X_h^{\mathbf{H}}) \in \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*. \quad (3.28)$$

Nach den Sätzen 3.12 bis 3.15 gilt dann der folgende

Satz 3.16 1. Sei $J_D(\mathbf{G})$ die Menge der Äquivalenzklassen stabil komplex linearer \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D . Dann ist

$$\begin{aligned} \Lambda_D : \quad J_D(\mathbf{G}) &\longrightarrow \mathcal{J}_D(\mathbf{G}) \\ [X] &\longmapsto \Lambda_D[X] := \left[\left(\lambda(X_h)_{\mathbf{H}} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G}) \cap Iso(D)} \right] \end{aligned}$$

eine wohldefinierte und injektive Abbildung.

2. \mathbf{G} sei endlich. Dann ist mit den durch (3.18) definierten Klassenfunktionen $\lambda(V)_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$ die Abbildung

$$\Lambda_{\text{or}} : \quad R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{J}_{\text{or}}(\mathbf{G})$$

$$[V] - [W] \longmapsto \left[\left(\lambda(V)_{\mathbf{H}} \cdot \lambda(W)_{\mathbf{H}}^{-1} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} \right]$$

ein wohldefinierter, injektiver Gruppenhomomorphismus.

3. Ist $J(\mathbf{G}) \subset V(\mathbf{G})$ die Untergruppe der stabil komplex linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen sowie $j(\mathbf{G}) \subset J(\mathbf{G})$ der Kern der Dimensionsfunktion $\text{Dim}_{\mathbf{G}}|J(\mathbf{G})$, so ist die Abbildung

$$\Lambda : \quad j(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{J}(\mathbf{G})$$

$$[SV] - [SW] \longmapsto \left[\left(\lambda(V)_{\mathbf{H}} \cdot \lambda(W)_{\mathbf{H}}^{-1} \right)_{\mathbf{H} \in \Phi_V(\mathbf{G})} \right]$$

ein wohldefinierter, injektiver Gruppenhomomorphismus. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\Lambda_{\text{or}}} & \mathcal{J}_{\text{or}}(\mathbf{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{J}(\mathbf{G}) \end{array}$$

kommutiert. □

3.4 Komplexe Darstellungssphären von p -Gruppen ungerader Ordnung

Im letzten Abschnitt wurde u. a. bewiesen, daß für eine komplexe \mathbf{G} -Darstellung V anhand eines Tupels von Klassenfunktionen $\lambda(V)_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$ der Äquivalenztyp der Darstellungssphäre SV eindeutig beschrieben werden kann. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß für p -Gruppen \mathbf{G} , wobei p eine ungerade Primzahl sei, bereits eine dieser Klassenfunktionen, und zwar die zu der trivialen Gruppe $\mathbf{1} \subset \mathbf{G}$ gehörige $\lambda(V)_{\mathbf{1}} \in \mathcal{K}(\mathbf{G}, \mathbb{C})^*$, ausreicht, um SV bis auf orientierte \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz eindeutig zu beschreiben. In diesem Spezialfall können also die Invarianten zur Beschreibung des orientierten äquivarianten Homotopietyps komplexer Darstellungssphären noch wesentlich vereinfacht werden. Zum Beweis dessen werden Besonderheiten des komplexen Darstellungsrings $R(\mathbf{G})$ für p -Gruppen \mathbf{G} ausgenutzt.

Der Homomorphismus $\Lambda_{\mathbf{G}}$

Die Gruppe \mathbf{G} sei in diesem Abschnitt stets endlich. Wir fassen zunächst einige Ergebnisse des letzten Abschnitts zusammen, teilweise mit leicht veränderter Notation.

Für jede komplexe Darstellung V von \mathbf{G} ist $\tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^V)$ ein freier Modul vom Rang 1 über dem Darstellungsring $R(\mathbf{G})$, erzeugt von der Bottklasse $b(V)$. Eine äquivariante Abbildung $f : SV \rightarrow SW$ zwischen komplexen Darstellungssphären induziert einen $R(\mathbf{G})$ -Modulhomomorphismus $f^* : \tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^W) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{G}}(S^V)$; das Element $a(f) \in R(\mathbf{G})$ mit $f^*b(W) = a(f)b(V)$ wird äquivarianter K -theoretischer Abbildungsgrad von f genannt. Es seien $g \in \mathbf{G}$, \mathbf{C} die von g erzeugte zyklische Untergruppe von \mathbf{G} und $V_{\mathbf{C}}$ das orthogonale Komplement der \mathbf{C} -Fixpunktmenge $V^{\mathbf{C}}$, d. h. $V \cong V^{\mathbf{C}} \oplus V_{\mathbf{C}}$. Der Wert des Charakters der K -theoretischen Eulerklasse $e(V_{\mathbf{C}}) = \lambda_{-1}(V_{\mathbf{C}}) \in R(\mathbf{G})$ von $V_{\mathbf{C}}$ an der Stelle g werde in diesem Kapitel kurz mit $\lambda(V)(g)$ bezeichnet (dieser Wert ist stets $\neq 0$). Es wurde bereits gezeigt (siehe (3.11)), daß der Charakterwert von $a(f)$ an der Stelle g dann

$$a(f)(g) = \frac{\lambda(W)(g)}{\lambda(V)(g)} \cdot \deg(f^{\mathbf{C}})$$

beträgt. Falls f eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz ist, so ist f^* ein Isomorphismus von $R(\mathbf{G})$ -Moduln und deshalb $a(f)$ eine Einheit in $R(\mathbf{G})^*$. Sind SV und SW sogar (stabil) orientiert \mathbf{G} -homotopieäquivalent und $f : SV \rightarrow SW$ die (bis auf äquivariante Homotopie eindeutig bestimmte) orientierte \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz, so ist demnach der Quotient ($g \mapsto \lambda(W)(g)/\lambda(V)(g) = a(f)(g)$) eine Einheit im Darstellungsring $R(\mathbf{G})$. Ist $R_h(\mathbf{G})$ die Untergruppe der $W - V \in R(\mathbf{G})$, für die SV und SW (stabil) orientiert \mathbf{G} -homotopieäquivalent sind, so erhalten wir also einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} a : R_h(\mathbf{G}) &\longrightarrow R(\mathbf{G})^* \\ W - V &\longmapsto a(f) = \lambda(W)/\lambda(V). \end{aligned}$$

Andererseits kann man allen Elementen $W - V \in R_0(\mathbf{G})$, d. h. den $W - V \in R(\mathbf{G})$, für die SW und SV die gleiche Dimensionsfunktion haben, die folgendermaßen definierte Klassenfunktion $\lambda_{\mathbf{G}}(W - V) \in \mathcal{K}(\mathbf{G}, \mathbb{C})^*$ zuordnen:

$$\lambda_{\mathbf{G}}(W - V) : g \longmapsto \frac{\lambda(W)(g)}{\lambda(V)(g)}.$$

Diese liegt in $Q(\mathbf{G})^*$, den Einheiten im ganzen Abschluß $Q(\mathbf{G})$ von $R(\mathbf{G})$ in seinem totalen Quotientenring $Quot(R(\mathbf{G}))$:

Zum einen gibt es stets eine äquivariante Abbildung $f : SV \rightarrow SW$ mit konstanten Abbildungsgraden $\deg(f^{\mathbf{H}}) = |\mathbf{G}|$ für alle Untergruppen $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$, da diese trivialerweise sowohl die Kongruenzen (1.10) als auch die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ (für jede Dimensionsfunktion D) aus Satz 1.21 erfüllen. Also läßt sich $\lambda := \lambda_{\mathbf{G}}(W - V)$ auch als $\lambda = a(f)/|\mathbf{G}| \in \mathbb{Z}^{-1}R(\mathbf{G}) \subset Quot(R(\mathbf{G}))$ darstellen. In dem Beweis zu Lemma 3.9 wurde gezeigt, daß $\lambda(g) \in \mathbb{C}$ für jedes $g \in \mathbf{G}$ ganz algebraisch über \mathbb{Z} ist, es gibt also ein Polynom $p_g \in \mathbb{Z}[X]$ mit $p_g(\lambda(g)) = 0$. Für $p := \prod_{g \in \mathbf{G}} p_g$ gilt dann $p(\lambda) \equiv 0$, d. h. λ ist insbesondere ganz über $R(\mathbf{G})$. Da all dies ebenso auf $\lambda^{-1} = \lambda_{\mathbf{G}}(V - W)$ zutrifft, ist somit $\lambda \in Q(\mathbf{G})^*$.

Wir haben also einen Gruppenhomomorphismus

$$\lambda_{\mathbf{G}} : R_0(\mathbf{G}) \longrightarrow Q(\mathbf{G})^*, \quad (3.29)$$

der, zusammen mit dem zuvor Gesagten, einen Homomorphismus

$$\Lambda_{\mathbf{G}} : R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}) \longrightarrow Q(\mathbf{G})^*/R(\mathbf{G})^* \quad (3.30)$$

liefert. Siehe hierzu auch [18], wo diese Abbildungen aus einem anderen Blickwinkel betrachtet werden: tom Dieck benutzt den Homomorphismus a , um mit topologischen Hilfsmitteln Einheiten des Darstellungsrings $R(\mathbf{G})$ zu konstruieren; es zeigt sich, daß diese Methode „effektiv“ ist, da das Bild von $a \subset R(\mathbf{G})^*$ eine Untergruppe von maximalem Rang ist. In diesem Kontext sagt man, daß \mathbf{G} die Ganzheitseigenschaft für Homotopieäquivalenzen hat, wenn $\Lambda_{\mathbf{G}}$ injektiv ist.

Für unsere Zwecke reicht es, $\Lambda_{\mathbf{G}}$ als Homomorphismus $R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbf{G}, \mathbb{C})^*/R(\mathbf{G})^*$ zu betrachten. Ist $\Lambda_{\text{or}} : R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathcal{K}^*(\mathbf{G})/\mathcal{R}^*(\mathbf{G})$ der in Abschnitt 3.3 definierte injektive Gruppenhomomorphismus und $pr : \mathcal{K}^*(\mathbf{G})/\mathcal{R}^*(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbf{G}, \mathbb{C})^*/R(\mathbf{G})^*$ die Projektion auf den zur trivialen Untergruppe $\mathbf{1}$ gehörigen Faktor, so entspricht $\Lambda_{\mathbf{G}}$ der Abbildung $pr \circ \Lambda_{\text{or}}$. Es zeigt sich, daß p -Gruppen ungerader Ordnung die Ganzheitseigenschaft für Homotopieäquivalenzen besitzen:

Satz 3.17 *$p \neq 2$ sei prim und \mathbf{G} eine p -Gruppe. Dann ist $\Lambda_{\mathbf{G}}$ injektiv.*

Wir geben hier einen von [18], Theorem 10, abweichenden Beweis an, der das Problem zunächst auf den Fall, daß \mathbf{G} abelsch ist, zurückführt.

Beweis der Injektivität von $\Lambda_{\mathbf{G}}$

Wir führen den Beweis von Satz 3.17 per Induktion über die Ordnung von \mathbf{G} , wobei im Fall $\mathbf{G} = \mathbf{1}$ nichts zu zeigen ist. Sei daher $|\mathbf{G}| = p^n$ für ein $n \geq 1$, und die Behauptung sei für alle p -Gruppen der Ordnung $< p^n$ bereits bewiesen.

Für alle Untergruppen $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R_0(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{G}}} & Q(\mathbf{G})^* \\ \downarrow \text{Res}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} & & \downarrow \text{Res}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \\ R_0(\mathbf{P}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{P}}} & Q(\mathbf{P})^* \end{array} .$$

Außerdem ist $\text{Res}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \chi \in R(\mathbf{P})^*$ für alle $\chi \in R(\mathbf{G})^*$, sowie $\text{Res}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(R_h(\mathbf{G})) \subset R_h(\mathbf{P})$, d. h. es kommutiert auch das entsprechende induzierte Diagramm mit den Abbildungen $\Lambda_{\mathbf{G}}$ und

$\Lambda_{\mathbf{P}}$. Für $[V - W] \in \text{Kern } \Lambda_{\mathbf{G}}$ gilt also nach Induktionsvoraussetzung, daß SV und SW \mathbf{P} -homotopieäquivalent sind für alle $\mathbf{P} \subsetneq \mathbf{G}$.

