

Birman-Murakami-Wenzl Algebren des Coxeter Typs B

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Reinhard Häring-Oldenburg
aus Bensheim

Göttingen 1998

D 7

Referent: Prof. Dr. Tammo tom Dieck

Koreferent: Prof. Dr. Ulrich Stuhler

Tag der mündlichen Prüfung: 2. 7. 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Definition der Ariki-Koike-BMW-Algebra	8
2.1	Die Typ-B-BMW-Algebren der Höhe ∞	10
2.1.1	Graphische Interpretation und Skeinmoduln	10
2.1.2	Einfache Folgerungen	12
2.2	Die Algebren von endlicher Höhe	16
2.2.1	Beziehungen zu anderen Knotenalgebren	18
2.2.2	Grundringe und Moduln für $n = 2$	19
3	Das Wortproblem in \mathcal{B}_n^k	26
4	Der klassische Limes	32
5	Die Markovspur	34
5.1	Die Spur im klassischen Limes	37
5.2	Spurkonstruktion nach Wenzl	38
6	Der Struktursatz	41
7	Tensorarstellungen	43
7.1	Tensorarstellungen zu $k = 2$	43
7.2	Tensorarstellungen zu $k = 3$	44
8	Invarianten von Knoten im Volltorus	45
9	Halbeinfachheit im nichtgenerischen Fall	45
10	Die volle Typ B Birman-Murakami-Wenzl-Algebra	46
11	Epilog: Der Weg zu einer kategoriellen Interpretation	49
11.1	Modulpaare von Tensor kategorien	49
11.2	Zylinderzopfung	52
11.3	Bandschlingel im Zylinder	53
11.4	Zylinderzopfung mit Punkten	56
11.5	Skeinrelationen	57
12	Appendix A: Turaevs Theorem	58
13	Appendix B: Beweise zu Aussagen aus Abschnitt 2.1.2	64
14	Appendix C: Algebraische Hilfsmittel	65

If asked why he spares mathematics, the scientist will perhaps say that its laws are necessarily true; but I think we have here an explanation, rather, of mathematical necessity itself. It resides in our unstated policy of shielding mathematics by exercising our freedom to reject other beliefs instead.

Willard van Orman Quine, Pursuit of Truth

1 Einleitung

Zopfgruppen existieren als Überlagerungen der Coxeter-Gruppen für alle Coxeter-Dynkin-Diagramme. Eine Präsentation der Zopfgruppe entsteht dabei aus der Coxeter-Präsentation der Coxeter-Gruppe durch Weglassen der quadratischen Relationen. Die Zopfgruppe des Coxeter Diagramms A mit n Vertizes ZA_n ist dann Artins Zopfgruppe mit n Strängen. Die Zopfgruppe ZB_n der B-Serie besitzt demnach eine Präsentation mit Generatoren $\tau_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$, wobei die Generatoren $\tau_i, i \geq 1$ die Artinsche Zopfgruppe ZA_n erzeugen, also den Relationen

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad |i - j| > 1 \quad (1)$$

$$\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j \quad |i - j| = 1 \quad (2)$$

genügen, und in der der Generator τ_0 die folgenden Relationen erfüllt:

$$\tau_0 \tau_1 \tau_0 \tau_1 = \tau_1 \tau_0 \tau_1 \tau_0 \quad (3)$$

$$\tau_0 \tau_i = \tau_i \tau_0 \quad i \geq 2 \quad (4)$$

Die Zopfgruppe ZB_n kann auf verschiedene Arten visualisiert werden (siehe [6], [7], [8]). Das symmetrische Bild zeigt Elemente aus ZB_n als Zöpfe mit $2n$ Strängen (numeriert $-n, \dots, -1, 1, \dots, n$), die invariant sind unter einer Drehung um 180 Grad um die senkrechte Mittelachse. Im Zylinder-Bild erscheint der B-Zopf als ein Zopf mit n Strängen, der sich um eine feste, links angebrachte (Zylinder-)Achse (numeriert mit 0) winden kann. Dem Generator τ_0 entspricht die in der Symmetrieachse liegende Kreuzung bzw. die Umrundung der 0-Achse. Die Bilder der Generatoren $\tau_i, i \geq 0$ werden als $X_i^{(G)}$ in Bild 1 gezeigt.

Knoten oder Verschlingungen vom Typ B entstehen durch Schließen solcher Zöpfe. Das Zylinder-Bild zeigt dann sehr schön, daß es sich um Verschlingungen handelt, die in einem Volltorus liegen. Verallgemeinerungen auf Henkelkörper beliebigen Geschlechts sind ebenfalls möglich, verlassen aber den Bereich, der durch das Coxeter B-Diagramm abgesteckt wird.

Zöpfe lassen sich in naheliegender Weise zu Schlingeln verallgemeinern, die auch Maxima und Minima, etwa die Generatoren symmetrischer Brücken $e_i^{(G)}, i \geq 0$, enthalten dürfen.

Die Gruppenalgebra der Artinschen Zopfgruppe besitzt eine Reihe interessanter endlichdimensionaler Quotienten. Die wichtigsten sind die Temperley-Lieb-Algebra, die Hecke-Algebra und die Birman-Murakami-Wenzl-Algebra (kurz BMW-Algebra). Diese Algebren treten als Zentralisatoren n -facher Tensorprodukte der fundamentalen Darstellungen der Quantengruppen zu sl_2, sl_N und so_N, sp_N auf. Dieser Zugang liefert auch Tensorarstellungen dieser Algebren und erlaubt es, die auf den Algebren zunächst rein algebraisch definierbaren Markovspuren als Spuren von Matrizen zu verstehen. Hauptanwendung der Markov-Spuren ist die Berechnung von Invarianten von Verschlingungen, nämlich des Jones-Polynoms, des HOMFLY-Polynoms und des Kauffman-Polynoms. Diese Konstruktionen können in den Darstellungskategorien der zugehörigen Quantengruppen formal einheitlich und befriedigend dargestellt werden [20].

Ziel der Knotentheorie der B-Serie ist eine möglichst vollständige Verallgemeinerung dieser Konzepte auf die Zopfgruppe der B-Serie. Während die Beziehungen der B-Knotentheorie zu Quantengruppen erst kürzlich entdeckt wurden [11] und die zugrundeliegende kategorielle Struktur sich erst abzeichnet [16], [9] gibt es bereits eine Reihe von Arbeiten zu Verallgemeinerungen der Typ B Temperley-Lieb- und Hecke-Algebren, unter anderem von Ariki und Koike [1][2], tom Dieck [6][7], Dipper und James [12] und Lambropoulou [22]. Erweiterungen der BMW-Algebra, die Quotienten der Zopfgruppe ZB_n sind, wurden bisher noch nicht untersucht. Die vorliegende Arbeit versucht, diese Lücke zu verkleinern.

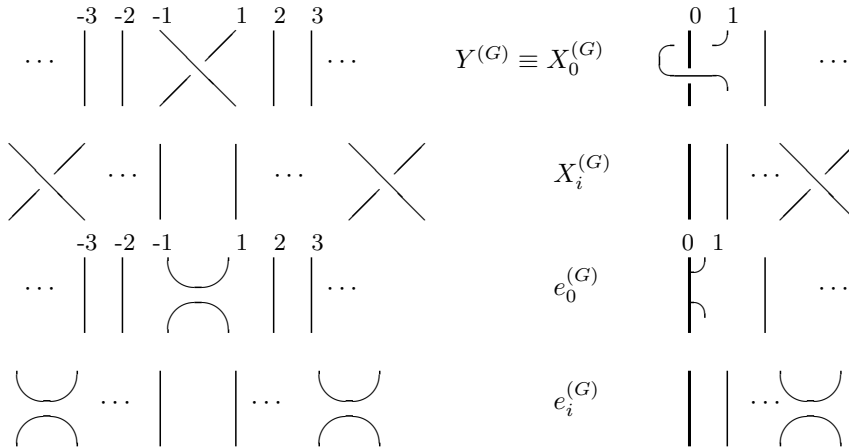


Abbildung 1: Die graphische Interpretation der Generatoren – links als symmetrische Schlingel, rechts als Zylinder-Schlingel

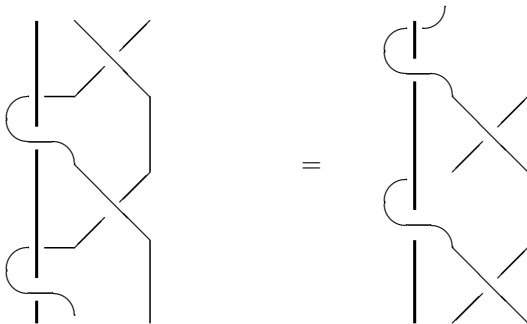


Abbildung 2: Relation (3) im Zylinderbild

Überblick über Typ B Algebren: Temperley-Lieb-Algebren TB_n der B-Serie wurden von T. tom Dieck in [6] eingeführt als Algebren von kreuzungsfreien, symmetrischen Schlingeln. Graphische Generatoren sind die $e_i^{(G)}, i = 0, \dots, n - 1$ aus Bild 1. Die algebraische Definition lautet:

1. Definition. Die Temperley-Lieb Algebra TB_n wird über einem Ring mit Parametern c, d erzeugt von e_0, e_1, \dots, e_{n-1} mit den Relationen:

$$\begin{aligned}
 e_1 e_0 e_1 &= c e_1 \\
 e_i e_j e_i &= e_i \quad |i - j| = 1, i, j \geq 1 \\
 e_i e_j &= e_j e_i \quad |i - j| > 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_0^2 &= ce_0 \\ e_i^2 &= de_i \end{aligned}$$

TB_n trägt eine Markovspur, die zu einer Verallgemeinerung des Jones-Polynoms für B-Verschlingungen führt. Für generische Parameter ist sie halbeinfach, und ihr Bratteli-Diagramm ist durch das Pascal'sche Dreieck gegeben.

Hecke-Algebren des Typs B (und auch anderer Typen) wurden schon eingehend untersucht (siehe etwa [12]). Eine naheliegende Verallgemeinerung ist die Serie der Ariki-Koike-Algebren, aus der sich die Hecke-Algebra HB_n für $k = 2$ ergibt.

2. Definition. Sei AK_n^k die Ariki-Koike-Algebra [1] mit Generatoren X_0, X_1, \dots, X_{n-1} und Parametern $Q, p_i, i = 0, \dots, k-1$ und Relationen:

$$\begin{aligned} X_0 X_1 X_0 X_1 &= X_1 X_0 X_1 X_0 \\ X_i X_j &= X_j X_i \quad |i - j| > 1 \\ X_i X_j X_i &= X_j X_i X_j \quad |i - j| = 1 \\ X_i^2 &= (Q - 1)X_i + Q \quad i \geq 0 \\ 0 &= \prod_{i=0}^{k-1} (X_0 - p_i) \end{aligned}$$

Die Ariki-Koike-Algebra ist für generische Parameter ebenfalls halbeinfach, und ihr Bratteli-Diagramm ist durch Tupel von k Young-Diagrammen mit insgesamt n Kästchen gegeben.

In der vorliegenden Arbeit werden Erweiterungen der Birman-Wenzl-Algebren besprochen, die Quotienten der Zopfgruppe ZB_n sind. Das Bild von $\tau_0 \in ZB_n$ ist dabei ein Generator Y , der ähnlich wie X_0 in der Ariki-Koike-Algebra einem in Linearfaktoren zerfallenden Polynom k -ter Ordnung genügen soll, so daß die Ariki-Koike-Algebra als ein geeigneter Quotient erhalten werden kann — so wie auch die Hecke-Algebra HA_n ein Quotient der Typ A BMW Algebra BA_n ist. Die Relationen lauten (im generischen Fall):

$$\begin{aligned} X_i X_j &= X_j X_i \quad |i - j| > 1 \\ X_i X_j X_i &= X_j X_i X_j \quad |i - j| = 1 \\ e_i &:= 1 - \frac{X_i - X_i^{-1}}{\delta} \\ X_i e_i &= e_i X_i = \lambda e_i \\ e_i X_{i-1}^{\pm 1} e_i &= \lambda^{\mp 1} e_i \\ X_1 Y X_1 Y &= Y X_1 Y X_1 \\ Y X_i &= X_i Y \quad i > 1 \\ e_1 Y^i e_1 &= A_i e_1 \\ Y X_1 Y e_1 &= \lambda^{-1} e_1 = e_1 Y X_1 Y \\ 0 &= \prod_{i=0}^{k-1} (Y - p_i) \end{aligned}$$

Die ersten fünf Relationen beschreiben die gewöhnliche, zum Coxeter Typ A gehörige Birman-Murakami-Wenzl-Algebra [34]. Die restlichen fünf Relationen führen den Zylinderzopf-Generator Y ein, der die Algebra zu einem Quotienten der B-Zopfgruppe macht. Der Parameter k in der letzten Relation möge Höhe genannt werden, und wir sind auch an dem Fall unendlicher Höhe interessiert.

Hauptziel der Arbeit ist die Klärung der Halbeinfachheit und der Multimatrixstruktur über generischen Grundringen. Das geeignete Werkzeug dazu ist die Jones-Wenzl-Theorie [33]. Der Weg zu ihrer Anwendung bestimmt wesentlich die

Struktur der Arbeit:

Abschnitt 2 bringt die Definition und erste Eigenschaften der Ariki-Koike-BMW-Algebren. Nach einer Erinnerung der Definition der gewöhnlichen (Typ-A) BMW-Algebra werden in Unterabschnitt 2.1 die Algebren unendlicher Höhe, d.h. ohne polynomielle Relation für Y , eingeführt, und ein generischer Grundring R_0^∞ wird ausgezeichnet. Der nächste Unterabschnitt definiert knotentheoretische Versionen, von denen zunächst nur klar ist, daß sie homomorphe Bilder der zuvor eingeführten Algebren sind. Unterabschnitt 2.1.2 wendet sich wieder den algebraisch definierten Algebren zu. Es werden eine Reihe von Relationen abgeleitet und drei verschiedene (Anti-)Involutionen werden bereit gestellt. Danach wird mit Hilfe eines Theorems von Turaev (dessen Beweis in einem Anhang gegeben wird) gezeigt, daß über dem generischen Grundring das Annulatorideal von $e_1 e_3 \cdots e_{2n-1}$ verschwindet (eine Voraussetzung für die Existenz einer Markovspur). Unterabschnitt 2.2 führt die Algebren endlicher Höhe ein, bei denen Y einer polynomiellen Gleichung genügt. Für sie ist die Frage nach dem eben angesprochenen Annulatorideal viel schwieriger zu beantworten. Unterabschnitt 2.2.2 untersucht Grundringe für die es verschwindet. Dazu wird ein Modul der Algebra \mathcal{B}_2^k konstruiert (inspiriert durch Fockräume), der für geeignete Ringe frei und isomorph zu einem Linksideal der Algebra ist. Solche Ringe lassen sich auf zwei verschiedene Weisen gewinnen. Wir beschreiten einen methodisch elementaren, aber rechentechnisch aufwendigen Weg, der durch die Art der Modulkonstruktion nahegelegt wird. Dieselben Moduln hat tom Dieck durch die Angabe von Darstellungsmatrizen gewonnen. Er verwendete Potenzreihen, um die Relationen der Grundringe zu diskutieren. Wir referieren seine Ergebnisse.

In Abschnitt 3 wird gezeigt, daß die Algebra linear aufgespannt wird von Wörtern in den Generatoren von bestimmten, einfachen Formen. Daraus ergibt sich, daß für endliches k die Algebra als R -Modul endlich erzeugt ist. Im darauffolgenden Abschnitt wird der klassische Limes untersucht. Es handelt sich um die Algebra der $\mathbb{Z}/(k)$ bewerteten Brauergraphen. Der klassische Limes wird später genutzt, um zu zeigen, daß die Markovspur, die in Abschnitt 5 konstruiert wird, nicht ausgeartet ist. Voraussetzung für die Existenz dieser Spur ist, daß das Annulatorideal des Elementes $e_1 e_3 \cdots e_{2n-1}$ verschwindet: Die Konstruktion multipliziert ein beliebiges Element von links und rechts mit Elementen, die so gebaut sind, daß sich zeigen läßt, daß das Produkt ein Vielfaches des genannten Elementes ist. Im Abschnitt über die Markovspur 5 wird auch gezeigt, daß die Kauffman-Skeinmoduln endlicher Höhe des Torus frei sind. Abschnitt 6 zeigt die Halbeinfachheit von $\mathcal{B}_n^k(K)$ über geeigneten Körpern und klärt die Struktur als Multimatrixalgebra. Es stellt sich heraus, daß die einzelnen Komponenten durch k -Tupeln von Youngdiagrammen indiziert werden. Die Dimension der Algebra ist $k^n(2n-1)!!$. TensorDarstellungen für die einfachsten Fälle $k=2$ und $k=3$ werden in Abschnitt 7 angegeben. Für höhere k wurden leider keine TensorDarstellungen gefunden, und auch die angegebenen haben den Mangel, daß sie den Grundring unnötig einschränken. Abschnitt 8 beschäftigt sich mit der Konstruktion von Invarianten von Knoten im Volltorus. Abschnitt 9 ist der Problematik des nicht generischen Falles gewidmet. Im abschließenden Abschnitt 10 wird die volle Typ B BMW-Algebra definiert als ein Quotient der Algebra BB_n^3 . Ziel ist dabei, eine Algebra zu finden, in der auch der Generator Y ein Polynom dritten Grades erfüllt und der Projektor auf einen der Eigenwerte mit dem graphischen Generator $e_0^{(G)}$ identifiziert werden kann. Es gibt dann einen klassischen Limes, der zur symmetrischen Braueralgebra isomorph ist.

Ein Epilog zeigt die kategoriellen Strukturen auf, die den untersuchten Algebren zugrunde liegen. Der Anhang schließlich sammelt ergänzendes Material: Es findet sich ein Beweis von Turaevs Theorem über die Freiheit des Kauffman-Skeinmoduls des Volltorus, sowie Beweise einiger Relationen, die im Haupttext ausgelassen wurden.

Hauptresultate: Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit sind: Die Ariki-Koike-BMW-Algebren endlicher Höhe sind über geeigneten generischen Grundringen halbeinfach. Ihre einfachen Komponenten können durch Tupel von Young-Diagrammen indiziert werden. Die Algebren tragen treue Markovspuren, die zu Invarianten von Verschlingungen im Volltorus führen. Der Kauffman-Skein-Modul endlicher Höhe des Volltorus ist ein freier Modul. Es gibt Quantisierungen der Algebra der symmetrischen Brauergraphen.

Anwendungen in der Physik: Neben der Topologie ist die Physik ein weiteres Anwendungsgebiet. Das erkenntnisleitende Prinzip lautet hierbei: Jedes der vielen bekannten Modelle, in denen die Zopfgruppe ZA_n auftritt, kann zu einem Modell erweitert werden, in dem ZB_n auftritt, wobei die randlose Raumzeit durch eine mit einem Rand ersetzt wird. Diesem Dogma folgend wurde in [17] ein Potts-Modell eingeführt, dessen Zustandssumme sich als Markovspur eines bestimmten Elementes aus TB_n schreiben läßt. Ferner lassen sich Lösungen der Reflektionsgleichung integrierbarer Modelle über die eingeschränkte Typ B BMW-Algebra gewinnen [15]. Auch die von Fredenhagen, Rehren und Schroer untersuchte Anwendung der axiomatischen Quantenfeldtheorie von Ariki/Borchers/Haag/Kastler auf niederdimensionale Modelle läßt sich auf Raumzeiten mit reflektierendem Rand übertragen. Die Darstellungskategorie der Observablenalgebra ist dann eine Typ B gezopfte Tensoralgebra [16], und es scheint problemlos möglich zu sein, die Analyse der Quanten-Symmetrie aus [13],[14] auf diesen Fall zu übertragen. In Hinblick auf den Quanten-Hall-Effekt wäre es wünschenswert, das Ergebnis aus [18] zu verallgemeinern. Eine Darstellung der physikalischen Anwendungen der Typ B Knotentheorie findet sich in [19], so daß die vorliegende Arbeit nicht auf physikalische Fragestellungen eingeht.

Ausblick: Die vorliegende Arbeit weist auf weitere Fragestellungen hin. Es könnte geklärt werden: Die notwendigen Bedingungen für Halbeinfachheit (im nicht generischen Fall), die Darstellungstheorie (irreduzible Moduln, Tensoralgebren), Existenz weiterer Markovspuren, Form der Idempotenten.

Es wäre auch interessant, nach geometrischen Anwendungen zu suchen. Zum einen liegt die Vermutung nahe, daß mit Hilfe der B-Knotentheorie Invarianten von berandeten 3-Mannigfaltigkeiten konstruiert werden können. Weiter läßt sich fragen, ob die Jones-, HOMFLY- und Kauffman-Polynome der B-Serie, ähnlich wie ihre A-Geschwister, benutzt werden können, um geometrische Einsichten zu gewinnen.

Quotienten der Gruppenalgebra von ZB_n können nicht wie die des Typs A als Zentralisatoralgebren auftreten, denn der Generator τ_0 verhält sich bezüglich der gewöhnlichen Zopfung τ_1 nicht natürlich (es sei denn, es wäre $\tau_1^2 = 1$). Es gibt aber Verallgemeinerungen quasitriangulärer Hopfalgebren auf den B-Fall. Diese Beziehung ist bisher nur im Fall der Quantengruppe $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ im Detail verstanden worden [11]. Interessant wäre eine Übertragung dieser Ergebnisse auf orthogonale und symplektische Quantengruppen.

Danksagung: Ohne die Anregung, Kritik und Unterstützung durch Professor tom Dieck wäre diese Arbeit undenkbar gewesen. Meiner Frau Felicitas und meinem Sohn Jakob Felix danke ich für ihre fröhliche Geduld. Dankbar bin ich auch für die finanzielle Förderung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft.

2 Die Definition der Ariki-Koike-Birman-Murakami-Wenzl-Algebra

In diesem Abschnitt soll eine Erweiterung der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra um einen Zylinder-Zopf-Generator definiert werden. Wir starten mit der Definition der gewöhnlichen BMW-Algebra.