Sei nun $\Gamma \cong (\mathbb{Z}/p^n)^*$ die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p^n})$ über \mathbb{Q} . Dann operiert Γ auf $R(\mathbf{G})$ (bzw. auch auf allen Darstellungsringen $R(\mathbf{P})$ für $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$) durch Galoisconjugation der Charakterwerte (wie im Beweis zu Lemma 3.9 beschrieben); insbesondere permutiert Γ die Menge $\text{Irr}(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ (bzw. $\text{Irr}(\mathbf{P}, \mathbb{C})$) der Isomorphieklassen komplexer irreduzibler \mathbf{G} -Darstellungen (bzw. \mathbf{P} -Darstellungen). Ist $I(\Gamma) = \{\sum n_i \gamma_i \in \mathbb{Z}[\Gamma] \mid n_i \in \mathbb{Z}, \gamma_i \in \Gamma; \sum n_i = 0\}$ das Augmentationsideal des ganzzahligen Gruppenringes $\mathbb{Z}[\Gamma]$ von Γ , so gilt $R_0(\mathbf{G}) = I(\Gamma)R(\mathbf{G})$ (siehe (3.17)). Sei weiterhin

$$R_1(\mathbf{G}) := I(\Gamma)R_0(\mathbf{G}) \subset R_0(\mathbf{G}).$$

Dann gilt für jede endliche Gruppe

$$R_1(\mathbf{G}) \subset R_h(\mathbf{G}),$$

und für p -Gruppen ist sogar

$$R_1(\mathbf{G}) = R_h(\mathbf{G})$$

(tom Dieck [10], Theorem 1 und 2, [12], Theorem 9.1.5).

In unserem Fall, d. h. für $[V - W] \in \text{Kern } \Lambda_{\mathbf{G}}$, gilt also $\text{Res}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(V - W) \in R_1(\mathbf{P})$ für alle $\mathbf{P} \subsetneq \mathbf{G}$, und wir werden zeigen, daß bereits $V - W \in R_1(\mathbf{G})$.

Wir benutzen dazu $R_0(\mathbf{G})/R_1(\mathbf{G})$ in der Darstellungweise von tom Dieck ([10], Chap. 1): Sei $X(\mathbf{G}) := \text{Irr}(\mathbf{G}; \mathbb{C})/\Gamma$ der Bahnenraum von Γ und $[V]$ die Bahn einer irreduziblen \mathbf{G} -Darstellung V . Für jede Bahn $[V] \in X(\mathbf{G})$ sei $F[V]$ die freie abelsche Gruppe über den Elementen von $[V]$, so daß $R(\mathbf{G}) = \bigoplus_{[V] \in X(\mathbf{G})} F[V]$ als additive Gruppe. Es seien $F_0[V] := R_0(\mathbf{G}) \cap F[V] = I(\Gamma)F[V]$ und $F_1[V] := R_1(\mathbf{G}) \cap F[V] = I(\Gamma)F_0[V]$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_0(\mathbf{G}) &= \bigoplus_{[V] \in X(\mathbf{G})} F_0[V], \\ R_1(\mathbf{G}) &= \bigoplus_{[V] \in X(\mathbf{G})} F_1[V] \\ \text{und } R_0(\mathbf{G})/R_1(\mathbf{G}) &= \bigoplus_{[V] \in X(\mathbf{G})} F_0[V]/F_1[V]. \end{aligned}$$

Da Γ abelsch ist, ist die Isotropiegruppe eines Elementes V der Operation von Γ auf $\text{Irr}(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ unabhängig von der speziellen Wahl von $V \in [V]$ und kann daher auch $\Gamma_{[V]}$ genannt werden. Man kann leicht nachprüfen, daß

$$\begin{aligned} \Gamma/\Gamma_{[V]} &\longrightarrow F_0[V]/F_1[V] \\ \gamma &\longmapsto (1 - \gamma)V \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist, der nicht von der Wahl von V abhängt. Es sei $X'(\mathbf{G}) \subset \text{Irr}(\mathbf{G}; \mathbb{C})$ ein fest gewähltes vollständiges System von Vertreterinnen der Bahnen in $X(\mathbf{G})$. In unserer Situation reicht es dann, ein Element der Form

$$x = \sum_{V \in X'(\mathbf{G})} (1 - \gamma_V)V \in \bigoplus_{V \in X'(\mathbf{G})} F_0[V]$$

zu betrachten, für das $\lambda_{\mathbf{G}}(x) \in R(\mathbf{G})^*$ ist und das nach Induktionsvoraussetzung insbesondere für alle $\mathbf{P} \subsetneq \mathbf{G}$

$$Res_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}x \in R_1(\mathbf{P}) = \bigoplus_{W \in X'(\mathbf{P})} F_1[W]$$

erfüllt. Es ist zu zeigen, daß dann bereits $x \in \bigoplus_{V \in X'(\mathbf{G})} F_1[V]$ ist, was bei dem oben gewählten x bedeutet, daß $x = 0$, d. h. für alle $V \in X'(\mathbf{G})$ $\gamma_V \in \Gamma_{[V]}$ ist.

Wir betrachten zunächst ein $V \in X'(\mathbf{G})$ der Dimension größer als 1 und zeigen, daß $(1 - \gamma_V)V = 0$ ist.

Nach dem Theorem von Blichfeldt ([8], Theorem 52.1) gibt es eine echte Untergruppe $\mathbf{H} \subsetneq \mathbf{G}$ und eine komplex eindimensionale \mathbf{H} -Darstellung W' , s. d. $V = Ind_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}W'$; insbesondere finden wir also auch eine Untergruppe $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ vom Index p , s. d.

$$V = Ind_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}W$$

für eine irreduzible \mathbf{P} -Darstellung W . \mathbf{P} ist normal, da \mathbf{G} als p -Gruppe nilpotent ist.

Nach [35], 7.3 und 7.4, gilt dann für die Restriktion von V

$$Res_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}V \cong W_0 \oplus \dots \oplus W_{p-1},$$

wobei (evtl. nach Umordnung) $W_i \cong g^i W$ für einen Erzeuger $g_{\mathbf{P}}$ von \mathbf{G}/\mathbf{P} ($g \in \mathbf{G}$). Die W_i sind dabei paarweise nicht isomorph.

In jedem Fall ist $\Gamma_{[W]} \subset \Gamma_{[V]}$, da $Ind_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma W = \gamma Ind_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}W$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

- (a) Die W_i gehören alle zu verschiedenen Bahnen. Dann gilt für $\gamma \in \Gamma_{[V]}$

$$W_0 \oplus \dots \oplus W_{p-1} \cong Res_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}V = Res_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma V = \gamma Res_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}V \cong \gamma W_0 \oplus \dots \oplus \gamma W_{p-1},$$

und es muß daher, wegen $\gamma W_i \not\cong W_j$ für $i \neq j$, auch $\gamma W \cong W$ sein, d. h. $\Gamma_{[W]} = \Gamma_{[V]}$.

- (b) Es gibt ein $\gamma_0 \in \Gamma$ und $i \neq j$ s. d. $\gamma_0 W_i \cong W_j$.

Wegen der Frobenius-Reziprozität

$$\langle W', Res_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}V' \rangle_{\mathbf{H}} = \langle Ind_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}W', V' \rangle_{\mathbf{G}}$$

für Untergruppen \mathbf{H} von \mathbf{G} ist eine irreduzible \mathbf{H} -Darstellung W' genau dann direkter Summand von $Res_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}V'$, wenn $Ind_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}W'$ direkter Summand der \mathbf{G} -Darstellung V' ist. Also ist genau dann $V \cong Ind_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}W'$, wenn $W' \cong W_i$ für ein $i \in \{0, \dots, p-1\}$, und deshalb ist zum einen

$$V \cong Ind_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}W_j = Ind_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma_0 W_i = \gamma_0 Ind_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}W_i \cong \gamma_0 V,$$

d. h. $\gamma_0 \in \Gamma_{[V]} \setminus \Gamma_{[W]}$, zum anderen permutiert jedes Element $\gamma \in \Gamma_{[V]}$ die Menge $\{W_0, \dots, W_{p-1}\}$. Wegen

$$g^i \gamma W = \gamma g^i W \quad (\gamma \in \Gamma)$$

ist für $\gamma \in \Gamma_{[V]}$ mit $\gamma W = W_i = g^i W$ auch $\gamma^\mu W = g^{i\cdot\mu} W$, d. h. $[W] \supset \{W_0, \dots, W_{p-1}\}$ und $\gamma^p \in \Gamma_{[W]}$.

Insbesondere hat also $\Gamma_{[V]}/\Gamma_{[W]}$ den Exponenten p . Da $p \neq 2$ ist, ist $\Gamma \cong (\mathbb{Z}/p^n)^*$ zyklisch, d. h. wir können annehmen, daß $\Gamma_{[V]} = \langle \beta^d \rangle$ und $\Gamma_{[W]} = \langle \beta^{dp} \rangle$ für einen Erzeuger β von Γ und einen Teiler d der Ordnung $p^{n-1}(p-1)$ von β .

Für die Einschränkung von x auf \mathbf{P} gilt also nach obigen Ausführungen

$$\begin{aligned} F_1[W] \ni pr_{F_0[W]} \left(res_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} x \right) &= pr_{F_0[W]} \left(res_{\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} (1 - \gamma_V) V \right) \\ &= pr_{F_0[W]} \left((1 - \gamma_V) W_0 + \dots + (1 - \gamma_V) W_{p-1} \right) \\ &\equiv \begin{cases} (1 - \gamma_V) W & \in F_0[W]/F_1[W] \text{ im Fall (a)} \\ p(1 - \gamma_V) W \equiv (1 - \gamma_V^p) W & \in F_0[W]/F_1[W] \text{ im Fall (b)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, falls $\gamma_V \in \Gamma_{[W]}$ im Fall (a) bzw. $\gamma_V^p \in \Gamma_{[W]}$ im Fall (b). Im Fall (b) ist also, wenn beispielsweise $\gamma_V = \beta^m$, $\gamma_V^p = \beta^{mp} \in \langle \beta^{dp} \rangle$, d. h. $dp|mp$ und damit auch $d|m$: also $\gamma_V \in \Gamma_{[V]}$. Im Fall (a) ist wegen $\Gamma_{[W]} = \Gamma_{[V]}$ ebenfalls $\gamma_V \in \Gamma_{[V]}$.

Es bleibt nun zu beweisen, daß ein Element der Form

$$x = \sum_{\substack{V \in X'(\mathbf{G}): \\ \dim_{\mathbb{C}} V = 1}} (1 - \gamma_V) V \in R_0(\mathbf{G}) \quad (3.31)$$

mit $\lambda_{\mathbf{G}}(x) \in R(\mathbf{G})^*$ $x = 0$ sein muß. Dabei zeigen wir zunächst, daß es genügt, abelsche p -Gruppen zu betrachten:

Sei $\mathbf{G}_{ab} := \mathbf{G}/[\mathbf{G}, \mathbf{G}]$ die Abelisierung von \mathbf{G} . Man sieht leicht, daß dann die durch die kanonische surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{G}_{ab} \\ g &\longmapsto \bar{g} := g[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \end{aligned}$$

gegebene Abbildung $\iota : R(\mathbf{G}_{ab}) \longrightarrow R(\mathbf{G})$ die beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_0(\mathbf{G}_{ab}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{G}_{ab}}} & Q(\mathbf{G}_{ab})^* \\ \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 \\ R_0(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{G}}} & Q(\mathbf{G})^* \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{ccc}
R_0(\mathbf{G}_{ab})/R_h(\mathbf{G}_{ab}) & \xrightarrow{\Lambda_{\mathbf{G}_{ab}}} & Q(\mathbf{G}_{ab})^*/R(\mathbf{G}_{ab})^* \\
\downarrow \bar{\iota}_1 & & \downarrow \bar{\iota}_2 \\
R_0(\mathbf{G})/R_h(\mathbf{G}) & \xrightarrow{\Lambda_{\mathbf{G}}} & Q(\mathbf{G})^*/R(\mathbf{G})^*
\end{array}$$

induziert. Da für alle eindimensionalen \mathbf{G} -Darstellungen V $[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \subset \text{Kern } V$ ist, gibt es stets eine (eindimensionale) Darstellung V' von \mathbf{G}_{ab} mit $\iota(V') = V$, d. h. x hat die Form $x = \iota_1(x')$ mit $x' = \sum(1 - \gamma_V)V' \in R_0(\mathbf{G}_{ab})$. Wir können unsere Betrachtungen also auf \mathbf{G}_{ab} beschränken, sofern $\bar{\iota}_2$ injektiv ist:

Sei $\rho \in Q(\mathbf{G}_{ab})^*$ so, daß $\bar{\rho} := \iota_2(\rho) \in R(\mathbf{G})^* \subset Q(\mathbf{G})^*$. Da ρ in jedem Fall eine Klassenfunktion auf \mathbf{G}_{ab} ist, hat es die Form

$$\rho = \sum_{\chi \in \text{Irr}(\mathbf{G}_{ab}; \mathbb{C})} \langle \chi, \rho \rangle_{\mathbf{G}_{ab}} \chi$$

mit den durch das innere Produkt im Darstellungsring (bzw. dessen Erweiterung auf den Ring der Klassenfunktionen) gegebenen Koeffizienten $\langle \chi, \rho \rangle_{\mathbf{G}_{ab}} \in \mathbb{C}$. Es reicht daher zu zeigen, daß $\langle \chi, \rho \rangle_{\mathbf{G}_{ab}} \in \mathbb{Z}$ für alle irreduziblen Charaktere χ von \mathbf{G}_{ab} ist: Sei $\bar{\chi} := \iota(\chi)$. Dann ist nach Definition

$$\bar{\chi}(g^{-1}) \cdot \bar{\rho}(g) = \chi(\bar{g}^{-1}) \cdot \rho(\bar{g}) = \bar{\chi}((ga)^{-1}) \cdot \bar{\rho}(ga)$$

für alle $a \in [\mathbf{G}, \mathbf{G}]$ und $g \in \mathbf{G}$, und deshalb

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \rho \rangle_{\mathbf{G}_{ab}} &= \frac{1}{|\mathbf{G}_{ab}|} \cdot \sum_{x \in \mathbf{G}_{ab}} \chi(x^{-1})\rho(x) \\
&= \frac{|[\mathbf{G}, \mathbf{G}]|}{|\mathbf{G}|} \cdot \sum_{x \in \mathbf{G}_{ab}} \left(\frac{1}{|[\mathbf{G}, \mathbf{G}]|} \sum_{g \in \mathbf{G}: g=x} \bar{\chi}(g^{-1})\bar{\rho}(g) \right) \\
&= \frac{1}{|\mathbf{G}|} \sum_{g \in \mathbf{G}} \bar{\chi}(g^{-1})\bar{\rho}(g) = \langle \bar{\chi}, \bar{\rho} \rangle_{\mathbf{G}} \in \mathbb{Z};
\end{aligned}$$

also ist $\rho \in R(\mathbf{G}_{ab})$. Da dasselbe für $\rho^{-1} \in Q(\mathbf{G}_{ab})^*$ gilt, ist $\rho \in R(\mathbf{G}_{ab})^*$ und $\bar{\iota}_2$ somit injektiv.