3. Definition. *Es sei R ein Ring und $x, q, \lambda \in R$ seien Einheiten, so daß mit $\delta := q - q^{-1}$ gilt $(1 - x)\delta = \lambda - \lambda^{-1}$. Die Birman-Murakami-Wenzl Algebra $BA_n(R)$ wird erzeugt von Generatoren $X_1, \dots, X_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-1}$ und den folgenden Relationen:*

$$X_i X_j = X_j X_i \quad |i - j| > 1 \quad (5)$$

$$X_i X_j X_i = X_j X_i X_j \quad |i - j| = 1 \quad (6)$$

$$X_i e_i = e_i X_i = \lambda e_i \quad (7)$$

$$e_i X_j^{\pm 1} e_i = \lambda^{\mp 1} e_i \quad |i - j| = 1 \quad (8)$$

$$e_i^2 = x e_i \quad (9)$$

$$1 = X_i(X_i - \delta + \delta e_i) \quad (10)$$

$$e_i e_j = e_j e_i \quad |i - j| > 1 \quad (11)$$

$$e_i X_j X_i = X_j^\pm X_i^\pm e_j \quad |i - j| = 1 \quad (12)$$

$$e_i e_j e_i = e_i \quad |i - j| = 1 \quad (13)$$

Die Relationen implizieren, daß es Morphismen von der Zopfgruppe und von der Temperley-Lieb-Algebra nach BA_n gibt. Die Invertierbarkeit des Parameters x wird erst im Zusammenhang mit der Konstruktion der Markov-Spur notwendig: Ist sie auf $\text{tr}(1) = 1$ normiert, so folgt $\text{tr}(e_i) = x^{-1}$.

4. Lemma.

$$X_i^2 = 1 + \delta X_i - \delta \lambda e_i \quad (14)$$

$$X_i^3 = X_i^2(\lambda + \delta) + X_i(1 - \lambda\delta) - \lambda \quad (15)$$

$$X_i^{-2} = 1 + \delta^2 - \delta X_i + \delta(\lambda^{-1} - \delta)e_i = 1 - \delta X_i^{-1} + \delta \lambda^{-1} e_i \quad (16)$$

$$0 = (X_i - \lambda)(X_i + q^{-1})(X_i - q) \quad (17)$$

$$X_i^{-1} X_j^{\pm 1} X_i = X_j X_i^{\pm 1} X_j^{-1} \quad |i - j| = 1 \quad (18)$$

$$X_i^{\pm 1} e_j e_i = X_j^{\mp 1} e_i \quad |i - j| = 1 \quad (19)$$

$$e_i e_j X_i^{\pm 1} = e_i X_j^{\mp 1} \quad |i - j| = 1 \quad (20)$$

$$e_i X_j^\pm X_i^\pm = e_i e_j \quad |i - j| = 1 \quad (21)$$

$$X_i^\pm X_j^\pm e_i = e_j e_i \quad |i - j| = 1 \quad (22)$$

$$X_i e_j X_i^{-1} = X_j^{-1} e_i X_j \quad |i - j| = 1 \quad (23)$$

$$X_i e_j X_i = X_j^{-1} e_i X_j^{-1} \quad |i - j| = 1 \quad (24)$$

Beweis: (14)-(17) sind nur Umschreibungen von (10).

$$(18): X_i X_j X_i = X_j X_i X_j \Rightarrow X_j X_i X_j^{-1} = X_i^{-1} X_j X_i \Rightarrow X_i X_j^{-1} X_i^{-1} = X_j^{-1} X_i^{-1} X_j$$

$$(19): X_i^\pm e_j e_i = X_j^\mp X_j^\pm X_i^\pm e_j e_i \stackrel{(12)}{=} X_j^\mp e_i X_j^\pm X_i^\pm e_i = \lambda^\pm X_j^\mp e_i X_j^\pm e_i \stackrel{(8)}{=} X_j^\mp e_i$$

$$(20): e_i e_j X_i^\pm = e_i e_j X_i^\pm X_j^\pm X_j^\mp = e_i X_i^\pm X_j^\pm e_i X_j^\mp = \lambda^\pm e_i X_j^\pm e_i X_j^\mp = e_i X_j^\mp$$

(21): Unter Benutzung von (13), (19) und (12) ergibt sich

$$\begin{aligned} e_i X_j^\pm X_i^\pm &= e_i e_j e_i X_j^\pm X_i^\pm = e_i X_i^\mp X_i^\pm e_j e_i X_j^\pm X_i^\pm \\ &= e_i X_i^\mp X_j^\mp e_i X_j^\pm X_i^\pm = e_i X_i^\mp X_j^\mp X_j^\pm X_i^\pm e_j = e_i e_j \end{aligned}$$

(22) beweist man analog zu (21). (23,24) sind Folgerungen aus (12). □

5. Lemma. Falls δ eine Einheit in R ist, ist $BA(R)$ isomorph zur Algebra über invertierbaren Generatoren X_1, \dots, X_{n-1} , deren Relationen mittels der Definition

$$e_i := 1 - \frac{X_i - X_i^{-1}}{\delta} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (25)$$

gegeben sind durch (5)-(8).

$$\text{Beweis: (9): } e_i^2 = (1 - \delta^{-1}(X_i - X_i^{-1}))e_i = e_i - \delta^{-1}(\lambda e_i - \lambda^{-1}e_i) = x e_i$$

$$(11): \text{ trivial mit (25) aus (5)}$$

$$(12): \text{ trivial aus (25) und (18)}$$

(13): Das mittlere e_j wird durch (25) ausgedrückt:

$$e_i e_j e_i = x e_i - \delta^{-1}(e_i X_j e_i - e_i X_j^{-1} e_i) = (1 - \delta^{-1}(\lambda - \lambda^{-1}))e_i - \delta^{-1}(\lambda^{-1}e_i - \lambda e_i) = e_i$$

□

2.1 Die Typ-B-BMW-Algebren der Höhe ∞

Zunächst wird eine Typ-B BMW-Algebra definiert, die nur topologisch motivierte Relationen umfaßt. Der Zylinderzopfgenerator Y genügt hier also keiner polynomiellen Gleichung.

6. Definition. *Es seien $x, q, \lambda \in R$ Einheiten in einem Ring R , so daß mit $\delta := q - q^{-1}$ gilt*

$$(1 - x)\delta = \lambda - \lambda^{-1} \quad (26)$$

Ferner seien $A_i \in R, i \in \mathbb{N}$ weitere Parameter. Die Ariki-Koike-BWM-Algebra der Höhe ∞ mit n Strängen $\mathcal{B}_n^\infty(R)$ ist definiert als R -Algebra, erzeugt von Generatoren $Y, X_1, \dots, X_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-1}$ mit den Relationen der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra und zusätzlich den Y betreffenden Relationen:

$$X_1 Y X_1 Y = Y X_1 Y X_1 \quad (27)$$

$$Y X_i = X_i Y \quad i > 1 \quad (28)$$

$$Y X_1 Y e_1 = \lambda^{-1} e_1 = e_1 Y X_1 Y \quad (29)$$

$$e_1 Y^i e_1 = A_i e_1 \quad i \geq 1 \quad (30)$$

Von einem systematischen Standpunkt aus hätte es nahegelegen, diese Algebra entweder BB_n^∞ oder AKBW_n^∞ zu nennen. Der Superskript ∞ weist darauf hin, daß Y keiner polynomiellen Gleichung genügt.

Relation (30) legt es nahe, für x den alternativen Namen A_0 einzuführen.

Wenn der Grundring keine Rolle spielt, lassen wir ihn in der Regel unerwähnt.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß R der folgende Quotient eines Laurent-Polynom-Ringes ist

$$R_0^\infty := \mathbb{C}[q^\pm, x^\pm, \lambda^\pm, A_1, A_2, \dots] / (x\delta - \delta - \lambda^{-1} + \lambda) \quad (31)$$

Es wird dabei stets $\delta := q - q^{-1}$ verwendet. R_0^∞ ist ein Integritätsbereich, denn das Polynom, durch dessen Hauptideal dividiert wird, ist irreduzibel.

Die folgenden Erweiterungen werden im Zusammenhang mit den Algebren endlicher Höhe benötigt:

$$R_{0,k}^\infty := R_0^\infty \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[p_0^\pm, \dots, p_{k-1}^\pm] \quad k \in \mathbb{N} \quad (32)$$

Große Teile der folgenden Untersuchung sind auch möglich, wenn der generische Ring über \mathbb{Z} statt über \mathbb{C} definiert wird. Im Zusammenhang mit dem klassischen Limes erweist es sich aber als nützlich, bestimmte Gleichungen lösen zu können, so daß zumindest ein algebraisch abgeschlossener Körper verwendet werden muß.

2.1.1 Graphische Interpretation und Skeinmoduln

Die Definition der Algebra \mathcal{B}_n^k erfolgte bereits in Hinblick auf den graphischen Kalkül der B-Zöpfe. In diesem Abschnitt wird diese Beziehung präzisiert.

Wir betrachten die ambienten Isotopieklassen von unorientierten Bändern in $(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times [0, 1]$ zwischen n oberen und m unteren auf den Halbstrahlen $\mathbb{R}^+ \times 0 \times \{0, 1\}$ eingebetteten Intervallen. Dabei dürfen auch geschlossene (also weder oben noch unten befestigte) Bänder auftreten. Eine solche Klasse heißt zahm, wenn sie einen stückweise linearen Vertreter enthält (vgl. [3]). Für einen kommutativen Ring R sei $C_{n,m} = C_{n,m}(R)$ der R -Modul, der von solchen zahmen Isotopieklassen aufgespannt wird. Durch Übereinandersetzen ist dann eine Multiplikation $C_{n,m} \times C_{l,n} \rightarrow C_{l,m}$ gegeben. Sie macht die Bandschlingel im Zylinder zu einer Kategorie mit \mathbb{N}_0 als Objekt- und $C_{n,m}$ als Morphismenmenge.

Seien jetzt q, λ, A_0 Einheiten in R und $A_i, i \in \mathbb{N}$ beliebige weitere Elemente aus R . Der Untermodul $S_{n,m}^\infty \subset C_{n,m}(R)$ werde aufgespannt durch Elemente, die Linearkombinationen von

Isotopieklassen sind, welche Representanten besitzen, die sich jeweils nur lokal um eine der drei in Bild 3 gezeigten Teile unterscheiden. Dann setzen wir

$$K_{n,m}^\infty(R) := C_{n,m}(R)/S_{n,m}^\infty \quad (33)$$

Für ein $s \in S_{n,m}^\infty$ und $a \in C_{l,n}, b \in C_{m,j}$ ist offensichtlich $bsa \in S_{l,j}^\infty$, die Multiplikation überträgt sich also und liefert so wieder eine Kategorie.