Wir können also o. E. annehmen, daß \mathbf{G} abelsch ist. Das folgende Lemma gilt allerdings für jede endliche Gruppe \mathbf{G} . Dabei wählen wir, wie im Beweis zu Lemma 3.9 beschrieben, für die Elemente $\gamma_V \in \Gamma \cong (\mathbb{Z}/|\mathbf{G}|)^*$ jeweils Repräsentanten k_V aus \mathbb{Z} : Wenn

$$\begin{aligned}
\Psi^k : R(\mathbf{G}) &\longrightarrow R(\mathbf{G}) \\
\chi &\longmapsto (\Psi^k \chi : g \mapsto \chi(g^k))
\end{aligned}$$

($k \in \mathbb{Z}$, hier teilerfremd zu $|\mathbf{G}|$) die Adams-Operationen sind, so gilt also $\gamma_V V = \Psi^{k_V} V$.

Lemma 3.18 Sei $x = \sum_{V \in X'(\mathbf{G})} (1 - \gamma_V)V \in R_0(\mathbf{G})$ mit $\Lambda_{\mathbf{G}}([x]) = 0$ gegeben. Dann ist die Klassenfunktion

$$\begin{aligned} \varphi_x : \quad \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto \prod_{V \in X'(\mathbf{G})} k_V^{\dim_{\mathbb{C}} V^g} \end{aligned}$$

ein Charakter von \mathbf{G} .

Beweis: Man kann anhand der von Atiyah und Tall in [4], §7, angegebenen Eigenschaften der Bottschen kannibalistischen Klasse θ_k (mit $k \in \mathbb{Z}$) leicht nachprüfen, daß für eine \mathbf{G} -Darstellung V der Charakter von $\theta_k(V) \in R(\mathbf{G})$ durch

$$\theta_k(V)(g) = \frac{\lambda(\Psi^k V)(g)}{\lambda(V)(g)} \cdot k^{\dim_{\mathbb{C}} V^g}$$

gegeben ist. (Siehe auch Bott [6], §7. Hat V die Dimension 1, so ist $\theta_k(V) = 1 + V + V^2 + \dots + V^{k-1}$.) Deshalb ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{\mathbf{G}}(x) := \lambda_{\mathbf{G}}(-x) \cdot \varphi_x : \quad \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \lambda_{\mathbf{G}}(-x)(g) \cdot \varphi_x(g) \\ &= \prod_{V \in X'(\mathbf{G})} \frac{\lambda(\Psi^{k_V} V)(g)}{\lambda(V)(g)} \cdot k_V^{\dim_{\mathbb{C}} V^g} \end{aligned}$$

ein Charakter von \mathbf{G} . Da nach Voraussetzung $\lambda_{\mathbf{G}}(x) \in R(\mathbf{G})^*$ ist, ist also auch $\varphi_x = \lambda_{\mathbf{G}}(x) \tilde{\lambda}_{\mathbf{G}}(x) \in R(\mathbf{G})$. \square

Nach diesem Lemma können wir davon ausgehen, daß für x aus Gleichung 3.31

$$\begin{aligned} \varphi_x : \quad \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto \prod_{V \in X'(\mathbf{G})} k_V^{\dim_{\mathbb{C}} V^g} \end{aligned}$$

Charakter von \mathbf{G} ist, wobei \mathbf{G} eine abelsche p -Gruppe ($p \neq 2$) ist. Insbesondere ist φ_x invariant unter der Galoisgruppe Γ von $\mathbb{Q}(e^{2\pi i \cdot \frac{1}{|\mathbf{G}|}})$ über \mathbb{Q} . Sowohl für abelsche Gruppen als auch für p -Gruppen ungerader Ordnung ist $R(\mathbf{G})^{\Gamma} = R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ (wobei $R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) \subset R(\mathbf{G})$ die Untergruppe von $R(\mathbf{G})$ sei, die von den Charakteren der Darstellungen von \mathbf{G} über \mathbb{Q} erzeugt wird): in diesen Fällen verschwinden alle Schur-Indizes (siehe z. B. [12], Cor. 9.3.2, [35], §12).

Also ist $\varphi_x \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$. Zunächst zeigen wir die Behauptung „ $x = 0$ “ für zyklische Gruppen.

Lemma 3.19 Sei $\mathbf{G} \cong \mathbb{Z}/p^m$ zyklisch. Ist $\varphi_x \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$, so ist $x = 0$.

Beweis: Wir schreiben $\varphi_x(\mathbf{C}) := \varphi_x(g)$ für die von einem Element g erzeugte zyklische Untergruppe $\mathbf{C} \subset \mathbf{G}$. Nach Voraussetzung muß für jede \mathbf{G} -Darstellung ξ das innere Produkt $\langle \varphi_x, \xi \rangle_{\mathbf{G}} \in \mathbb{Z}$ sein. Sei nun ξ_n die (eindimensionale) \mathbf{G} -Darstellung mit Charakter

$$\xi_n(a \bmod p^m) = e^{2\pi i \cdot a/p^n}$$

($a \in \mathbb{Z}; n = 0, \dots, m$); wir wählen $X'(\mathbf{G}) = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$, also $x = \sum_{n=0}^m (1 - \gamma_{\xi_n}) \xi_n$. Genau dann ist $\gamma_{\xi_n} \in \Gamma_{[\xi_n]}$, wenn $k_{\xi_n} \equiv 1 \pmod{p^n}$. $\mathbf{C}_l \subset \mathbf{G}$ sei die von $p^{m-l} \bmod p^m$ erzeugte zyklische Untergruppe der Ordnung p^l . Dann ist für $l \neq 0$

$$\mathbb{Z} \ni \sum_{g \in \mathbf{C}_l^*} \xi_n(g) = \begin{cases} |\mathbf{C}_l^*| = p^l - p^{l-1} & \text{falls } l \leq m - n \\ -\frac{|\mathbf{C}_l|}{p} = -p^{l-1} & \text{falls } l = m - n + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da φ_x auf \mathbf{C}_l^* konstant ist, erhalten wir also Gleichungen

$$\begin{aligned} (G_n) : \quad |\mathbf{G}| \cdot \langle \varphi_x, \xi_n \rangle_{\mathbf{G}} &= \sum_{g \in \mathbf{G}} \varphi_x(g) \xi_n(g^{-1}) \\ &= \sum_{\mathbf{C} \subset \mathbf{G} \text{ zyklisch}} \varphi_x(\mathbf{C}) \cdot \sum_{g \in \mathbf{C}^*} \xi_n(g) \\ &= \varphi_x(\mathbf{C}_0) + \sum_{l=1}^{m-n} \varphi_x(\mathbf{C}_l) (p^l - p^{l-1}) - \varphi_x(\mathbf{C}_{m-n+1}) \cdot p^{m-n} \\ &\equiv 0 \pmod{p^m} \end{aligned}$$

($n = 1, \dots, m$). (G_m) sowie die Differenzen $(G_n) - (G_{n+1})$ ($n = 1, \dots, m-1$) liefern damit die Kongruenzen

$$\varphi_x(\mathbf{C}_{m-n}) \equiv \varphi_x(\mathbf{C}_{m-n+1}) \pmod{p^n} \quad (n = 1, \dots, m).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \varphi_x(\mathbf{C}_l) &= \prod_{V \in X'(\mathbf{G})} k_V^{\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbf{C}_l}} \\ &= \prod_{\substack{n=0, \dots, m: \\ \mathbf{C}_l \subset \text{Kern } \xi_n}} k_{\xi_n} \\ &= \prod_{n=0, \dots, m-l} k_{\xi_n}, \end{aligned}$$

also folgt aus $\varphi_x(\mathbf{C}_{m-n}) \equiv \varphi_x(\mathbf{C}_{m-n+1}) \pmod{p^n}$ (da alle k_{ξ_l} invertierbar modulo $|\mathbf{G}|$ sind)

$$k_{\xi_n} \equiv 1 \pmod{p^n} \quad (n = 0, \dots, m),$$

was zu zeigen war. □

Nun wollen wir zeigen, daß dieser Satz auch für abelsche Gruppen gilt. Der Beweis folgt dabei Ideen von tom Dieck. Zunächst formulieren wir das Problem etwas um:

Wir wählen ein $k \in \mathbb{Z}$, dessen Restklasse $(\mathbb{Z}/p)^*$ erzeugt und das $k^{p-1} = 1 + ap$ mit $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ erfüllt. Dann erzeugt die entsprechende Restklasse von k auch $(\mathbb{Z}/p^s)^*$ für alle $s \in \mathbb{N}$ (siehe z. B. [39], Satz 4.5), insbesondere also auch $(\mathbb{Z}/|\mathbf{G}|)^*$. $\gamma \in \Gamma$ sei das k entsprechende erzeugende Element der Galoisgruppe $\Gamma \cong (\mathbb{Z}/|\mathbf{G}|)^*$.

Für einen Repräsentanten $x = \sum_{V \in X'(\mathbf{G})} (1 - \gamma_V) V \in R_0(\mathbf{G})$ von $[x] \in R_0(\mathbf{G})/R_1(\mathbf{G})$ seien jeweils $\gamma_V = \gamma^{m_V}$ (mit $m_V \in \mathbb{Z}$) und entsprechend $k_V = k^{m_V}$ fest gewählt. Dann

erfüllt

$$y := \sum_{V \in X'(\mathbf{G})} \left(\sum_{i=0}^{m_V-1} \gamma^i \right) V \in R(\mathbf{G})$$

die Gleichung $(1 - \gamma)y = x$, und insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : \quad R(\mathbf{G})/R_0(\mathbf{G}) &\longrightarrow R_0(\mathbf{G})/R_1(\mathbf{G}) \\ [y] &\longmapsto [(1 - \gamma)y] \end{aligned}$$

surjektiv. Man kann leicht nachprüfen, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) = R(\mathbf{G})^{\Gamma} \hookrightarrow R(\mathbf{G})/R_0(\mathbf{G}) \xrightarrow{\alpha} R_0(\mathbf{G})/R_1(\mathbf{G}) \longrightarrow 0$$

somit exakt ist. Für unseren Charakter φ_x gilt nun, falls ein beliebiges $y \in R(\mathbf{G})$ mit $\alpha([y]) = [x]$ gegeben ist,

$$\begin{aligned} \varphi_x(g) &= \prod_{V \in X'(\mathbf{G})} k_V^{\dim_{\mathbb{C}} V^g} \\ &= \prod_{V \in X'(\mathbf{G})} (k^{m_V})^{\dim_{\mathbb{C}} V^g} \\ &= k^{\sum_{V \in X'(\mathbf{G})} m_V \dim_{\mathbb{C}} V^g} \\ &= k^{\dim_{\mathbb{C}} y^g}. \end{aligned}$$

Um unsere Behauptung, daß $x \in R_1(\mathbf{G}) = R_h(\mathbf{G})$ ist, zu beweisen, genügt es demnach zu zeigen, daß es ein $y' \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ gibt mit $\alpha([y']) = [x]$ bzw. $k^{\text{Dim } y'} = k^{\text{Dim } y} = \varphi_x \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$, wobei

$$\begin{aligned} \text{Dim } y : \quad \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto \dim_{\mathbb{C}} y^g \end{aligned}$$

die Dimensionsfunktion einer virtuellen Darstellung $y \in R(\mathbf{G})$ sein soll. Der Beweis von Satz 3.17 ist also vollständig, wenn wir folgendes zeigen:

Satz 3.20 *Sei \mathbf{G} eine abelsche p -Gruppe und die \mathbf{G} -Darstellung y so, daß die Klassenfunktion $k^{\text{Dim } y} \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ ist. Dann gibt es ein $\chi \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ mit $\text{Dim } \chi = \text{Dim } y$.*

Beweis: Es sei $1_{\mathbf{G}}$ die triviale \mathbf{G} -Darstellung. Dann ist $\zeta := y - y(1) \cdot 1_{\mathbf{G}}$ aus dem Augmentationsideal von $R(\mathbf{G})$

$$\begin{aligned} IR(\mathbf{G}) &:= \text{Kern}(\dim_{\mathbb{C}} : R(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}) \\ &= \{\omega \in R(\mathbf{G}) \mid \omega(1) = 0\}, \end{aligned}$$

und wir finden genau dann ein $\chi \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ mit $\text{Dim } \chi = \text{Dim } y$, wenn wir eines in $IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) := R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) \cap IR(\mathbf{G})$ mit $\text{Dim } \chi = \text{Dim } \zeta$ finden.