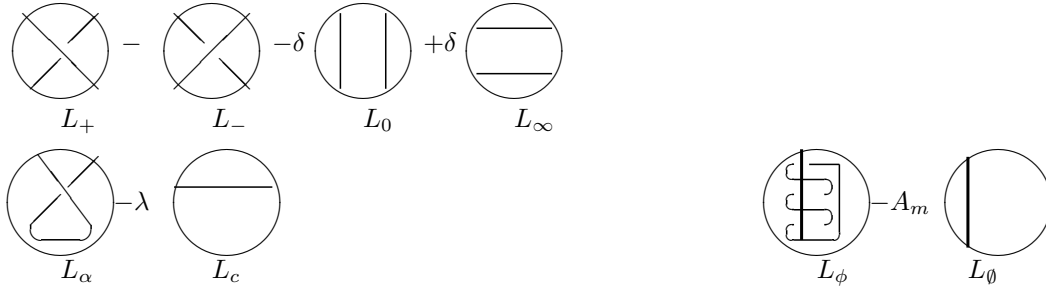


Abbildung 3: Die Skeinrelationen für $K_{n,m}^\infty(R)$

Bei den graphischen Generatoren notieren wir auch die Gesamtzahl der Stränge, d.h. wir schreiben $X_{i,n}^{(G)}$, $e_{i,n}^{(G)}$ und $Y_{i,n}^{(G)}$ für die Generatoren, die im i -ten von n Strängen wirken.

7. Definition. $GB_n^\infty(R)$ sei die Unteralgebra von $K_{n,n}^\infty(R)$, die von $X_{i,n}^{(G)}, e_{i,n}^{(G)}, Y_{1,n}^{(G)}, 1 \leq i \leq n-1$ erzeugt wird.

8. Lemma. Durch $\Psi_n : \mathcal{B}_n^\infty(R) \rightarrow GB_n^\infty(R), X_i \mapsto X_{i,n}^{(G)}, e_i \mapsto e_{i,n}^{(G)}, Y \mapsto Y_{1,n}^{(G)}$ wird ein surjektiver Algebrenhomomorphismus definiert.

Die Surjektivität ist nach Definition klar. Es reicht also, sich die Bilder der Relationen von $\mathcal{B}_n^\infty(R)$ anzuschauen. (27) ist die Vier-Zopf-Relation (3), die in Bild 2 dargestellt ist. Die Relation (28) stammt ebenfalls direkt aus der Zopfgruppe: Y kann mit X_i vertauscht werden, wenn die beiden Generatoren keine gemeinsamen Stränge betreffen. Relation (29) wird in Bild 4 veranschaulicht. Der Generator $Y^{(G)}$ ist dabei so zu interpretieren, daß der horizontale Vektor der Banebene stets zur Zylinderachse zeigt. Andere Interpretationen sind möglich, wenn in (29) ein anderer Parameter gewählt wird. Die vorliegende Wahl kann auch geschrieben werden als

$$e_1 X_1 Y X_1 Y = e_1$$

Relation (30) dient der Elimination unverbundener Komponenten.

Es sei betont, daß diese graphische Algebra, anders als etwa die Temperley-Lieb-Algebra, nicht über eine vorgegebene Basis definiert ist. Darum müssen wir uns auch keine Gedanken machen, ob wir die geschlossenen Bänder, die bei der Multiplikation entstehen, eliminieren können. Ebenso wichtig ist, daß diese Algebra, obwohl sie einen globalen Blick auf ihre Elemente bietet, durch Generatoren und Relationen beschrieben ist. Die Relationen sind aber teilweise nicht explizit gegeben, sondern werden durch Isotopieäquivalenz bestimmt. Die Existenz des Morphismus Ψ_n stellt sicher, daß alle Beziehungen zwischen Wörtern in den Generatoren auch für die graphische Version gelten. Insbesondere gilt etwa der in Abschnitt 3 zu beweisende Wortsatz und der Satz über das Erzeugendensystem auch für GB_n^∞ . Auch die Überlegungen des Abschnittes zur Markovspur können wörtlich übertragen werden. Beachtung verdient allein die Möglichkeit, daß Ψ_n einen Kern haben könnte, d.h. daß nicht alle Isotopiebewegungen aus den explizit algebraisch angegebenen zusammengesetzt werden können.

Es gibt eine lineare Abbildung $GB_n^\infty \rightarrow GB_{n-1}^\infty$, die durch Schließen des letzten Stranges durch ein in der Fläche $\mathbb{R}^+ \times 0 \times [0, 1]$ rechts vom eigentlichen Graphen verlaufendes Band gegeben ist. Durch Iteration landet man schließlich in GB_0^∞ , dem Skeinmodul des Volltorus.

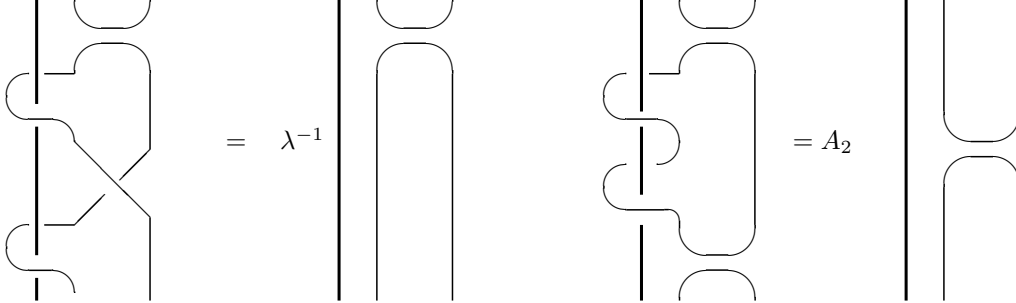


Abbildung 4: Links Relation (29) und rechts Relation (30) im Zylinderbild

2.1.2 Einfache Folgerungen

Beim Studium der Relationen, die Y einbeziehen, werden sich folgende Definitionen als nützlich erweisen:

$$Y_i := X_{i-1}X_{i-2} \cdots X_1 Y X_1^{-1} \cdots X_{i-2}^{-1} X_{i-1}^{-1} \quad (34)$$

$$Y'_i := X_{i-1}X_{i-2} \cdots X_1 Y X_1 \cdots X_{i-2} X_{i-1} \quad (35)$$

Im folgenden werden eine Reihe von Relationen angegeben, auf die wiederholt Bezug genommen werden muß. Beweise werden im Anhang gegeben.

Das Element $X_1 Y X_1 Y$ ist in \mathcal{B}_2^∞ zentral.

$$0 = [X_1 Y X_1 Y, \{Y, e_1, X_1\}] \quad (36)$$

Die X_i kommutieren mit den verschobenen Y , wenn sie auf verschiedenen Strängen operieren:

$$0 = [Y_i, X_j] = [Y_i, e_j] \quad j \neq i, i-1 \quad (37)$$

$$0 = [Y'_i, X_j] = [Y'_i, e_j] \quad j \neq i, i-1 \quad (38)$$

Die nächsten Beziehungen sind triviale Umschreibungen der Definition:

$$Y'_{i+1} X_i^{-1} = X_i Y'_i \quad (39)$$

$$Y_{i+1} X_i = X_i Y_i \quad (40)$$

Wichtig ist, daß sich einige der definierenden Relationen verschieben lassen:

$$X_i Y_i X_i Y_i = Y_i X_i Y_i X_i \quad (41)$$

$$X_i Y'_i X_i Y'_i = Y'_i X_i Y'_i X_i \quad (42)$$

$$\lambda^{-1} e_i = e_i Y_i X_i Y_i = Y_i X_i Y_i e_i \quad (43)$$

$$\lambda^{-1} e_i = e_i Y'_i X_i Y'_i = Y'_i X_i Y'_i e_i \quad (44)$$

$$e_i Y_i^m e_i = A_m e_i \quad (45)$$

Im Gegensatz zu den Y_i kommutieren die Y'_i für verschiedene Indizes.

$$Y'_i Y'_j = Y'_j Y'_i \quad (46)$$

Einige weitere, gelegentlich benötigte Folgerungen sind:

$$Y_i Y_{i-1}^{-1} = Y_{i-1}^{-1} X_{i-1}^{-1} Y_{i-1} X_{i-1} \quad (47)$$

$$Y_i e_{i-1} = \lambda^{-2} Y_{i-1}^{-1} e_{i-1} \quad (48)$$

$$e_{i-1} Y_i = e_{i-1} Y_{i-1}^{-1} - \lambda \delta e_{i-1} Y_{i-1} + \delta \lambda A_1 e_1 \quad (49)$$

$$e_{i-1} Y_i' = e_{i-1} Y_{i-1}'^{-1} \quad (50)$$

$$Y_i' e_{i-1} = Y_{i-1}'^{-1} e_{i-1} \quad (51)$$

$$X_i Y_{i+1} = X_i Y_i - \delta Y_i + \delta Y_i e_i + \delta Y_{i+1} - \delta e_i Y_i^{-1} + \delta^2 \lambda e_i Y_i - \delta^2 \lambda A_1 e_i \quad (52)$$

$$Y_{i+1}' X_i = X_i Y_i' \quad (53)$$

Die folgenden Relationen sind von großer Bedeutung, da sie zeigen, daß das von e_1 in \mathcal{B}_2^∞ erzeugte Ideal¹ von $Y^i e_1 Y^j$, $i, j \in \mathbb{Z}$ aufgespannt wird.

$$e_i Y_i' X_i = e_i Y_i^{l-1} X_i Y_i^{-1} - \delta e_i Y_i^{l-2} + \delta A_{l-1} e_i Y_i^{-1} \quad (54)$$

$$X_i Y_i' e_i = Y_i^{-1} X_i Y_i^{l-1} e_i - \delta Y_i^{l-2} e_i + \delta A_{l-1} Y_i^{-1} e_i \quad (55)$$

$$X_1 Y^m e_1 = \lambda^{-1} Y^{-m} e_1 + \sum_{s=1}^{m-1} \delta (A_{m-s} Y^{-s} - Y^{m-2s}) e_1 \quad (56)$$

$$X_1 Y^{-m} e_1 = \lambda Y^m e_1 + \sum_{s=0}^{m-1} \delta (Y^{-m+2s} - A_{s-m} Y^s) e_1 \quad (57)$$

Die letzte Beziehung erlaubt es, Koeffizienten A_i mit negativem i zu berechnen, wenn das Annulatorideal von e_1 verschwindet. Sie sollen $e_1 Y^{-m} e_1 = A_{-m} e_1$ erfüllen. Durch Multiplikation von (57) von links mit e_1 ergibt sich.

$$\lambda A_{-m} = \lambda A_m + \sum_{s=0}^{m-1} \delta (A_{2s-m} - A_{s-m} A_s)$$

Nach einer Änderung des Summationsbereiches machen wir daraus die folgende

9. Definition. Für $m > 0$ seien die $A_{-m} \in R$ rekursiv definiert durch:

$$A_{-m} = \lambda^2 A_m + \lambda \sum_{s=1}^{m-1} \delta (A_{2s-m} - A_{s-m} A_s) \quad (58)$$

10. Bemerkung. Es gibt eine Anti-Involution von $\mathcal{B}_n^\infty(R_0^\infty)$ (und analog von $\mathcal{B}_n^\infty(R_{0,k}^\infty)$), aufgefaßt als \mathbb{C} -Algebra, so daß

$$X_i^* = X_i^{-1}, e_i^* = e_i, Y^* = Y^{-1}, q^* = q^{-1}, \lambda^* = \lambda^{-1}, A_i^* = A_{-i} \quad (59)$$

Zum Beweis rechnet man sofort nach, daß das Bild der Relationen unter dieser Anti-Involution (einfache) Folgerungen aus den Relationen sind.