Wir stellen zunächst fest, daß für jedes $g \in \mathbf{G}$ $p - 1$ ein Teiler von $\dim_{\mathbb{C}} \zeta^g$ ist:

Falls \mathbf{G} zyklisch ist, so ist Satz 3.20 für \mathbf{G} (nach Lemma 3.19) bereits bewiesen, es gibt also ein $\chi \in IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ mit $\text{Dim } \chi = \text{Dim } \zeta$. Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen gilt, da $\chi(g) =: \chi(\mathbf{C})$ nur von der von g erzeugten zyklischen Untergruppe \mathbf{C} abhängt,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \chi^g &= \langle \text{Res}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{G}} \chi, 1_{\mathbf{C}} \rangle_{\mathbf{C}} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{C}|} \left(\sum_{h \in \mathbf{C}} \chi(h) \right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{C}|} \left(\sum_{\mathbf{D} \subset \mathbf{C} \text{ zyklisch}} |\mathbf{D}^*| \cdot \chi(\mathbf{D}) \right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{C}|} \left(\chi(1) + \sum_{\substack{\mathbf{1} \neq \mathbf{D} \subset \mathbf{C} \\ \text{zyklisch}}} \frac{|\mathbf{D}|}{p} \cdot (p-1) \chi(\mathbf{D}) \right). \end{aligned}$$

Da $\chi \in IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ ist, ist $\chi(1) = 0$ und damit $p-1$ Teiler von $\dim_{\mathbb{C}} \chi^g = \dim_{\mathbb{C}} \zeta^g$ für alle $g \in \mathbf{G}$. Wenn nun \mathbf{G} nicht zyklisch ist, so gilt für $g \in \mathbf{G}$ und die von g erzeugte zyklische Untergruppe \mathbf{C}

$$\dim_{\mathbb{C}} \zeta^g = \dim_{\mathbb{C}} (\text{Res}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{G}} \zeta)^g,$$

und wir können das obige Argument für zyklische Gruppen auf $\text{Res}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{G}} \zeta$ anwenden.

Wenn wir $I(\mathbf{G}) \supset IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ als den Ring der Abbildungen

$$f : \quad \{(\mathbf{C}) \mid \mathbf{C} \subset \mathbf{G} \text{ zyklisch}\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mit $f(\mathbf{1}) = 0$ definieren, dann gilt also $\text{Dim } \zeta = (p-1) \cdot \tau$ für ein $\tau \in I(\mathbf{G})$.

Es seien \mathbb{Z}_p die ganzen p -adischen Zahlen und jeweils $R_p \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} R$ die p -adische Kompletzierung eines Ringes R . Für das von uns gewählte k existiert $k^{-1} \in \mathbb{Z}_p^*$ und damit auch $k^{-y(1)} \cdot 1_{\mathbf{G}} \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p$. Nach Voraussetzung ist $k^{\text{Dim } y} \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$, also auch $k^{\text{Dim } \zeta} = k^{\text{Dim } y} \cdot k^{-y(1)} \in R_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p$, und wegen $\dim_{\mathbb{C}} \zeta = \zeta(1) = 0$ ist sogar

$$k^{\text{Dim } \zeta} \in 1 + IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p.$$

Nun ist \mathbf{G} als abelsche Gruppe insbesondere auch regulär (zur Definition und zu den wichtigsten Eigenschaften regulärer p -Gruppen siehe z. B. [36]). Deshalb induziert der p -adische Logarithmus einen Endomorphismus

$$\log : \quad 1 + IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p \longrightarrow IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p$$

von der multiplikativen Gruppe in die additive Gruppe (tom Dieck [15], Prop. (6.3) und (6.4)). Mit dem von uns gewählten k erhalten wir wegen $k^{p-1} = 1 + ap$ mit $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ also

$$\begin{aligned} IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p \ni \log(k^{\text{Dim } \zeta}) &= \log(1 + ap)^{\tau} \\ &= \tau \cdot \log(1 + ap) \\ &= \tau \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(ap)^i}{i} \right) \\ &=: \tau \cdot p \cdot u, \end{aligned}$$

wobei $u \in \mathbb{Z}_p^*$ eine p -adischen Einheit ist. Demnach ist $p\tau \in IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p \cap I(\mathbf{G})$. Nun liegt jede Klassenfunktion $\varphi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$, für die für alle Untergruppen $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ und jeden linearen Charakter ξ von \mathbf{H} das innere Produkt $\langle Res_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}} \varphi, \xi \rangle_{\mathbf{H}}$ eine ganze Zahl ist, bereits in $R(\mathbf{G})$ ([35], Korollar zu Theorem 22). Man kann leicht nachprüfen, daß für ein beliebiges $\varphi \in I(\mathbf{G})$ diese Bedingung von $|\mathbf{G}| \cdot \varphi$ erfüllt wird, es ist also $|\mathbf{G}| \cdot I(\mathbf{G}) \subset IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ und damit speziell auch $|\mathbf{G}| \cdot p\tau \in IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$. Da aber die Injektion $IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) \hookrightarrow IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p$ für alle Potenzen p^i von p einen Isomorphismus

$$IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})/p^i IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) \longrightarrow IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p/p^i IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})_p$$

induziert, muß deshalb bereits $p\tau \in IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ sein.

Es sei $\Psi^p : R(\mathbf{G}) \rightarrow R(\mathbf{G})$ die Adams-Operation, $(\Psi^p \omega)(g) := \omega(g^p)$. Da \mathbf{G} regulär ist, sind die Abbildungen

$$1 - \frac{\Psi^p}{p} : IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) \longrightarrow IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$$

sowie

$$\frac{p}{p-1} \text{Dim} : IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) \longrightarrow IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$$

zueinander inverse Isomorphismen ([15], Prop. (6.3) und (6.4)). Also ist

$$\chi := \left(1 - \frac{\Psi^p}{p}\right)(p\tau)$$

ein Element aus $IR_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$ mit der Dimensionsfunktion

$$\begin{aligned} \text{Dim } \chi &= \frac{p-1}{p} \left(\frac{p}{p-1} \text{Dim} \right) \circ \left(1 - \frac{\Psi^p}{p}\right)(p\tau) \\ &= (p-1)\tau \\ &= \text{Dim } \zeta, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. □

Kapitel 4

Stabil lineare Homotopiedarstellungen

In diesem Kapitel sei \mathbf{G} stets eine endliche Gruppe. In Verallgemeinerung der Ergebnisse des vorigen Kapitels soll nun jeder stabil linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellung eine ihren \mathbf{G} -Homotopietyp eindeutig kennzeichnende Invariante zugeordnet werden. Insbesondere möchten wir für jede Darstellungssphäre SV eine nur von der Isomorphieklasse von V abhängige Invariante $\Lambda O(V)$ finden, die ihren (stabilen) Äquivalenztyp eindeutig beschreibt. Dazu wird auch hier äquivariante KO -Theorie bemüht. Da jedoch, im Gegensatz zum komplexen Fall, auch bereits für eine reelle Darstellungssphäre SV im allgemeinen keine Bottperiodizität $KO_{\mathbf{G}}^*(\star) \xrightarrow{\cong} KO_{\mathbf{G}}^*(DV, SV)$ existiert, können wir dies auch insbesondere für eine stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung nicht erwarten. Die Invarianten können also nicht direkt aus der äquivarianten KO -Theorie entnommen werden. Benutzt wird aber die Bottperiodizität für (reelle) Spin- \mathbf{G} -Darstellungen; zusätzlich müssen u. a. Hilfsabbildungen hinzugezogen werden.

Schon bei der Beschränkung auf Darstellungssphären sind wir mit der Festlegung von Orientierungen konfrontiert: Tornehave [37] hat diesen Fall untersucht. Er konnte die Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(V, W)$ berechnen, die in die Kongruenzen

$$d(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: N\mathbf{H} \supseteq \mathbf{K} \supset \mathbf{H} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} d(\mathbf{K}) \pmod{|W\mathbf{H}|}$$

($\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$) eingehen, welche, nach Satz 1.21, zusammen mit den Instabilitätsbedingungen $B(D)$ die möglichen Gradfunktionen d von \mathbf{G} -Abbildungen $SV \rightarrow SW$ zwischen Darstellungssphären gleicher Dimensionsfunktion D bestimmen. Dabei wählt er die dazu notwendige Orientierung von SW in bestimmter Abhängigkeit von der Orientierung von SV , unter Ausnutzung der Tatsache, daß wegen $\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbf{H}} = \dim_{\mathbb{R}} W^{\mathbf{H}}$ ($\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$) V und W jeweils die gleiche Anzahl von zueinander durch einen Körperautomorphismus konjugierten irreduziblen Summanden enthalten. Seine Ergebnisse werden ganz wesentlich in unsere Berechnungen einfließen, und daher rührt auch unsere Einschränkung auf endliche Gruppen.

Zunächst werden wir, um wohldefinierte Gradfunktionen zu ermöglichen, alle stabil linearen Homotopiedarstellungen *gleichzeitig* orientieren. Insbesondere wollen wir für jede Isomorphieklasse $[V]$ orthogonaler \mathbf{G} -Darstellungen einen (evtl. auch mehrere) in bestimmter, noch näher zu definierender Weise orientierten Repräsentanten V bestimmen, der eine sogenannte bevorzugt orientierte Darstellungssphäre SV liefert. Diese Wahl ist nicht notwendig eindeutig, ist aber so konstruiert, daß sie einen nur von der Isomorphieklasse von V und W abhängigen Vergleich zwischen Orientierungen zweier Darstellungssphären SV und SW gleicher Dimensionsfunktion ermöglicht, der für die Existenz von wohldefinierten Abbildungsgraden von \mathbf{G} -Abbildungen $SV \rightarrow SW$ notwendig ist.

Im zweiten Abschnitt werden wir dann, in Abhängigkeit der für X , SV_X und SW_X gewählten Orientierungen, für jedes Tupel $X_h := (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ bestimmte Klassenfunktionen $\lambda(X_h)_{\mathbf{H}}$ definieren. (Dabei sind X eine stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung, V_X und W_X zwei orthogonale \mathbf{G} -Darstellungen und h_X eine fest gewählte \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz.) Mit deren Hilfe können wir Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} = n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}(X, Y)$ für Kongruenzen der obigen Form, zuständig für die Beschreibung von Gradfunktionen äquivarianter Abbildungen $X \rightarrow Y$, berechnen. Drittens werden wir aus den $\lambda(X_h)_{\mathbf{H}}$ eine Invariante $\Lambda_{O_D}(X)$ (bzw. $\Lambda O(X)$) für X gewinnen, die die Äquivalenzklasse (bzw. stabile Äquivalenzklasse) von X bzgl. \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz eindeutig beschreibt.

4.1 Bevorzugte Orientierungen für Darstellungssphären

Wir werden in diesem Abschnitt definieren, was (bei gegebener Isomorphieklasse von V) eine *bevorzugt orientierte \mathbf{G} -Darstellungssphäre* SV sein soll. Deren Orientierung ist u. a. mit einer bestimmten Ordnung in der Zerlegung von V als orthogonale Summe irreduzibler Faktoren verbunden, sie ist jedoch i. a. nicht eindeutig.

Sei $\xi := e^{2\pi i \frac{1}{|\mathbf{G}|}}$. Ist dann $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ die Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\xi)$ über \mathbb{Q} und $\text{Irr}(\mathbf{G})$ die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler reeller \mathbf{G} -Darstellungen, so operiert Γ auf $\text{Irr}(\mathbf{G})$; es sei $\text{Irr}(\mathbf{G})/\Gamma = \{B_1, \dots, B_t\}$ der entsprechende Bahnenraum. Ist $\text{Irr}'(\mathbf{G})$ ein fest gewähltes Vertreterinnensystem von $\text{Irr}(\mathbf{G})$, so können wir die Elemente aus $\text{Irr}'(\mathbf{G})$ so indizieren, daß

$$\text{Irr}'(\mathbf{G}) = \{U_t^k \mid t = 1, \dots, r; k = 0, \dots, e_t\},$$

wobei die Bahn der Isomorphieklasse von U_t^k eben B_t sei (und, wenn $\Gamma_{B_t} \subset \Gamma$ die Isotropiegruppe der Isomorphieklasse von U_t^k ist, $e_t + 1 = |\Gamma/\Gamma_{B_t}|$). Weiterhin sei jede \mathbf{G} -Darstellung V orthogonal, also mit einem \mathbf{G} -invarianten, positiv definiten inneren Produkt versehen. Dann sind stets die Spingruppen $\text{Spin}(V)$ bzw. $\text{Pin}(V)$ definiert (als zweifache Überlagerung von $SO(V)$ bzw. $O(V)$), die später für uns von Nutzen sein werden.

Torshave zeigt ([37], §1), daß die Isomorphieklassen zweier irreduzibler \mathbf{G} -Darstellungen V und W genau dann galoisconjungiert zueinander sind, d. h. für die entsprechenden

Charaktere χ_V bzw. χ_W von V bzw. W gilt $\chi_W = \gamma\chi_V$ mit einem $\gamma \in \Gamma$, wenn es einen Körperautomorphismus $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ gibt, so daß die \mathbf{G} -Darstellungen W und ψV (gesehen als Matrixdarstellungen mit Einträgen in \mathbb{R}) isomorph sind (wobei ohne Einschränkung — da es sich um reelle Darstellungen handelt — ψ so gewählt werden kann, daß $\psi(i) = i$). Dabei gilt für die Restriktion $\psi' := \psi|_{\mathbb{Q}(\xi)} \in \Gamma$, daß $\psi'\chi_V = \chi_W = \gamma\chi_V$. Wir können also die Repräsentantinnen $U_t^k \in \text{Irr}'(\mathbf{G})$ sowie Automorphismen $\psi_t^k \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}(i))$ so wählen, daß

$$U_t^k = \psi_t^k U_t^0,$$

wobei ψ_t^0 die Identität sei. Dann existieren nach Tornehave ([37], Prop. 1.2) jeweils bestimmte \mathbf{G} -äquivalente und ψ_t^k -lineare Isomorphismen

$$\phi_t^k : U_t^0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow U_t^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad (k = 1, \dots, e_t; t = 1, \dots, r),$$

die mit der skalaren Erweiterung der inneren Produkte verträglich sind. Diese sogenannten ψ_t^k -Konjugationen induzieren mit Hilfe einer von Tornehave beschriebenen Konstruktion bei gegebener Orientierung von U_t^0 eine (nicht von der speziellen Wahl von ϕ_t^k abhängige) Orientierung auf U_t^k (und umgekehrt) ([37], §1): wir sagen in diesem Fall, daß U_t^k die von U_t^0 durch ϕ_t^k transportierte Orientierung besitzt.

Sei die Dimensionsfunktion D einer Homotopiedarstellung X gegeben. Aus Gründen, die im nächsten Abschnitt deutlich werden, wählen wir für alle t die Orientierung der Darstellungssphäre $S := S(U_t^0)$ (bzw. für alle $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ die Orientierung von $(U_t^0)^{\mathbf{H}}$) in einer Weise, die leicht von der in Abschnitt 1.1.2 vorgestellten Methode abweicht: Sind $\Psi_D(\mathbf{G}) \subset \Psi(\mathbf{G})$ und $\text{Konj}(\mathbf{G}, \Psi_D(\mathbf{G})) = (g_{\mathbf{K}})_{\mathbf{K} \in \Psi(\mathbf{G}) \setminus \Psi_D(\mathbf{G})}$ wie dort beschrieben gegeben, so wählen wir für $\mathbf{H} \in \Psi_D(\mathbf{G})$ die Orientierung $z(S, \mathbf{H})$ von $S^{\mathbf{H}}$ beliebig und legen für $\mathbf{K} = g_{\mathbf{K}} \mathbf{H} g_{\mathbf{K}}^{-1}$ die Orientierung $z(S, \mathbf{K})$ mittels

$$(l_{S, g_{\mathbf{K}}})^*(z(S, \mathbf{K})) := e_{S, \overline{\mathbf{H}}}(g_{\overline{\mathbf{K}}}^{-1} g_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{H}}) \cdot z(S, \mathbf{H})$$

fest. (Dabei war $(e_{Y, \mathbf{L}})_{\mathbf{L} \in \Psi(\mathbf{G})}$ das – nur von der Dimensionsfunktion abhängige – Orientierungsverhalten einer Homotopiedarstellung Y . Man vergleiche den Vorfaktor $e_{S, \overline{\mathbf{H}}}(g_{\overline{\mathbf{K}}}^{-1} g_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{H}})$ mit dem in Gleichung (1.3).)

Die Orientierung des Untervektorraumes $(U_t^k)^{\mathbf{H}}$ sei dann jeweils die von $(U_t^0)^{\mathbf{H}}$ durch $(\phi_t^k)^{\mathbf{H}}$ transportierte, die Darstellungssphäre $S(U_t^k)$ trage die dadurch induzierte Orientierung.

Definition 4.1 *Ein orthogonale \mathbf{G} -Darstellung der Form*

$$V = U_{t_1}^{k_1} \perp U_{t_2}^{k_2} \perp \dots \perp U_{t_m}^{k_m} \tag{4.1}$$

(wobei \perp jeweils die orthogonale Summe bedeute) heißt **bevorzugt zerlegt**, wenn aus $i < j$ folgt, daß $1 \leq t_i \leq t_j \leq r$. Es trage für alle $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ der Vektorraum $(U_t^i)^{\mathbf{H}}$ die oben beschriebene Orientierung und $V^{\mathbf{H}}$ die durch die Zerlegung (4.1) induzierte Produktorientierung. Eine Darstellungssphäre SW heißt **bevorzugt orientiert** (bzgl. der Dimensionsfunktion D), wenn W bevorzugt zerlegt und die $W^{\mathbf{H}}$ entsprechend orientiert sind und wenn die lineare Homotopiedarstellung SW die dadurch induzierte Orientierung trägt.

In jeder Isomorphieklasse orthogonaler \mathbf{G} -Darstellungen existiert mindestens eine bevorzugt zerlegte Repräsentantin; da aber die Reihenfolge von zueinander konjugierten Summanden einer bevorzugt zerlegten \mathbf{G} -Darstellung V nicht weiter festgelegt ist, ist die bevorzugte Orientierung von SV nicht unbedingt eindeutig bestimmt. Wir haben mit diesen Orientierungen aber folgendes erreicht:

Ist $I(\Gamma)$ das Augmentationsideal des Gruppenringes $\mathbb{Z}[\Gamma]$ der Galoisgruppe Γ und

$$RO_0(\mathbf{G}) = \{V - W \in RO(\mathbf{G}) \mid \dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbf{H}} = \dim_{\mathbb{R}} W^{\mathbf{H}} \text{ f\"ur alle } \mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})\},$$

so gilt

$$RO_0(\mathbf{G}) = I(\Gamma)RO(\mathbf{G})$$

(siehe [26], Prop. 3.17, oder [17], III.(5.8) und (5.9)). Haben daher zwei Darstellungssphären SV und SW dieselbe Dimensionsfunktion, so besitzen V und W wegen $V - W \in RO_0(\mathbf{G})$ für jedes $t \in \{1, \dots, r\}$ jeweils gleichviele Summanden einer Isomorphieklasse $[U_t^k] \in Irr(\mathbf{G})$ mit Bahn $B_t \in Irr(\mathbf{G})/\Gamma$. Sind also V und W bevorzugt zerlegt und der m -te Summand von V ist U_t^k , so hat der m -te Summand von W die Form U_t^l für ein $l \in \{0, \dots, e_t\}$. Orientieren wir die beiden Darstellungssphären SV und SW also bevorzugt und sind V und W außerdem groß genug, so daß jede Untergruppe von \mathbf{G} als Isotropiegruppe von SV bzw. SW vorkommt, so sind SV und SW kohärent orientiert.

Weiterhin ist U_t^k zu U_t^l mittels des Körperautomorphismus

$$\psi_{k,l} := \psi_t^k \circ (\psi_t^l)^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}(i))$$

konjugiert. Wir haben die $\psi_{k,l}$ -Konjugation

$$\phi_{k,l} := \phi_t^k \circ (\phi_t^l)^{-1} : U_t^l \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow U_t^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

und mit den von uns gewählten Orientierungen von U_t^k und U_t^l transportiert $\phi_{k,l}$ die Orientierung von U_t^l in die Orientierung von U_t^k . Für diese Situation hat Tornehave Koeffizienten $n_{\mathbf{H},\mathbf{K}}$ berechnet (die von V , W und den ψ_t^k abhängen), so daß alle Gradfunktionen d von \mathbf{G} -Abbildungen $SV \longrightarrow SW$, bezogen auf die entsprechenden bevorzugten Orientierungen von SV und SW , die Kongruenzen

$$d(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H},\mathbf{K}} d(\mathbf{K}) \pmod{|W\mathbf{H}|}$$

erfüllen ([37], Theorem A). Diese Koeffizienten werden wir benutzen.

4.2 Kongruenzen für Gradfunktionen

Wir wählen für alle stabil linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen einer Dimensionsfunktion D kohärente Orientierungen wie in 1.1.2 anhand des im letzten Abschnitt festgelegten Repräsentantinnensystems $\Psi_D(\mathbf{G})$ sowie der Vertreter $Konj(\mathbf{G}, \Psi_D(\mathbf{G}))$.

Sei nun X eine solche stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung der Dimensionsfunktion D . Dann können wir insbesondere zwei bevorzugt zerlegte (orthogonale) \mathbf{G} -Darstellungen V_X und W_X mit $X * SV_X \simeq_{\mathbf{G}} SW_X$ finden, so daß in V_X die Isomorphieklasse jedes irreduziblen Summanden in gerader Anzahl vorkommt und jede Untergruppe \mathbf{H} von \mathbf{G} als Isotropiegruppe von SV_X (und damit auch von $X * SV_X$ und SW_X) auftritt. Weiterhin sei o. E. $V_X = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_{2m}$ mit $V_{2i} \cong V_{2i-1}$ ($i = 1, \dots, m$). Wir orientieren SV_X und SW_X dementsprechend bevorzugt bzgl. der Dimensionsfunktion D und geben $X * SV_X$ die Produktorientierung von X und SV_X . Man kann leicht nachprüfen, daß unsere etwas umständliche Wahl der Orientierungen von SV_X und SW_X nun dazu führt, daß auch $X * SV_X$ und SW_X kohärent orientiert sind. Insbesondere besitzt also auch jede Äquivalenz

$$h_X : X * SV_X \longrightarrow SW_X \quad (4.2)$$

wohldefinierte Abbildungsgrade $\deg(h_X^{\mathbf{H}})$ ($\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$), die die Instabilitätsbedingungen $B(\text{Dim}_{\mathbf{G}} SW_X)$ erfüllen. Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 3 fassen wir die Wahl einer solchen Äquivalenz h_X als Zusatzstruktur für stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen auf, schreiben dafür kurz

$$X_h := (X, h_X : X * SV_X \longrightarrow SW_X) \quad (4.3)$$

und nennen X_h der Einfachheit halber ebenfalls eine stabil lineare Homotopiedarstellung.

Definition 4.2 Die Anzahl, mit der die Isomorphieklasse $[U_t^i] \in \text{Irr}(\mathbf{G})$ als Summand in einer \mathbf{G} -Darstellung U vorkomme, werde mit $k_t^i(U)$ bezeichnet.

Es sei $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$, $g \in W\mathbf{H} = N\mathbf{H}/\mathbf{H}$ sowie $t \in \{1, \dots, r\}$. Die Linkstranslation mit g induziert einen Automorphismus auf $(U_t^0)^{\mathbf{H}}$. Da U_t^0 ein reeller \mathbf{G} -Modul ist, treten dessen Eigenwerte, die von der Form ξ^k mit $\xi := e^{2\pi i \frac{1}{\text{ord}(g)}}$ sind, dabei – sofern sie ungleich ± 1 sind – in komplex konjugierten Paaren auf. Von jedem dieser Paare wählen wir einen Vertreter

$$\lambda_{t,n}(g) \in \mathbb{C} \quad (n = 1, \dots, m_t), \quad (4.4)$$

weiterhin wählen wir jeweils eine Quadratwurzel $\mu_{t,n}(g)$ von $\lambda_{t,n}(g)$. Dann sind für alle $k = 1, \dots, e_t$ genau die Zahlen $\psi_t^k(\lambda_{t,n}(g)) \in \mathbb{C}$ ($n = 1, \dots, m_t$) die Eigenwerte ungleich ± 1 des durch die Linkstranslation mit g auf $(U_t^k)^{\mathbf{H}}$ induzierten Automorphismus, und $\psi_t^k(\mu_{t,n}(g))$ ist jeweils eine Quadratwurzel von $\psi_t^k(\lambda_{t,n}(g))$.