11. Bemerkung. Durch $X_i^\dagger := X_{n-i}, Y^\dagger := Y_n$ wird eine Involution \dagger auf \mathcal{B}_n^∞ gegeben.

Beweis: Alle Relationen, die nur einen Index involvieren, oder nur vom Betrag der Differenz zweier Indizes abhängen sind offensichtlich mit dieser Definition kompatibel. Wir prüfen (30):

$$\begin{aligned} (e_1 Y^i e_1 - A_i e_1)^\dagger &= e_{n-1} Y_n^i e_{n-1} - A_i e_{n-1} \\ &= e_{n-1} X_{n-1} Y_{n-1}^i X_{n-1}^{-1} e_{n-1} - A_i e_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

¹'Ideal' bedeutet in dieser Arbeit immer 'zweiseitiges Ideal', ansonsten wird von Links- und Rechtsidealen gesprochen.

Relation (29) ist ebenso erhalten:

$$\begin{aligned}
(YX_1Ye_1 - \lambda^{-1}e_1)^\dagger &= e_{n-1}Y_nX_{n-1}Y_n - \lambda^{-1}e_{n-1} \\
&= e_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}X_{n-1}^{-1}X_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}X_{n-1}^{-1} - \lambda^{-1}e_{n-1} \\
&= \lambda e_{n-1}Y_{n-1}X_{n-1}Y_{n-1}X_{n-1}^{-1} - \lambda^{-1}e_{n-1} \\
&= \lambda\lambda^{-1}e_{n-1}X_{n-1}^{-1} - \lambda^{-1}e_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

□

12. Bemerkung. Ein Blick auf die Definitionen zeigt, daß es eine weitere Anti-Involution $a \mapsto \bar{a}$ gibt, die alle Generatoren invariant läßt.

Später wird gezeigt werden, daß eine Markovspur auf unseren Algebren existiert, wenn das Annulatorideal von

$$E_n := e_1e_3 \cdots e_{2n-1} \in \mathcal{B}_{2n}^\infty(R) \quad (60)$$

verschwindet. Der oben eingeführte generische Grundring hat diese Eigenschaft:

13. Satz. $\text{ann}(E_n) = \{0\}$ in $\mathcal{B}_{2n}^\infty(R_0^\infty)$.

Beweis: Angenommen, wir hätten ein $0 \neq \mu \in R_0^\infty$ aus dem Annulatorideal: $\mu E_n = 0$. Es folgt sofort $0 = \mu \Psi_{2n}(E_n)$. In dieser graphischen Situation können wir ausnutzen, daß wir nicht nur eine Folge von Algebren, sondern eine Kategorie zur Verfügung haben. Wir definieren $U_n \in K_{2n,0}^\infty(R_0^\infty)$ als die Skein-Isotopie-Äquivalenzklasse von n Minima und $U_n' \in K_{0,2n}^\infty(R_0^\infty)$ entsprechend als Klasse von n Maxima. Durch Multiplikation mit diesen Elementen von links und rechts entsteht

$$0 = \mu U_n \Psi_{2n}(E_n) U_n' = \mu A_0^{2n}[\emptyset]$$

Dabei ist $[\emptyset]$ die Klasse des leeren Knotens. Sie hat unter unseren Annahmen also ein nichttriviales Annulatorideal. Dies steht aber im Widerspruch zu einer Folgerung aus einem Theorem von Turaev (Satz 92), die besagt, daß gilt:

$$K_{0,0}^\infty(R_0^\infty) \cong R_0^\infty \quad (61)$$

□

Für die weiteren Untersuchungen definieren wir folgende Untermoduln:

$$N^\infty = N^\infty(R) = \text{span}_R(Y^i e_1 \mid i \in \mathbb{Z}) \subset \mathcal{B}_2^\infty(R) \quad (62)$$

$$GN^\infty = GN^\infty(R) = \text{span}_R((Y^{(G)})^i e_1^{(G)} \mid i \in \mathbb{Z}) \subset G\mathcal{B}_2^\infty(R) \quad (63)$$

14. Satz. N^∞ (resp. GN^∞) sind die von e_1 (resp. $e_1^{(G)}$) erzeugten Linksideale. Für Quotientenringe von R_0^∞ sind die in der Definition angegebenen Mengen sogar Basen. Insbesondere ist dann also $N^\infty(R) \cong GN^\infty(R)$ frei. Weiter gilt sogar, daß die Mengen $\{Y^i e_1 Y^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(Y^{(G)})^i e_1^{(G)} (Y^{(G)})^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ linear unabhängig sind. Sie spannen die zweiseitigen von e_1 b.z.w. $e_1^{(G)}$ erzeugten Ideale auf.

Für beliebige Grundringe gilt: Wann immer die Determinante der Matrix $(A_{i+j}), i, j = 0, \dots, m$ kein Nullteiler ist, sind die Elemente $e_1, Y e_1, \dots, Y^m e_1$ (resp. $e_1^{(G)}, Y^{(G)} e_1^{(G)}, \dots, (Y^{(G)})^m e_1^{(G)}$) linear unabhängig.

Beweis: Die erste Aussage wurde schon bei der Diskussion der Relationen gezeigt. Zur zweiten: Wir betrachten zuerst die Situation $R = R_0^\infty$. Eine lineare Abhängigkeit der $\{Y^i e_1\}$ würde sich sofort auf die graphische Algebra übertragen. Nehmen wir also an, es gäbe eine lineare Abhängigkeit der $(Y^{(G)})^i e_1^{(G)}$. Wegen der Invertierbarkeit des Generators $Y^{(G)}$ kann immer $i = 0$ als niedrigster Term mit nichtverschwindendem Koeffizienten angenommen werden:

$$0 = \sum_{i=0}^m \alpha_i (Y^{(G)})^i e_1^{(G)} \quad \alpha_i \in R_0^\infty$$

Multiplikation von links mit $U_1(Y^{(G)})^j$ und von rechts mit U'_1 liefert

$$0 = \sum_i \alpha_i A_{i+j} A_0 [\emptyset]$$

also wegen (61) und der Invertierbarkeit von A_0 sogar $0 = \sum_i \alpha_i A_{i+j}$. Die Determinante d der Matrix A_{i+j} , $i, j = 0, \dots, m$ verschwindet offensichtlich nicht und deshalb müssen alle α_i verschwinden. Der Übergang zu Quotientenringen ändert nach allgemeinen Sätzen der Algebra die Basis nicht. Die Behauptung der Isomorphie von N^∞ und NG^∞ ist trivial. Die Erweiterung auf die Mengen $\{Y^i e_1 Y^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ und $\{(Y^{(G)})^i e_1^{(G)} (Y^{(G)})^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ bereitet keine Schwierigkeiten: Beidseitige Multiplikation mit $U_1(Y^{(G)})^s$ b.z.w. $(Y^{(G)})^t U'_1$ führt eine vermutete lineare Abhängigkeit über in

$$0 = \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{i,j} A_{s+i} A_{j+t} A_0 [\emptyset]$$

In Matrixschreibweise hat man also $0 = A\alpha A$ und damit, wegen der nichtverschwindenden Determinante, $\alpha = 0$. Daß es sich bei den linearen Hüllen der angegebenen Mengen um Ideale handelt, zeigt ein Blick auf die abgeleiteten Relationen.

Zum Beweis des letzten Aussagenteils wird ähnlich wie eben argumentiert. Im Ring R wird das von der Determinanten d erzeugte multiplikative System $S := \{d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gebildet. Da d kein Nullteiler sein soll, ist die kanonische Abbildung $i : R \rightarrow R_S$ injektiv. Die Matrix $(A_{i+j})_{i,j}$ ist in R_S nach Cramers Regel invertierbar, und daher ist $\alpha_i = 0 \forall i$ die einzige Lösung in R_S und, wegen der Injektivität von i , ebenso in R . \square

Der folgende Satz führt die Betrachtung des Zweistrang-Falles $n = 2$ fort. Er wird in der Anwendung auf Algebren endlicher Höhe benötigt.

15. Satz. *Für die Grundringe $R_0^\infty, R_{0,k}^\infty$ oder Quotienten davon, sind GB_2^∞ und B_2^∞ isomorph.*

Beweis: Aus Satz 14 wissen wir, daß die von e_1 und $e_1^{(G)}$ erzeugten zweiseitigen Ideale I_2 und $I_2^{(G)}$ isomorph sind. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & I_2 & \rightarrow & B_2^\infty & \rightarrow & B_2^\infty / I_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Psi_2 |_{I_2} & & \downarrow \Psi_2 & & \downarrow \widehat{\Psi}_2 & & \\ 0 & \rightarrow & I_2^{(G)} & \rightarrow & GB_2^\infty & \rightarrow & GB_2^\infty / I_2^{(G)} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Darin ist $\widehat{\Psi}_2$ die auf den Quotienten induzierte Abbildung. Alle Algebren sind über den im Satz angegebenen Grundringen zu verstehen. Mit Hilfe des Fünferlemmas sind wir fertig, wenn wir gezeigt haben, daß $\widehat{\Psi}_2$ ein Isomorphismus ist. Der Quotient B_2^∞ / I_2 ist offensichtlich isomorph zur verallgemeinerten B-Hecke-Algebra $H^\infty B_2$. In [8] hat tom Dieck gezeigt, daß diese Algebra isomorph ist zur Algebra der Zöpfe im Zylinder modulo Hecke-Relationen für gewöhnliche Kreuzungen. Betrachten wir $GB_2^\infty / I_2^{(G)}$. Eine Verschlingung in einer Äquivalenzklasse von GB_2^∞ , die sich nach der Forderung aus Definition 7 als Produkt der Generatoren schreiben läßt, liegt genau dann in dem Ideal $I_2^{(G)}$, wenn es horizontale Abschnitte in ihr gibt. Der Quotient $GB_2^\infty / I_2^{(G)}$ besteht deshalb aus Äquivalenzklassen von Zöpfen im Zylinder. Die geforderten Skeinrelationen reduzieren sich dann auf die Hecke-Relationen für gewöhnliche Kreuzungen, so daß sich die Behauptung ergibt. \square

Ein anderer Beweis des vorstehenden Satzes ergibt sich aus dem Umstand, daß man 'gute' lineare Erzeugendensysteme hat. Nach Satz 14 und [8][Theorem (5.2)] wird B_2^∞ nämlich erzeugt von

$$S := \{Y^i e_1 Y^j\} \cup \{Y^i X_1 Y^j X_1\} \cup \{Y^i X_1 Y^j\} \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

Demnach erzeugt $\Psi_2(S) =: S^{(G)}$ die graphische Algebra GB_2^∞ . Die Teilmengen $S_m^{(G)} \subset S^{(G)}$ mögen aus allen Elementen mit $|i|, |j| \leq m$ bestehen. Wir schreiben $S_m^{(G)} =: \{b_{m,\mu}\}$, wobei der Index μ aus einer geeigneten Indexmenge stammt. Unter Benutzung der Spur, des klassischen Limes und

des Argumentes aus Abschnitt 5.1 ergibt sich dann, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Determinante von $(\text{tr}(b_{m,\mu}b_{m,\nu}))_{\mu,\nu}$ nicht verschwindet. Wenn aber eine lineare Abhängigkeit (mit endlich vielen Termen, also ganz im Spann einer Menge $S_m^{(G)}$) bestünde $0 = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} b_{m,\mu}$, so lieferte Multiplikation mit $b_{m,\nu}$ und Anwendung der Spur $0 = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \text{tr}(b_{m,\mu}, b_{m,\nu})$. Weil wir uns in einem Integritätsbereich befinden, folgt, wie üblich, $\alpha = 0$. Es ist also $S^{(G)}$ und folglich auch S linear unabhängig, und damit ist die Isomorphie gezeigt.