Definition 4.3 Mit den obigen Bezeichnungen sei für eine reelle \mathbf{G} -Darstellung U und $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ die Klassenfunktion $\lambda(U)_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$ definiert als

$$\lambda(U)_{\mathbf{H}}(g) := \prod_{t=1}^r \prod_{l=0}^{e_t} \prod_{n=1}^{m_t} \left(\psi_t^l(\mu_{t,n}(g)) - \psi_t^l(\mu_{t,n}(g)^{-1}) \right)^{k_t^l(U)};$$

für eine stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellung $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ sei

$$\lambda'(X_h^{\mathbf{H}}) := \frac{\lambda(W_X)_{\mathbf{H}}}{\lambda(V_X)_{\mathbf{H}}}.$$

Ist \mathbf{K}/\mathbf{H} die von $g \in W\mathbf{H}$ erzeugte zyklische Untergruppe, so sei weiterhin $\lambda(X_h)_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$ gegeben durch

$$\lambda(X_h)_{\mathbf{H}}(g) := \lambda'(X_h^{\mathbf{H}})(g) \cdot \deg(h_X^{\mathbf{K}}).$$

Es ist zu bemerken, daß

$$\lambda(U \oplus V)_{\mathbf{H}} = \lambda(U)_{\mathbf{H}} \lambda(V)_{\mathbf{H}}. \quad (4.5)$$

Sind X_h und Y_h zwei stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion und $(\mathbf{K}/\mathbf{H})^*$ die Erzeuger der zyklischen Faktorgruppe \mathbf{K}/\mathbf{H} , so definieren wir

$$n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}(Y_h - X_h) := \frac{\deg(h_X^{\mathbf{H}})}{\deg(h_Y^{\mathbf{H}})} \sum_{g \in (\mathbf{K}/\mathbf{H})^*} \frac{\lambda(Y_h)_{\mathbf{H}}}{\lambda(X_h)_{\mathbf{H}}}(g). \quad (4.6)$$

Diese $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}(Y_h - X_h) \in \mathbb{Q}(\xi)$ (mit $\xi := e^{\frac{2\pi i}{2|\mathbf{K}/\mathbf{H}|}}$) sind ganze Zahlen: Wie in Lemma 3.9 zeigt man, daß jeder Summand ganz algebraisch über \mathbb{Q} ist; und durch die Summation über die erzeugenden Elemente $g \in (\mathbf{K}/\mathbf{H})^*$ erreichen wir, daß $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}(Y_h - X_h)$ invariant unter der Galoisgruppe $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$, also rational ist: insgesamt also $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}(Y_h - X_h) \in \mathbb{Z}$.

Außerdem ist $n_{\mathbf{H}, \mathbf{H}}(Y_h - X_h) = 1$, und auch hier sind die $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ nur von den entsprechenden Konjugationsklassen von \mathbf{H} und \mathbf{K} abhängig, d. h. $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} = n_{\mathbf{H}', \mathbf{K}'}$ falls $\mathbf{H}' = g\mathbf{H}g^{-1}$ und $\mathbf{K}' = gn\mathbf{K}(gn)^{-1}$ mit beliebigen $g \in \mathbf{G}$, $n \in N\mathbf{H}$.

Damit gilt die folgende Aussage:

Satz 4.4 \mathbf{G} sei eine endliche Gruppe, und X_h und Y_h seien zwei stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen gleicher Dimensionsfunktion $D \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$. Eine Abbildung $d : \Psi(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist genau dann Gradfunktion einer \mathbf{G} -Abbildung $f : X \rightarrow Y$, wenn (i) und (ii) erfüllt sind:

(i) Für alle $\mathbf{H} \in \text{Iso}(X) = \text{Iso}(D) \subset \Psi(\mathbf{G})$ ist

$$d(\mathbf{H}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: N\mathbf{H} \supset \mathbf{K} \supset \mathbf{H} \\ 1 \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} d(\mathbf{K}) \pmod{|W\mathbf{H}|}, \quad (4.7)$$

wobei $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} := n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}(Y_h - X_h)$.

(ii) d erfüllt die Instabilitätsbedingungen $B(D)$, d. h.

(a) d ist auf Konjugationsklassen konstant,

(b) $d(\mathbf{H}) = 1$ falls $D(\mathbf{H}) = 0$,

- (c) $d(\mathbf{H}) = 0, 1$ oder -1 falls $D(\mathbf{H}) = 1$,
(d) $d(\mathbf{H}) = d(\mathbf{H}')$ für alle $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{H}'$ mit $D(\mathbf{H}) = D(\mathbf{H}')$.

Zusätzlich erfüllt jede Gradfunktion $d(f)$ einer äquivarianten Abbildung $f : X \rightarrow Y$ für alle Untergruppen \mathbf{H} von \mathbf{G} die Kongruenzen (4.7).

Beweis: Seien $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ und $Y_h = (Y, h_Y : Y * SV_Y \rightarrow SW_Y)$ gegeben. Sobald wir bewiesen haben, daß die Gradfunktion einer jeden äquivarianten Abbildung $f : X \rightarrow Y$ die obigen Kongruenzen erfüllt, folgt mit Satz 1.21 auch die Umkehrung, d. h. jede Abbildung $d : \Psi(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$, die diese Kongruenzen sowie die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ erfüllt, ist als Gradfunktion einer äquivarianten Abbildung $X \rightarrow Y$ realisierbar.

Sei also $f : X \rightarrow Y$ eine \mathbf{G} -Abbildung. Es ist zu zeigen, daß für die Gradfunktion $d(f)$ von f obige Kongruenzen gelten.

Wählen wir für den Join jeweils die Produktorientierung, so ist die Vertauschung

$$t : SV_X * SV_Y \rightarrow SV_Y * SV_X$$

eine orientierte \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz. Außerdem gibt es, da nach Voraussetzung V_X und V_Y die Produktorientierung von isotypischen Summanden mit geradzahlgiger Dimensionsfunktion tragen, bevorzugte Orientierungen auf $S(W_X \oplus V_Y)$ und $S(W_Y \oplus V_X)$, so daß $SW_X * SV_Y \simeq_{\mathbf{G}} S(W_X \oplus V_Y)$ und $SW_Y * SV_X \simeq_{\mathbf{G}} S(W_Y \oplus V_X)$ jeweils orientiert äquivalent sind. Wir definieren die Abbildung

$$\tilde{f} : S(W_X \oplus V_Y) \rightarrow S(W_Y \oplus V_X)$$

so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
X * SV_X * SV_Y & \xrightarrow{f * id} & Y * SV_X * SV_Y \\
\downarrow \simeq_{\mathbf{G}} h_X * id & & \downarrow \simeq_{\mathbf{G}} id * t \\
SW_X * SV_Y & & Y * SV_Y * SV_X \\
\downarrow \simeq_{\mathbf{G}} & & \downarrow \simeq_{\mathbf{G}} h_Y * id \\
SW_X * SV_Y & & SW_Y * SV_X \\
\downarrow \simeq_{\mathbf{G}} & & \downarrow \simeq_{\mathbf{G}} \\
S(W_X \oplus V_Y) & \xrightarrow{\tilde{f}} & S(W_Y \oplus V_X)
\end{array}$$

kommutiert. \tilde{f} hat dann die Gradfunktion

$$d(\tilde{f}) = d(h_Y) \cdot d(f) \cdot d(h_X^{-1}) = d(f) \frac{d(h_Y)}{d(h_X)}. \quad (4.8)$$

Damit haben wir das Problem zurückgeführt auf die Beschreibung möglicher Gradfunktionen, die bei äquivarianten Abbildungen zwischen bevorzugt orientierten Darstellungssphären auftreten; wie in Abschnitt 4.1 erläutert, hat Tornehave [37] für diesen Fall Kongruenzen berechnet, die $d(\tilde{f})$ erfüllt:

Es seien $\mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \subset \mathbf{G}$ so, daß \mathbf{K}/\mathbf{H} zyklisch ist und $(\mathbf{K}/\mathbf{H})^*$ die Menge der Erzeuger. Mit den Klassenfunktionen $\lambda(U)_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$ aus Definition 4.3 und

$$n'_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} := \sum_{g \in (\mathbf{K}/\mathbf{H})^*} \frac{\lambda(W_Y \oplus V_X)_{\mathbf{H}}(g)}{\lambda(W_X \oplus V_Y)_{\mathbf{H}}(g)}$$

erfüllt, wie Tornehave in [37], Theorem A, beweist, die Gradfunktion von \tilde{f} die Kongruenzen

$$\deg(\tilde{f}^{\mathbf{H}}) \equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \\ \mathbf{1} \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n'_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \deg(\tilde{f}^{\mathbf{K}}) \pmod{|W\mathbf{H}|}.$$

Wegen

$$\frac{\lambda'(Y_h^{\mathbf{H}})}{\lambda'(X_h^{\mathbf{H}})} = \frac{\lambda(W_Y \oplus V_X)_{\mathbf{H}}}{\lambda(W_X \oplus V_Y)_{\mathbf{H}}}$$

gilt damit für die Abbildungsgrade von f

$$\begin{aligned} \deg(f^{\mathbf{H}}) &\equiv - \left(\frac{\deg(h_Y^{\mathbf{H}})}{\deg(h_X^{\mathbf{H}})} \right)^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \subseteq \mathbf{G} \\ \mathbf{1} \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n'_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \cdot \frac{\deg(h_Y^{\mathbf{K}})}{\deg(h_X^{\mathbf{K}})} \deg(f^{\mathbf{K}}) \pmod{|W\mathbf{H}|} \\ &\equiv - \sum_{\substack{\mathbf{K}: \mathbf{H} \triangleleft \mathbf{K} \subseteq \mathbf{G} \\ \mathbf{1} \neq \mathbf{K}/\mathbf{H} \text{ zyklisch}}} n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} \cdot \deg(f^{\mathbf{K}}) \pmod{|W\mathbf{H}|}, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}}$ definiert sein sollen als

$$n_{\mathbf{H}, \mathbf{K}} := \frac{\deg(h_X^{\mathbf{H}})}{\deg(h_Y^{\mathbf{H}})} \sum_{g \in (\mathbf{K}/\mathbf{H})^*} \frac{\lambda(Y_h)_{\mathbf{H}}(g)}{\lambda(X_h)_{\mathbf{H}}(g)},$$

mit

$$\lambda(Y_h)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda'(Y_h^{\mathbf{H}})(g) \cdot \deg(h_Y^{\mathbf{K}}) \quad \text{und} \quad \lambda(X_h)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda'(X_h^{\mathbf{H}})(g) \cdot \deg(h_X^{\mathbf{K}}).$$

Genau dies war aber die Behauptung. □

4.3 Invarianten für stabil lineare Homotopiedarstellungen

Nach Satz 4.4 reichen also die Dimensionsfunktion $\text{Dim}_{\mathbf{G}} X$ einer stabil linearen \mathbf{G} -Homotopiedarstellung $X_h = (X, h_X : X * SV_X \rightarrow SW_X)$ sowie die Klassenfunktionen

$\lambda(X_h)_{\mathbf{H}} : W\mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ($\mathbf{H} \in Iso(X)$) bereits aus, um den äquivarianten Homotopietyp von X zu beschreiben. Bei letzteren handelt es sich aber, wegen ihrer Abhängigkeit von der Wahl der Homotopieäquivalenz h_X , noch nicht um Invarianten der Äquivalenzklasse von X . Analog zu Satz 3.12 werden wir nun ein Kriterium für die Äquivalenz zweier stabil linearer \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen formulieren. Sei wiederum $\Psi_V(\mathbf{G}) \subset \Psi(\mathbf{G})$ ein fest gewähltes Vertreterinnensystem für die Konjugationsklassen von Untergruppen von \mathbf{G} .

Satz 4.5 *Die Gruppe \mathbf{G} sei endlich. Sind $X_h = (X, h_X : X * SV_X \longrightarrow SW_X)$ und $Y_h = (Y, h_Y : Y * SV_Y \longrightarrow SW_Y)$ zwei kohärent orientierte, stabil lineare \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen der gleichen Dimensionsfunktion D , so sind äquivalent:*

(1) X und Y sind \mathbf{G} -homotopieäquivalent.

(2) Es gibt eine Funktion $\epsilon \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$, die die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ erfüllt, sowie für alle $\mathbf{H} \in Iso(X) \cap \Psi_V(\mathbf{G}) = Iso(D) \cap \Psi_V(\mathbf{G})$ ein $\tau_{\mathbf{H}} \in RO(W\mathbf{H})^*$, s. d. für jedes $g \in W\mathbf{H}$, das eine Untergruppe $\mathbf{K}/\mathbf{H} \subseteq W\mathbf{H}$ erzeugt, gilt

$$\lambda(Y_h)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda(X_h)_{\mathbf{H}}(g) \cdot \frac{\tau_{\mathbf{H}}(g)}{\epsilon(\mathbf{K})}.$$

(3) Es gibt eine die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ erfüllende Funktion $\epsilon \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$ sowie für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$ ein $\tau_{\mathbf{H}} \in RO(W\mathbf{H})^*$, s. d. für jedes $g \in W\mathbf{H}$, das eine Untergruppe $\mathbf{K}/\mathbf{H} \subseteq W\mathbf{H}$ erzeugt, gilt

$$\lambda(Y_h)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda(X_h)_{\mathbf{H}}(g) \cdot \frac{\tau_{\mathbf{H}}(g)}{\epsilon(\mathbf{K})}.$$

Ist (2) (und damit auch (1) und (3)) erfüllt, so ist $\epsilon \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$ die Gradfunktion einer \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz $X \longrightarrow Y$.