2.2 Die Algebren von endlicher Höhe

Die bisher betrachteten Algebren sind unendlichdimensional. Um zu einer endlichdimensionalen Situation zu kommen, in der die Strukturuntersuchung mit Hilfe der Jones-Wenzl-Theorie durchgeführt werden kann, verlangen wir nun, daß Y eine polynomielle Gleichung erfüllen möge.

16. Definition. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt und R ein Ring wie in Definition 6, aber mit zusätzlich gewählten Einheiten $p_0, \dots, p_{k-1} \in R^*$. Die Ariki-Koike-BWM-Algebra der Höhe k mit n Strängen $\mathcal{B}_n^k(R)$ ist der Quotient von $\mathcal{B}_n^{\infty}(R)$ nach der Relation:

$$0 = \prod_{i=0}^{k-1} (Y - p_i) \quad (64)$$

Analog ist die graphische Variante der Ariki-Koike-BWM-Algebra der Höhe k mit n Strängen $G\mathcal{B}_n^k(R)$ definiert als Quotient von $G\mathcal{B}_n^{\infty}(R)$ nach der Relation:

$$0 = \prod_{i=0}^{k-1} (Y^{(G)} - p_i)$$

Diese Quotientenbildung kann natürlich auch auf der Ebene der Skeinmoduln vorgenommen werden:

17. Definition. Sei R ein Ring wie in der vorstehenden Definition 16. Der Untermodul $S_{n,m}^k$ von $C_{n,m}(R)$ werde von den Relationen des Untermoduls $S_{n,m}^{\infty}$ und zusätzlich von der Relation $0 = \prod_{i=0}^{k-1} (Y^{(G)} - p_i)$ erzeugt. Der Quotient $K_{0,0}^k(R)$ heißt der Kauffman-Skeinmodul des Volltorus der Höhe k .

Natürlich bilden auch diese Moduln die Morphismenmengen einer Skeinkategorie.

18. Definition. Es seien q_{k-1}, \dots, q_0 die vorzeichenbehafteten elementarsymmetrischen Polynome in den p_0, \dots, p_{k-1} , so daß also gilt:

$$Y^k = \sum_{i=0}^{k-1} q_i Y^i \quad (65)$$

Für $m \geq k$ ergeben sich Relationen für die A_m :

$$A_m e_1 = e_1 Y^m e_1 = e_1 Y^k Y^{m-k} e_1 = \sum_{i=0}^{k-1} q_i A_{m-k+i} e_1$$

Da e_1 für die Konstruktion der Markovspur ein verschwindendes Annulatorideal haben muß, fordern wir stets die Gültigkeit der Gleichungen:

$$A_m = \sum_{i=0}^{k-1} q_i A_{m-k+i} \quad \forall m \geq k \quad (66)$$

Als erste Annäherung eines generischen Ringes für \mathcal{B}_n^k definieren wir

19. Definition.

$$R_0^k := (R_0^\infty \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[p_0^\pm, \dots, p_{k-1}^\pm]) / (66) = R_{0,k}^\infty / (66) \quad (67)$$

Relation (64) bietet eine zweite Möglichkeit, die A_{-m} , $m > 0$ zu berechnen: Es kann nämlich Y^{-m} als Linearkombination von positiven Potenzen von Y geschrieben werden. Beide Methoden liefern nur dasselbe Ergebnis, wenn bestimmte Beziehungen zwischen den A_i und den q_i gelten. Solche Beziehungen werden in Unterabschnitt 2.2.2 abgeleitet. Die dort gefundenen Beziehungen sind zumindest für die Fälle $k = 2, 3$ äquivalent zu den eben gefundenen.

Da $q_0 = (-1)^{k-1} \prod_i p_i$ invertierbar ist, kann Y^{-1} berechnet werden:

$$Y^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{q}_i Y^i \quad \text{mit} \quad \bar{q}_{k-1} = q_0^{-1} \quad \bar{q}_{i-1} = -q_i q_0^{-1} \quad (68)$$

Die Koeffizienten sind dabei durch die angegebene Rekursion eindeutig bestimmt, und diese ist eindeutig festgelegt, da die Y^i linear unabhängig sind. Man betrachte nämlich den Quotienten nach den Relationen $X_i = q, e_i = 0$. Dieser ist eine Algebra mit einem Erzeuger, der wieder Y genannt werden soll, und Relation (64). Durch $P_i := \prod_{j \neq i}^{k-1} (Y - p_j)$ werden dann orthogonale, nicht-normierte Projektoren definiert: $P_i P_j = \delta_{i,j} s_i$, $Y P_i = p_i P_i$. Die Normierungsfaktoren sind $s_i = \prod_{j \neq i}^{k-1} (p_i - p_j)$. Wenn dies Einheiten sind, existieren orthogonale, normierte Projektoren. Wenn die Vandermonde-Determinante $\det(p_j^i)$ kein Nullteiler ist (was für den generischen Ring zutrifft), sind die Y^i linear unabhängig, und bleiben es auch bei Grundringspezialisierung.

Durch Iteration erhält man Ausdrücke $\bar{Q}_{i,j}$, so daß gilt:

$$Y^{-i} = \sum_{j=0}^{k-1} \bar{Q}_{i,j} Y^j \quad (69)$$

Wichtiger werden allerdings im folgenden die Koeffizienten der folgenden Expansion:

$$Y^{k+m} = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{q}_{m,i} Y^i \quad (70)$$

Eine einfache Rechnung zeigt insbesondere:

$$\hat{q}_{m,k-1} = \sum_{s=1}^{m+1} \sum'_{i_1, \dots, i_s} q_{k-i_1} \cdots q_{k-i_s} \quad \text{mit} \quad \sum_{\nu} i_{\nu} = m+1, i_j \geq 1 \quad (71)$$

Durch Multiplikation von (70) mit Y^{2-k} und Anwendung der Substitution $m \mapsto m-2$ gewinnen wir

$$Y^m = \sum_{j=-(k-2)}^1 \hat{q}_{m-2, j+k-2} Y^j =: \sum_{j=-(k-2)}^1 \tilde{q}_{m,j} Y^j \quad (72)$$

Für die hier neu eingeführten Koeffizienten lautet obige Beziehung

$$\tilde{q}_{m+1,1} = \sum_{s=1}^m \sum'_{i_1, \dots, i_s} q_{k-i_1} \cdots q_{k-i_s} \quad \text{mit} \quad \sum_{\nu} i_{\nu} = m, i_j \geq 1 \quad (73)$$

20. Bemerkung. Es gibt eine Anti-Involution von $\mathcal{B}_n^k(R_1^k)$, aufgefaßt als \mathbb{C} -Algebra, so daß

$$X_i^* = X_i^{-1}, e_i^* = e_i, Y^* = Y^{-1}, q^* = q^{-1}, \lambda^* = \lambda^{-1}, p_i^* = p_i^{-1}, A_i^* = A_{-i} \quad (74)$$

Zum Beweis ist nur zu prüfen, ob sich die entsprechende Anti-Involution von \mathcal{B}_n^∞ mit dem Quotienten nach $0 = \prod_i (Y - P_i)$ verträgt - eine Trivialität. Die anderen (Anti-)Involutionen übertragen sich ebenfalls.

Offensichtlich überträgt sich die Expansionsgleichung auf alle Y_i , nicht aber auf die Y'_i .

$$Y_i^k = \sum_{j=0}^{k-1} q_j Y_i^j \quad (75)$$

$$Y_i^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \bar{q}_j Y_i^j \quad (76)$$

2.2.1 Beziehungen zu anderen Knotenalgebren

Die e_i zusammen mit einem Projektor e_0 auf einen der Eigenwerte von Y erfüllen die Relationen der Typ-B-Temperley-Lieb-Algebra. Der Quotient nach dem von e_1 erzeugten Ideal ist die Ariki-Koike-Algebra. Für bestimmte Parameterwerte kann auch die Typ-A-BMW-Algebra als Quotient erhalten werden.

21. Lemma. *Sei J_n das von $Y_n - p_0$ in \mathcal{B}_n^k erzeugte Ideal. Jedes andere $Y_i - p_0, i = 1, \dots, n$ erzeugt dasselbe Ideal und der Quotient $R/(\lambda^{-1} - \lambda p_0^2, x p_0^i - A_i) \otimes_R \mathcal{B}_n^k(R)/J_n$ ist isomorph zur A-Birman-Wenzl Algebra $\text{BA}_n(R/(\lambda^{-1} - \lambda p_0^2, x p_0^i - A_i))$.*

Beweis: Die erste Behauptung ist eine Konsequenz der Definition der Y_i . Die Spezialisierung von λ und den A_i ist nötig, denn im Quotienten nach J_n wird $0 = e_1 Y X_1 Y - \lambda^{-1} e_1 = e_1 p_0 X_1 p_0 - \lambda^{-1} e_1 = e_1 (p_0^2 \lambda - \lambda^{-1})$ und $A_i e_1 = e_1 Y^i e_1 = p_0^i e_1$. Die restlichen Relationen sind unbedenklich, und man sieht sofort, daß man surjektive, zueinander inverse Morphismen zu und von BA_n angeben kann. \square

22. Definition. I_n bezeichne das von e_{n-1} in \mathcal{B}_n^k erzeugte Ideal.

23. Lemma. *Das Ideal I_n wird auch von jedem anderen e_i erzeugt. Der Quotient \mathcal{B}_n^k/I_n ist isomorph zu AK_n^k (Dabei ist $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).*

Beweis: Die erste Behauptung ist eine Folge von Relation (23), die es erlaubt, ein beliebiges e_i durch ein beliebiges anderes e_j auszudrücken. Der Isomorphismus $\mathcal{B}_n^k/I_n \rightarrow \text{AK}_n^k$ wird gegeben durch $[X_i] \mapsto q^{-1} X_i, Q = q^2, [Y] \mapsto X_0$ (eckige Klammern bezeichnen Äquivalenzklassen). \square

Von Interesse für die knotentheoretischen Anwendungen ist der Projektor auf den Eigenwert p_0 von Y . Ein solcher ist natürlich gegeben durch den oben betrachteten Ausdruck $P_0 := \prod_{i=1}^{k-1} (Y - p_i)$, für unsere Zwecke ist es aber besser, mit Summen der Y^i zu arbeiten.

24. Definition. *Sei $e_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Y^i$ ein Projektor auf den Eigenwert p_0 von Y , d.h. er erfülle $e_0 Y = Y e_0 = p_0 e_0$.*

25. Lemma.

$$\alpha_{k-1} = \alpha_0 p_0 q_0^{-1} \quad \alpha_{j-1} = p_0 \alpha_j - \alpha_{k-1} q_j \quad (77)$$

$$e_0^2 = x_0 e_0 \quad x_0 := \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i p_0^i \quad (78)$$

$$e_1 e_0 e_1 = x'_0 e_1 \quad x'_0 := \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A_i \quad (79)$$

Beweis: Die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten α_i kann aus der definierenden Gleichung abgelesen werden: $e_0 Y = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Y^{i+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{i-1} Y^i + \alpha_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} q_i Y^i = p_0 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Y^i = p_0 e_0$

Der Koeffizient α_0 bestimmt die 'Länge' von e_0 und bleibt unbestimmt. Die Beweise der restlichen Behauptungen sind trivial. \square

Die modifizierte B-Temperley-Lieb Algebra ([6], [17]) TB'_n ist definiert als Algebra erzeugt von Generatoren e_0, e_1, \dots, e_{n-1} , Parametern c, c', d und Relationen $e_0^2 = ce_0, e_i^2 = de_i, e_j e_l = e_l e_j, e_i e_j e_i = e_i, e_1 e_0 e_1 = c' e_1, 1 \leq i, j \leq n-1, 0 \leq l \leq n-1, |i-j| = 1, |j-l| > 1$. Wir haben also einen Morphismus $TB'_n \rightarrow \mathcal{B}_n^k$.

2.2.2 Grundringe und Moduln für $n = 2$

Für beliebige Grundringe wird $\mathcal{B}_n^k(R)$ im allgemeinen nicht halbeinfach sein. Erste Probleme bereitet der Umstand, daß das Element $e_1 e_3 \cdots$ nichttriviales Annulatorideal besitzen kann. In diesem Abschnitt werden wir Grundringe untersuchen, in denen dieses Annulatorideal verschwindet.

Im größten Teil des Abschnittes betrachten wir die Algebra mit zwei Strängen $B(R) := \mathcal{B}_2^k(R)$ und lassen die dann immer gleichen Indizes von e_1 und X_1 weg.

Wir hatten schon gesehen, daß die Parameter der Algebra nicht beliebig gewählt werden können, ohne wesentliche weitere Relationen nach sich zu ziehen. So legen – in einer mehr physikalischen Sprechweise – sowohl $e = \lambda^{-1} e Y X Y$ als auch $Y^k = \sum_i q_i Y^i$ eine 'Längenskala' für Y fest.

26. Definition. Sei $k < \infty$. In einem Ring R , der die Voraussetzungen von Definition 16 erfüllt, definieren wir ein Konsistenzideal $c = (h_0, \dots, h_{k-1})$, dessen Erzeuger h_i wie folgt erhalten werden: Man benutze (30), (10), (65) und (55), um $Y e - \lambda^{-1} X_1^{-1} Y^{-1} e$ zu einer Linearkombination $\sum_{i=0}^{k-1} h_i Y^i e$ zu entwickeln.

27. Definition. Der Ring R_1^k sei definiert als der Quotient $R_1 := R_0^k / c$ des generischen Ringes nach seinem Konsistenzideal. Für $k = \infty$ sei $R_1^\infty := R_0^\infty$.

Wir führen jetzt einen Ring ein, über dem die Generatoren X_i zu einer Darstellung der Permutationsgruppe degenerieren.

28. Definition. Das Ideal $J_c^k \subset R_1$ sei für $k < \infty$ gegeben durch $J_c^k := (\lambda - 1, q - 1, q_0 - 1, q_1, \dots, q_{k-1})$. Für $k = \infty$ gelte entsprechend $J_c^\infty := (\lambda - 1, q - 1)$. Es sei $R_c^k := R_1^k / J_c^k$.

Nach einem bekannten Satz über elementarsymmetrische Polynome sind die Gleichungen für die q_i auflösbar (wir arbeiten mit \mathbb{C} als Grundkörper!), der Ring R_c also nicht trivial. Durch $(\lambda - 1, q - 1, q_0 - 1, q_1, \dots, q_{k-1})$ wird auch in R_0^k ein Ideal gegeben. Es umfaßt das Ideal c , denn es gilt nun $Y^{-1} = Y^{k-1}, \bar{q}_{k-1} = 1, \bar{q}_i = 0$ und damit wird (85) trivial. Es folgt, daß R_c^k gleich dem Quotienten von R_0^k nach diesem Ideal ist.

29. Definition. Der klassische Limes von $\mathcal{B}_n^k(R_1^k)$ ist die Algebra

$$C\mathcal{B}_n^k := \mathcal{B}_n^k(R_1^k) \otimes_{R_1^k} (R_1^k / J_c^k) = \mathcal{B}_n^k(R_c^k) \quad (80)$$

In $C\mathcal{B}_n^k$ gilt $X_i = X_i^{-1}$ und damit auch $Y_i^j = Y_i^{j'}$. Eine wichtige Folge ist, daß Y sich dann natürlich bezüglich der Zopfung verhält.

Jetzt sind wir in der Lage, Grundringe mit besonders guten Eigenschaften auszuzeichnen.

30. Definition. Ein Ring R aus den Definitionen 6 oder 16 heißt zulässig, falls gilt:

1. R ist Integritätsring
2. R besitzt R_c^k als Quotienten.
3. R ist Quotient von R_1^k .
4. Die Ariki-Koike-Algebra $AK_n^k(R)$ ist (für alle n) halbeinfach.

Ein Ring heißt potentiell zulässig, wenn die zweite und dritte Bedingung erfüllt ist.

Der erste Punkt wird durch die beabsichtigte Anwendung der Jones-Wenzl-Theorie motiviert, die den Übergang zum Quotientenkörper erfordert. Der zweite Punkt ermöglicht, den klassischen Limes als Beweishilfsmittel zu verwenden. Der dritte Punkt gewährleistet, wie wir gleich sehen werden, die Existenz eines freien R -Moduls, der auch \mathcal{B}_n^k -Darstellung ist. Der letzte Punkt ist notwendig für die Halbeinfachheit der Algebra. Laut [2] ist er äquivalent zum Bestehen der folgenden Ungleichungen:

$$\prod_{i=1}^m \frac{q^{2i} - q^{-2i}}{q^2 - q^{-2}} \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$q^{2d} p_i \neq p_j \quad \forall d \in \mathbb{Z}, i \neq j, 0 \leq i, j \leq k-1$$

31. Lemma. Sei R potentiell zulässig und $k < \infty$. Dann verschwindet die Determinante der Matrix $(A_{i+j})_{i,j}, 0 \leq i, j < k$ nicht.

Beweis: Wir bilden $d := \det(A_{i+j})$ zunächst nach R_c^k ab. Dort ist $A_i = A_{i+k}$. Das Bild von d werfen wir dann nach $R_c^k / (A_1 = 0, \dots, A_{k-1} = 0)$. Das Bild darin ist gleich der Determinante der Matrix

$$\begin{array}{cccccc} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

Die Determinante hiervon ist $(-1)^{k-1} A_0^k$. \square

Wir betrachten jetzt die Rolle des Ringes R_1^k und seiner Quotientenringe für die Modul-Konstruktion. Mittels (30), (65) und (55) sieht man, daß das von e in $B(R)$ erzeugte Ideal I_2 im Falle $k < \infty$ von $Y^i e Y^j, i, j = 0, 1, \dots, k-1$ (und im Falle $k = \infty$ von $Y^i e Y^j, i, j \in \mathbb{Z}$) aufgespannt wird.

32. Definition. Sei R wie in Definition 6 und $k < \infty$. Es sei $V^k := V^k(R)$ der freie Modul des Ranges k über R . Die Basis werde mit $b_i, 0 \leq i < k$ bezeichnet. V^k wird qua der folgenden Definitionen als Modul über der freien R -Algebra mit Generatoren e, X, Y aufgefaßt:

$$\begin{aligned} e.b_i &:= A_i b_0 \quad \text{mit } A_0 = x \\ Y.b_{k-1} &:= \sum_{j=0}^{k-1} q_j b_j \quad Y.b_i := b_{i+1} \\ X.b_0 &:= \lambda b_0 \quad X.b_1 := \lambda^{-1} Y^{-1}.b_0 \\ X.b_i &:= Y^{-1}.X.b_{i-1} - \delta b_{i-2} + \delta A_{i-1} Y^{-1}.b_0 \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

Die Wirkung der Generatoren ist natürlich in der Absicht gewählt, V^k zu einem $B(R)$ -Modul zu machen, der isomorph zu dem Modul der $Y^i e$ sein sollte.

Dabei wirken Y^{-1} und X^{-1} durch ihre Expansion als Summe von Y^i (damit ist sofort klar, daß $(Y^{-1}). = (Y.)^{-1}$ ist), resp. $X, e, 1$. Es stellt sich dann heraus, daß V^k im allgemeinen (z. Bsp. für R_0^k als Grundring) kein B -Modul ist. Die meisten Relationen sind leicht nachzuprüfen, aber zwei Relationen gelten i. a. nicht: (a) $XYXY = YXYX$ und (b) $X^2 = 1 + \delta X - \delta \lambda e$. Relation (b) ist nach der Definition von $(X^{-1}).$ äquivalent zu $(X^{-1}). = (X.)^{-1}$. Es gilt aber:

33. Lemma. Sei $k < \infty$. $V^k(R)$ ist $B(R)$ -Modul, falls in R die Gleichungen $h_i = 0$ gelten, insbesondere also wenn $R = R_1^k$ oder R potentiell zulässig ist.

Beweis: Für Ringe der beschriebenen Art gilt qua Definition:

$$b_1 = Y.b_0 = \lambda^{-1}X^{-1}.Y^{-1}.b_0 \quad (81)$$

Wir betrachten zuerst den Vektor b_0 . Auf ihm gilt Relation (b) trivialerweise, und Relation (a) rechnet man leicht nach:

$$\begin{aligned} X.Y.X.Y.b_0 &= X.Y.X.b_1 = \lambda^{-1}X.Y.Y^{-1}.b_0 = \lambda^{-1}X.b_0 = b_0 \\ &= Y.Y^{-1}.b_0 = \lambda Y.X.b_1 = Y.X.Y.X.b_0 \end{aligned}$$

Wir prüfen weiter die inverse Relation (a):

$$\begin{aligned} X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.Y^{-1}.b_0 &\stackrel{(81)}{=} \lambda X^{-1}.Y^{-1}.Y.b_0 = \lambda X^{-1}.b_0 = b_0 \\ Y^{-1}.X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.b_0 &= \lambda^{-1}Y^{-1}.X^{-1}.Y^{-1}.b_0 \stackrel{(81)}{=} Y^{-1}.Y.b_0 = b_0 \end{aligned}$$

Eine Folge von (81) ist, daß für alle $i = 0, \dots, k-1$ gilt:

$$X.Y.b_{i-1} = X.b_i = Y^{-1}.X^{-1}.b_{i-1} \quad (82)$$

Dabei gilt die Vereinbarung $b_{-1} = Y^{-1}.b_0$. Der Fall $i = 0$ gilt dabei nach (81), der Fall $i = 1$ ist trivial, und die Fälle $i > 1$ sind gerade die etwas anders aufgeschriebene Wirkung von X . Nach diesen Vorarbeiten kann der allgemeine Beweis der Relationen (a) und (b) durch Induktion in Angriff genommen werden. Die Induktionshypothese H_i lautet: Relationen (a) und (b) gelten auf b_{i-1} . Als ersten zeigen wir die inverse Relation (a) auf b_{i-1} .