Beweis: ((3) \implies (2)) ist klar.

((2) \implies (1)): Dieser Teil des Beweises verläuft ganz analog zu dem Beweis der entsprechenden Aussage in Satz 3.12, diesmal unter Verwendung von Satz 4.4 sowie der Orthogonalitätsrelation $\sum_{g \in W\mathbf{H}} \tau(g) = |W\mathbf{H}| \cdot \langle \tau, 1 \rangle_{W\mathbf{H}} \equiv 0 \pmod{|W\mathbf{H}|}$ für τ aus dem reellen Darstellungsring $RO(W\mathbf{H}) \subset R(W\mathbf{H})$: es folgt, daß $\epsilon \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$ als Gradfunktion einer \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz realisierbar ist.

((1) \implies (3)): Angenommen X und Y sind \mathbf{G} -homotopieäquivalent. Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, ergibt sich aus der Existenz einer Äquivalenz $h' : X \longrightarrow Y$ eine \mathbf{G} -Homotopieäquivalenz

$$h'' : S(W_X \oplus V_Y) \longrightarrow S(W_Y \oplus V_X)$$

mit Gradfunktion

$$d(h'') = d(h') \frac{d(h_Y)}{d(h_X)}, \quad (4.9)$$

wobei $S(W_X \oplus V_Y)$ und $S(W_Y \oplus V_X)$ bevorzugt orientiert sind (siehe (4.8)).

Ist z. B. $W_X \oplus V_Y \cong V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_m$ eine der gewählten bevorzugten Orientierung zugrundeliegende bevorzugte Zerlegung, so definieren wir $E := 7V_1 \perp \dots \perp 7V_m$ und orientieren die Darstellungssphäre $S(U_X)$ von $U_X := W_X \oplus V_Y \oplus E$ nach einer (bevorzugten) Zerlegung $U_X \cong 8V_1 \perp \dots \perp 8V_m$. Dann ist in der bevorzugten Zerlegung $W_Y \oplus V_X \cong W_1 \perp W_2 \perp \dots \perp W_m$, die der Orientierung von $S(W_Y \oplus V_X)$ zugrunde liegt, W_i konjugiert zu V_i ($i = 1, \dots, m$), und es gibt eine bevorzugt zerlegte orthogonale \mathbf{G} -Darstellung $W_1 \perp 7V_1 \perp W_2 \perp 7V_2 \perp \dots \perp W_m \perp 7V_m$ isomorph zu $U_Y := W_Y \oplus V_X \oplus E$. Mit der entsprechenden bevorzugten Orientierung auf $S(U_Y)$ existieren dann zwei \mathbf{G} -Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} s_X & : S(W_X \oplus V_Y) * S(E) \longrightarrow S(U_X) \\ \text{und } s_Y & : S(W_Y \oplus V_X) * S(E) \longrightarrow S(U_Y) \end{aligned}$$

mit denselben Abbildungsgraden

$$\deg(s_X^{\mathbf{H}}) = \deg(s_Y^{\mathbf{H}}) \in \mathbb{Z}^*$$

für alle $\mathbf{H} \in \Psi(\mathbf{G})$. Die damit durch folgendes kommutatives Diagramm definierte Äquivalenz $h : S(U_X) \longrightarrow S(U_Y)$

$$\begin{array}{ccc} S(W_X \oplus V_Y) * S(E) & \xrightarrow{h'' * id} & S(W_Y \oplus V_X) * S(E) \\ \simeq_{\mathbf{G}} \downarrow s_X & & \simeq_{\mathbf{G}} \downarrow s_Y \\ S(U_X) & \xrightarrow{h} & S(U_Y) \end{array}$$

besitzt dann dieselbe Gradfunktion wie h''

$$d(h) = d(h''). \quad (4.10)$$

In dieser Situation beweist Tornehave ([37], §2), daß sowohl $U_X^{\mathbf{H}}$ als auch $U_Y^{\mathbf{H}}$ jeweils reelle Spin- $W\mathbf{H}$ -Darstellungen sind (dabei sei o. E. $\mathbf{H} = \mathbf{1}$, also $W\mathbf{H} = \mathbf{G}$):

Zunächst zeigt er, daß, wenn U eine beliebige orthogonale \mathbf{G} -Darstellung ist, $8U = U \perp \dots \perp U$ stets eine Spin- \mathbf{G} -Darstellung ist, d. h. der die Darstellung $8U$ definierende Homomorphismus $\mathbf{G} \longrightarrow O(8U)$ von \mathbf{G} in die orthogonale Gruppe von $8U$ faktorisiert über der Spingruppe $\text{Spin}(8U)$ von $8U$:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spin}(8U) & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathbf{G} & \longrightarrow & O(8U). \end{array}$$

Es seien $\gamma_1 U, \dots, \gamma_8 U$ jeweils zu U durch einen Körperautomorphismus $\gamma_i \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}(i))$ konjugierte \mathbf{G} -Darstellungen. Tornehave beschreibt weiter, wie die durch γ_i -Konjugationen $\phi_i : U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow (\gamma_i U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, 8$) induzierten Homomorphismen $\text{Pin}(\phi_i) : \text{Pin}(U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \rightarrow \text{Pin}((\gamma_i U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ auch eine Hochhebung

$$\mathbf{G} \longrightarrow \text{Spin}(\gamma_1 U \perp \gamma_2 U \perp \dots \perp \gamma_8 U)$$

von $\mathbf{G} \rightarrow O(\gamma_1 U \perp \dots \perp \gamma_8 U)$ liefern (Einzelheiten siehe [37], §2).

Theorem 4.6 (Atiyah [2], Theorem (6.1)) *Sei X ein kompakter \mathbf{G} -Raum, V eine reelle orientierte Spin- \mathbf{G} -Darstellung einer Dimension $\equiv 0 \pmod{8}$ und $b(V) \in KO_{\mathbf{G}}(DV, SV)$ die Bottklasse von V . Dann induziert die Multiplikation mit $b(V)$ einen Isomorphismus*

$$KO_{\mathbf{G}}(X) \xrightarrow{\cong} KO_{\mathbf{G}}(X \times (DV, SV)).$$

Wegen dieser Bottperiodizität der äquivarianten KO -Theorie sind also für alle Untergruppen \mathbf{H} von \mathbf{G} die $RO(W\mathbf{H})$ -Moduln $KO_{W\mathbf{H}}(DU_X^{\mathbf{H}}, SU_X^{\mathbf{H}})$ und $KO_{W\mathbf{H}}(DU_Y^{\mathbf{H}}, SU_Y^{\mathbf{H}})$ frei vom Rang eins, erzeugt von den Bottklassen $b(U_X^{\mathbf{H}})$ bzw. $b(U_Y^{\mathbf{H}})$ (die abhängig von den gewählten Orientierungen der Vektorräume sind).

Da $h^{\mathbf{H}} : SU_X^{\mathbf{H}} \rightarrow SU_Y^{\mathbf{H}}$ eine $W\mathbf{H}$ -Homotopieäquivalenz ist, ist die durch $h^{\mathbf{H}}$ induzierte Abbildung

$$(h^{\mathbf{H}})^* : KO_{W\mathbf{H}}(DU_Y^{\mathbf{H}}, SU_Y^{\mathbf{H}}) \rightarrow KO_{W\mathbf{H}}(DU_X^{\mathbf{H}}, SU_X^{\mathbf{H}})$$

ein Isomorphismus von $RO(W\mathbf{H})$ -Moduln, d. h. es gibt ein $a_{\mathbf{H}} := a_{W\mathbf{H}}(h^{\mathbf{H}}) \in RO(W\mathbf{H})^*$, den äquivarianten KO -theoretischen Abbildungsgrad von $h^{\mathbf{H}}$, s. d.

$$(h^{\mathbf{H}})^*(b(U_Y^{\mathbf{H}})) = a_{\mathbf{H}} \cdot b(U_X^{\mathbf{H}}).$$

Sei nun $g \in W\mathbf{H}$ und $\mathbf{K} \triangleright \mathbf{H}$ so, daß \mathbf{K}/\mathbf{H} die von g erzeugte zyklische Untergruppe ist. Tornehave ([37], §2) berechnet den Wert dieses Charakters $a_{\mathbf{H}}$ (bzgl. der durch die von uns gewählten Orientierungen gegebenen Bottklassen) an der Stelle g zu

$$a_{\mathbf{H}}(g) = \text{deg}(h^{\mathbf{K}}) \cdot \frac{\lambda(U_Y)_{\mathbf{H}}(g)}{\lambda(U_X)_{\mathbf{H}}(g)}$$

mit den Klassenfunktionen $\lambda(U)_{\mathbf{H}} : W\mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}^*$ aus Definition 4.3. Dabei ist sein Vorgehen analog zu dem von Petrie und tom Dieck in [11] (bzw. zu dem unseren in Abschnitt 3.2): Ist U eine Spin- \mathbf{G} -Darstellung und \mathbf{C} die von $g \in \mathbf{G}$ erzeugte zyklische Untergruppe, so induziert die Inklusion der Fixpunktmenge $i_U : SU^{\mathbf{C}} \rightarrow SU$ einen Homomorphismus

$$i_U^* : K_{\mathbf{C}}(DU, SU) \rightarrow K_{\mathbf{C}}(DU^{\mathbf{C}}, SU^{\mathbf{C}})$$

zwischen $RO(\mathbf{C})$ -Moduln vom Rang 1, der, mit den entsprechenden Bottklassen $b(U)$ und $b(U^{\mathbf{C}})$, von einer Gleichung

$$i_U^*(b(U)) = \lambda'(U_{\mathbf{C}}) \cdot b(U^{\mathbf{C}})$$

beschrieben wird. Für die Spin- \mathbf{C} -Darstellung U berechnet Tornehave den Wert des Charakters von $\lambda'(U_{\mathbf{C}}) \in RO(\mathbf{C})$ an der Stelle g zu

$$\lambda'(U_{\mathbf{C}})(g) = M \cdot \lambda(U)(g) \in \mathbb{C}, \quad (4.11)$$

wobei der Faktor M nur von der Dimensionsfunktion von U abhängt und $\lambda(U) = \lambda(U)_{\mathbf{1}} \in \mathcal{K}(\mathbf{G}, \mathbb{C})^*$ die Klassenfunktion aus Definition 4.3 ist (die hiermit ihre Daseinsberechtigung erhält).

Die restliche Berechnung von $a_{\mathbf{H}}(g)$ verläuft dann wie in Abschnitt 3.2.

Wegen $\lambda(V \oplus W)_{\mathbf{H}} = \lambda(V)_{\mathbf{H}} \cdot \lambda(W)_{\mathbf{H}}$ ergibt sich, nach Definition 4.3,

$$\frac{a_{\mathbf{H}}(g)}{\deg(h^{\mathbf{K}})} = \frac{\lambda(W_Y \oplus V_X \oplus E)_{\mathbf{H}}(g)}{\lambda(W_X \oplus V_Y \oplus E)_{\mathbf{H}}(g)} = \frac{\lambda(W_Y)_{\mathbf{H}} \lambda(V_X)_{\mathbf{H}}(g)}{\lambda(W_X)_{\mathbf{H}} \lambda(V_Y)_{\mathbf{H}}(g)} = \frac{\lambda'(Y_h^{\mathbf{H}})}{\lambda'(X_h^{\mathbf{H}})}(g).$$

Für $\lambda(X_h)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda'(X_h^{\mathbf{H}})(g) \cdot \deg(h_X^{\mathbf{K}})$ und $\lambda(Y_h)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda'(Y_h^{\mathbf{H}})(g) \cdot \deg(h_Y^{\mathbf{K}})$ bedeutet das, mit (4.9) und (4.10),

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(Y_h)_{\mathbf{H}}(g)}{\lambda(X_h)_{\mathbf{H}}(g)} &= \frac{a_{\mathbf{H}}(g)}{\frac{\deg(h_Y^{\mathbf{K}})}{\deg(h_X^{\mathbf{K}})} \deg((h')^{\mathbf{K}})} \cdot \frac{\deg(h_Y^{\mathbf{K}})}{\deg(h_X^{\mathbf{K}})} \\ &= \frac{a_{\mathbf{H}}(g)}{\deg((h')^{\mathbf{K}})}, \end{aligned}$$

wobei $\epsilon := d(h') \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$ die Instabilitätsbedingungen $B(D)$ aus Theorem 4.4 erfüllt und $a_{\mathbf{H}} \in RO(W\mathbf{H})^*$ ist. \square

Die Frage nach stabiler Äquivalenz zweier Darstellungssphären läßt sich, unter Verwendung dieses letzten Satzes, wie folgt beantworten:

Satz 4.7 *Ist \mathbf{G} eine endliche Gruppe und sind V und W zwei orthogonale \mathbf{G} -Darstellungen der gleichen Dimensionsfunktion, so sind äquivalent:*

- (1) *SV und SW sind stabil \mathbf{G} -homotopieäquivalent.*
- (2) *Es gibt eine Funktion $\epsilon \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})^*$, die konstant auf Konjugationsklassen ist, sowie für alle $\mathbf{H} \in \Psi_V(\mathbf{G})$ ein $\tau_{\mathbf{H}} \in RO(W\mathbf{H})^*$, s. d. für jedes $g \in W\mathbf{H}$, das eine Untergruppe $\mathbf{K}/\mathbf{H} \subseteq W\mathbf{H}$ erzeugt, gilt*

$$\lambda(V)_{\mathbf{H}}(g) = \lambda(W)_{\mathbf{H}}(g) \cdot \frac{\tau_{\mathbf{H}}(g)}{\epsilon(\mathbf{K})}.$$

Beweis: Ist V die reguläre Darstellung von \mathbf{G} , so gilt für alle Untergruppen $\mathbf{H}' \supseteq \mathbf{H}$

$$\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbf{H}} = |\mathbf{G}/\mathbf{H}| > \dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbf{H}'} = |\mathbf{G}/\mathbf{H}'| \geq 1.$$

Die einzige Instabilitätsbedingung, die Gradfunktionen von \mathbf{G} -Abbildungen $f : X * S(V \oplus \mathbb{R}) \rightarrow Y * S(V \oplus \mathbb{R})$ erfüllen müssen, ist also die Konstanz auf den

Konjugationsklassen. In der Aussage (2) kann o. E. stets λ' durch λ ersetzt werden. Ist daher (2) erfüllt, so sind nach Satz 4.5 $X * S(V \oplus \mathbb{R})$ und $Y * S(V \oplus \mathbb{R})$ äquivalent.

Die Umkehrung ((1) \implies (2)) folgt, wie im komplexen Fall, aus Satz 4.5 wegen der Multiplikativität der Klassenfunktionen $\lambda(\cdot)_{\mathbf{H}}$ auf \mathbf{G} -Darstellungen (siehe (4.5)). \square

Parallel zu unserer Vorgehensweise in Kapitel 3 wollen wir diese Ergebnisse wiederum zur instabilen und auch zur stabilen Klassifizierung stabil linearer Homotopiedarstellungen benutzen: Wir werden sowohl ihre Äquivalenzklassen bei gegebener Dimensionsfunktion D charakterisieren, als auch eine Beschreibung von $JO(\mathbf{G})$, d. h. der Untergruppe der stabil linearen Homotopiedarstellungen in der Gruppe aller Homotopiedarstellungen $V(\mathbf{G})$, geben. (Die Frage nach orientierter Äquivalenz erübrigt sich, da reelle Darstellungssphären keine kanonische Orientierung besitzen.)

Wir erinnern zunächst an die in Abschnitt 3.3 definierten Gruppen $\mathcal{E}(\mathbf{G}) \subset \mathcal{K}^*(\mathbf{G}) = \prod_{\mathbf{H} \in \Psi_V(\mathbf{G})} \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$, sowie an die von einer Dimensionsfunktion $D \in \mathcal{C}(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$ abhängigen Untergruppen $\mathcal{E}_D(\mathbf{G}) \subset \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G}) = \prod_{\mathbf{H} \in Iso(D) \cap \Psi_V(\mathbf{G})} \mathcal{K}(W\mathbf{H}, \mathbb{C})^*$. Anstelle von $\mathcal{R}^*(\mathbf{G}) \subset \mathcal{K}^*(\mathbf{G})$ und $\mathcal{R}_D^*(\mathbf{G}) \subset \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G})$ benötigen wir die mit Hilfe der Einheitengruppen der reellen Darstellungsringe $RO(W\mathbf{H})$ definierten Untergruppen

$$\begin{aligned} \mathcal{RO}^*(\mathbf{G}) &:= \prod_{\mathbf{H} \in \Psi_V(\mathbf{G})} RO(W\mathbf{H})^* \subset \mathcal{K}^*(\mathbf{G}) \\ \text{und } \mathcal{RO}_D^*(\mathbf{G}) &:= \prod_{\mathbf{H} \in Iso(D) \cap \Psi_V(\mathbf{G})} RO(W\mathbf{H})^* \subset \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

Definition 4.8 *Es sei*

$$\begin{aligned} \mathcal{JO}(\mathbf{G}) &:= \mathcal{K}^*(\mathbf{G}) / \mathcal{RO}^*(\mathbf{G}) \mathcal{E}(\mathbf{G}) \\ \text{und } \mathcal{JO}_D(\mathbf{G}) &:= \mathcal{K}_D^*(\mathbf{G}) / \mathcal{RO}_D^*(\mathbf{G}) \mathcal{E}_D(\mathbf{G}). \end{aligned}$$

Ist $jO(\mathbf{G}) \subset JO(\mathbf{G})$ der Kern der Dimensionsfunktion $\text{Dim}_{\mathbf{G}}|JO(\mathbf{G}) : JO(\mathbf{G}) \rightarrow C(\Psi(\mathbf{G}), \mathbb{Z})$, sowie $RO_h(\mathbf{G}) = \{V - W \in RO(\mathbf{G}) \mid SV \text{ ist stabil äquivalent zu } SW\} \subset RO_0(\mathbf{G})$, so ist

$$jO(\mathbf{G}) \cong RO_0(\mathbf{G}) / RO_h(\mathbf{G}).$$

Aus den Sätzen 4.5 und 4.7 folgen dann die zu Satz 3.16 analogen Aussagen

Satz 4.9 *Die Gruppe \mathbf{G} sei endlich.*

1. *Sei $JO_D(\mathbf{G})$ die Menge der Äquivalenzklassen stabil linearer \mathbf{G} -Homotopiedarstellungen der Dimensionsfunktion D . Dann ist*

$$\begin{aligned} \Lambda_{O_D} : JO_D(\mathbf{G}) &\longrightarrow \mathcal{JO}_D(\mathbf{G}) \\ [X] &\longmapsto \Lambda_{O_D}[X] := \left[(\lambda(X_h)_{\mathbf{H}})_{\mathbf{H} \in Iso(D) \cap \Psi_V(\mathbf{G})} \right] \end{aligned}$$

eine wohldefinierte und injektive Abbildung.

2. Die durch $V \mapsto \Lambda O(V) := [(\lambda(V)_{\mathbf{H}})_{\mathbf{H} \in \Psi_V(\mathbf{G})}] \in \mathcal{JO}(\mathbf{G})$ induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda O : \quad RO_0(\mathbf{G})/RO_h(\mathbf{G}) &\longrightarrow \mathcal{JO}(\mathbf{G}) \\ [W] - [V] &\longmapsto \Lambda O(W) \cdot \Lambda O(V)^{-1} \end{aligned}$$

ist ein wohldefinierter, injektiver Gruppenhomomorphismus. □

Literaturverzeichnis

- [1] Atiyah, M. F.: *K-Theory*. W. A. Benjamin, New York–Amsterdam 1967.
- [2] Atiyah, M. F.: *Bott Periodicity and the index of elliptic operators*. Quart. J. Math. Oxford (2) **19**, S. 113-140. 1968.
- [3] Atiyah, M. F., und R. Bott, A. Shapiro: *Clifford modules*. Topology **3**, Suppl. 1, S. 3-38. 1964.
- [4] Atiyah, M. F., und D. O. Tall: *Group representations, λ -rings and the J -homomorphism*. Topology **8**, S. 253-297. 1969.
- [5] Bauer, S.: *Dimension functions of homotopy representations for compact Lie groups*. Math. Ann. **280**, S. 247-265. 1988.
- [6] Bott, R.: *Lectures on $K(X)$* . W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.
- [7] Bredon, G. E.: *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, New York–London 1972.
- [8] Curtis, C. W., und I. Reiner: *Representation theory of finite groups and associative algebras*. New York 1962.
- [9] tom Dieck, T.: *A finiteness theorem for the Burnside ring of a compact Lie group*. Compositio math. **35**, S. 91-97. 1977.
- [10] tom Dieck, T.: *Homotopy-equivalent group representations*. J. reine u. angewandte Math. **298**, S. 182-195. 1978.
- [11] tom Dieck, T., und T. Petrie: *Geometric modules over the Burnside ring*. Invent. Math. **47**, S. 273-287. 1978.
- [12] tom Dieck, T.: *Transformation groups and representation theory*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1979.
- [13] tom Dieck, T., und T. Petrie: *Homotopy representations of finite groups*. Publ. Math. IHES **56**, S. 129-169. 1982.
- [14] tom Dieck, T.: *Homotopy representations of the torus*. Arch. Math. **38**, S. 459-469. 1982.

- [15] tom Dieck, T.: *The Picard group of the Burnside ring*. J. reine u. angewandte Math. **361**, S. 174-200. 1985.
- [16] tom Dieck, T.: *Die Picard-Gruppe des Burnsideringes einer kompakten Lieschen Gruppe*. I. *Mathematica Gottingensis* **46**. 1986.
- [17] tom Dieck, T.: *Transformation groups*. Walter de Gruyter, Berlin–New York 1987.
- [18] tom Dieck, T.: *On the structure of the representation ring*. *Mathematica Gottingensis* **56**. 1987.
- [19] Friedrich, T.: *Vorlesungen über K-Theorie*. Teubner, Leipzig 1978.
- [20] Greenlees, J. P. C.: *Equivariant homotopy and cohomology theory*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics No. **91**. 1996.
- [21] Hsiang, W.-C., und W. Pardon: *When are topologically equivalent orthogonal transformations linearly equivalent?*. *Invent. math.* **68**, S. 275-316. 1982.
- [22] Illman, S.: *Smooth equivariant triangulations of G-manifolds for G a finite group*. *Math. Ann.* **233**, S. 199-220. 1978.
- [23] Illman, S.: *The equivariant triangulation theorem for actions of compact Lie groups*. *Math. Ann.* **262**, S. 487-501. 1983.
- [24] Laitinen, E.: *Unstable theory of homotopy representations*. Proc. Transformation groups, Poznań 1985, Springer LNM **1217**, S. 210-248.
- [25] Laitinen, E., und W. Lück: *Equivariant Lefschetz classes*. *Osaka J. Math.* **26**, S. 491-525. 1989.
- [26] Lee, C.-N., und A. G. Wasserman: *On the groups $JO(G)$* . *Mem. Amer. Math. Soc.* **159**. 1975.
- [27] Lewis, L. G. Jr. und J. P. May, M. Steinberger: *Equivariant stable homotopy theory*. Springer LNM **1213**, Berlin–Heidelberg 1986.
- [28] Lück, W.: *Transformation groups and Algebraic K-Theory*. Springer LNM **1408**, Berlin–Heidelberg 1989.
- [29] Meyerhoff, A., und T. Petrie: *Quasi equivalence of G-modules*. *Topology* **15**, S. 69-75. 1976.
- [30] Nagasaki, I.: *Homotopy representations and spheres of representations*. *Osaka J. Math.* **22**, S. 895-905. 1985.
- [31] Nagasaki, I.: *Homotopy representation groups and Swan subgroups*. *Osaka J. Math.* **24**, S. 253-261. 1987.

- [32] Nagasaki, I.: *Linearity of homotopy representations, II*. Manuscripta Math. **82**, S. 277-292. 1994.
- [33] de Rham, G.: *Reidemeister's torsion invariant and rotations of S^n* . Differential Analysis, Bombay Colloq. 1964, Oxford University Press S. 27-36. 1964.
- [34] Segal, G. B.: *Equivariant K-Theory*. Publ. Math. IHES **34**, S. 129-151. 1968.
- [35] Serre, J.-P.: *Linear Representations of Finite Groups*. Springer, New York 1977.
- [36] Suzuki, M.: *Group Theory II*. Springer, New York 1986.
- [37] Tornehave, J.: *Equivariant maps of spheres with conjugate orthogonal actions*. Proc. Algebraic Topology, London Ontario 1981, Canadian Math. Soc. Conf. Proc. Vol. **2** Part 2, S. 275-301. 1982.
- [38] Waner, S.: *Equivariant homotopy theory and Milnor's theorem*. Trans. Amer. Math. Soc. **258**, S. 351-368. 1980.
- [39] Wolfart, J.: *Einführung in die Zahlentheorie und Algebra*. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden 1996.

Lebenslauf

geboren am Eltern	03.11.1966	in Hameln, Landkreis Hameln–Pyrmont Siegfried Ott und Jutta Ott, geb. Reinhardt
Schulausbildung	1973 – 1975 1975 – 1977 1977 – 1986	Grundschule Hermannschule (Hameln) Grundschule Hastenbeck (Hameln) Viktoria–Luise–Gymnasium (Hameln)
Studium	1986 – 1992	Studium der Mathematik mit Nebenfach Theoretische Physik an der Georg–August–Universität Göttingen. Abschluß: Diplom am 3.11.1992. Thema der Diplomarbeit: „Die Zuckerman–Funktionen in der Darstellung von Duflo und Vergne“
	10/1992 – 09/1993	wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Göttingen
	10/1993 – 12/1995	wissenschaftliche Mitarbeiterin am SFB 170 (Geometrie und Analysis)
	01/1996 – 04/1997	Stipendiatin der S. Berliner–Stiftung