$$\begin{aligned} Y^{-1}.X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.b_{i-1} &\stackrel{(82)}{=} X.Y.X.Y.b_{i-1} \\ &= X.Y.X.Y.b_{i-1} \stackrel{H_i}{=} b_{i-1} \\ X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.Y^{-1}.b_{i-1} &= X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.b_{i-2} \stackrel{(82)}{=} X^{-1}.X.b_{i-1} \\ &\stackrel{H_i}{=} b_{i-1} \end{aligned}$$

Jetzt wird (b) gezeigt:

$$\begin{aligned} X^{-1}.X.b_i &\stackrel{(82)}{=} X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.b_{i-1} = Y.Y^{-1}.X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.b_{i-1} \\ &= Y.X^{-1}.Y^{-1}.X^{-1}.Y^{-1}.b_{i-1} \stackrel{(82)}{=} Y.X^{-1}.X.b_{i-1} \stackrel{H_i}{=} b_i \end{aligned}$$

Nun zu (a):

$$\begin{aligned} Y.X.Y.X.b_i &= Y.X.Y.Y^{-1}.X^{-1}.b_{i-1} = Y.X.X^{-1}.b_{i-1} \stackrel{H_i}{=} Y.b_{i-1} = b_i \\ X.Y.X.Y.b_i &\stackrel{(82)}{=} X.Y.Y^{-1}.X^{-1}.b_i = X.X^{-1}.b_i = b_i \end{aligned}$$

□

34. Lemma und Definition. *Der Ring R sei potentiell zulässig und $k < \infty$.*

$$U_m := \text{span}_R\{Y^i e Y^m \mid i = 0, \dots, k-1\}$$

Jede der Untermengen U_m bildet einen zu $V^k = V^k(R)$ isomorphen $B(R)$ -Modul. Sie haben paarweise trivialen Schnitt. Wenn R sogar zulässig ist, bilden sie eine direkte Summenzerlegung des zweiseitigen, von e_1 erzeugten Ideals I_2 .

Beweis: Die Abbildung $\varrho : V^k(R) \rightarrow B(R), b_i \mapsto Y^i e$ definiert einen Modulisomorphismus zwischen V^k und U_0 . Es ist nämlich zunächst eine Surjektion von R -Moduln, aber nach dem obigen Lemma auch ein Morphismus von $B(R)$ -Moduln. Bleibt nur die Injektivität zu zeigen. Sei also $0 = \sum_i \alpha_i Y^i e, \alpha_i \in R$. Wir wenden diese Beziehung auf b_0 an und erhalten $0 = x \sum_i \alpha_i b_i$. Da x invertierbar ist, folgt sofort, daß alle α_i verschwinden. Damit ist gezeigt, daß $\text{span}_R\{Y^i e_1\}$ ein freier R Modul ist. Das gleiche gilt auch für die dazu isomorphen $B(R)$ -Module U_m .

Wir zeigen jetzt, daß die U_m paarweise trivialen Schnitt haben, daß also gilt $m \neq r \Rightarrow U_m \cap U_r = \{0\}$. Da Y invertierbar ist, reicht es sogar, für $m \geq 1$ zu zeigen $U_m \cap U_0 = \{0\}$. Nehmen wir also an, es gäbe ein von Null verschiedenes Element a im Schnitt von U_0 und U_m :

$$a = \sum_i a_i Y^i e_1 = \sum_i b_i Y^i e_1 Y^m$$

Durch Multiplikation von rechts mit e_1 wird auch die rechte Seite nach U_0 abgebildet und man kann die Koeffizienten in der Basis von U_0 vergleichen. Man erhält: $a_i = x^{-1} A_m b_i$. Also gilt

$$a = x^{-1} A_m \sum_i b_i Y^i e_1 = \sum_i b_i Y^i e_1 Y^m$$

Folglich gilt $x^{-1} A_m a Y^{-m} = a Y^{-m} Y^m$, d. h. $a Y^{-m}$ ist Eigenvektor von Y^m zum Eigenwert $x^{-1} A_m$. Da Y^m und x invertierbar sind, folgt die Invertierbarkeit von A_m in R . Das Bild von A_m in jedem Quotienten von R ist dann, wenn es nicht verschwindet, ebenfalls invertierbar. Wir haben aber schon den Quotienten R_c^k definiert, in dem A_m nicht invertierbar ist. Widerspruch.

Mit einer ähnlichen Argumentation können wir weiter zeigen, daß das von e_1 erzeugte Ideal $I_2 := \text{span}\{Y^i e_1 Y^j\}$ als ganzes ein freier R -Modul mit der angegebenen Menge als Basis ist. Angenommen, es gäbe eine lineare Abhängigkeit $0 = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} Y^i e_1 Y^j$. Rechtsmultiplikation mit $Y^r e_1$ liefert $0 = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} Y^i e_1 A_{j+r}$. Die $Y^i e_1$ sind linear unabhängig, und daher gilt für jedes i die Beziehung $0 = \sum_j \alpha_{i,j} A_{j+r}$. Da der Grundring als nullteilerfrei vorausgesetzt wurde, folgt zusammen mit Lemma 31 ein Widerspruch. \square

35. Satz. *Für einen potentiell zulässigen Ring R verschwindet das Annulatorideal von $E_n := e_1 e_3 \cdots e_{2n-1} \in \mathcal{B}_{2n}^k(R)$.*

Beweis: Die Abbildung $\Psi_{2n} : \mathcal{B}_{2n}^k \rightarrow G\mathcal{B}_{2n}^k$ gestattet es, das Problem auf die graphische Algebra abzuwälzen. Wäre $\mu E_n = 0$ für ein $0 \neq \mu \in R$, so auch $0 = \mu \Psi_{2n}(E_n)$.

Wie schon im Falle $k = \infty$ nützt jetzt die kategorielle Struktur der graphischen Situation. Es sei $V \in K_{2n,2}^k(R)$ das Bild des Schlingels der $n-1$ Minima zwischen zwei vertikalen Strängen einschließt. $V' \in K_{2,2n}^k(R)$ habe entsprechend $n-1$ Maxima (vgl. Bild 5). Dann ist²

$$0 = \mu V \Psi_{2n}(E_n) V' = \mu e_1^{(G)} \in G\mathcal{B}_2^k(R)$$

Es reicht also aus, zu zeigen, daß $e_1^{(G)} \in G\mathcal{B}_2^k(R)$ verschwindendes Annulatorideal hat.

Es bezeichne J^k das von $\prod_{i=0}^{k-1} (Y - p_i)$ in $\mathcal{B}_2^\infty(R)$ erzeugte Ideal und $GJ^k := \Psi_2(J^k)$ das entsprechende Ideal in $G\mathcal{B}_2^\infty(R)$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_2^\infty(R) & \xrightarrow{\Psi_2} & G\mathcal{B}_2^\infty(R) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{B}_2^\infty(R)/J^k & \xrightarrow{\widehat{\Psi}_2} & G\mathcal{B}_2^\infty(R)/GJ^k \end{array}$$

²Hier wird die offensichtliche Tatsache verwendet, daß $V \Psi_{2n}(E_n) V'$ ein Element von $G\mathcal{B}_2^k$ ist, d.h. als Produkt der Zwei-Strang-Generatoren geschrieben werden kann. Es ist aber wichtig zu bemerken, daß für ein beliebiges Element $b \in G\mathcal{B}_{2n}^k$ nach bisherigem Kenntnisstand VbV' nicht notwendig in $G\mathcal{B}_2^k$ liegt. Es wäre aber möglich, diese Arbeit so umzustellen, daß das auch schon hier klar würde. Dazu müßte die Definition der Spur (und die dafür nötige Behandlung der Wortsätze) vorgezogen werden. Wir könnten dann allerdings noch nicht das Verschwinden des Annulatorideals verwenden und erhielten daher statt der Spur nur eine Abbildung in den Span eines Elementes E_j . Das reicht aber, um wie oben mit V und V' argumentieren zu können.

mit den natürlichen Projektionen π, π' und der induzierten Abbildung $\widehat{\Psi}_2$, die wir bisher ebenfalls als Ψ_2 bezeichnet haben. Die Quotienten $\mathcal{B}_2^\infty(R)/J^k$ und $G\mathcal{B}_2^\infty(R)/GJ^k$ sind natürlich gerade die Algebren $\mathcal{B}_2^k(R)$ und $G\mathcal{B}_2^k(R)$.

Wir wissen aus Satz 15, daß Ψ_2 ein Isomorphismus ist. Da $e_1 \in U_0 \subset \mathcal{B}_2^\infty(R)/J^k$ verschwindendes Annulatorideal hat, sind wir fertig, wenn gezeigt ist, daß $\widehat{\Psi}_2$ injektiv ist. Angenommen, wir haben ein $a + J^k \in \mathcal{B}_2^\infty(R)/J^k$ mit $0 = \widehat{\Psi}_2(a + J^k) = \pi'(\Psi_2(a)) = \Psi_2(a) + GJ^k$. Dann ist also $\Psi_2(a) \in GJ^k$. Wegen der Bijektivität von Ψ_2 also weiter $a \in J^k$ und damit ist $a + J^k \in \mathcal{B}_2^\infty(R)/J^k$ die Null. Das ist die benötigte Injektivität von $\widehat{\Psi}_2$. \square

Der Beweis des letzten Satzes hat noch mehr gezeigt:

36. Korollar. *Für potentiell zulässige Grundringe sind die Algebren $G\mathcal{B}_2^k(R)$ und $\mathcal{B}_2^k(R)$ isomorph.*

37. Satz. *R sei zulässig. Dann ist $\mathcal{B}_2^k(R)$ ein freier R -Modul der Dimension $k^2 + k^2 \cdot 2! = k^2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)!! = 3k^2$ mit Basis*

$$S_k := \{Y^i e_1 Y^j\} \cup \{Y^i X_1 Y^j X_1\} \cup \{Y^i X_1 Y^j\} \quad i, j \in \{0, \dots, k-1\}$$

Beweis: Nach Lemma 34 bilden die $\{Y^i e_1 Y^j\}$ eine Basis des Ideals I_2 . Der Quotient ist die Ariki-Koike-Algebra AK_2 , und X_1, Y werden im Quotienten auf die entsprechenden Generatoren abgebildet. Da die Vereinigung der zweiten und dritten Teilmenge von S_k auf eine Basis der Ariki-Koike-Algebra abgebildet wird, sind sie linear unabhängig. Sie erzeugen also einen freien Untermodul. Daher spaltet die exakte Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow I_2 \rightarrow \mathcal{B}_2^k(R) \rightarrow \text{AK}_2(R) \rightarrow 0$. \square

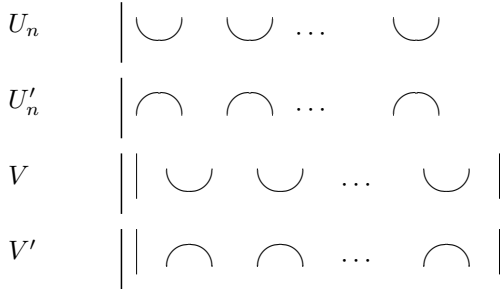


Abbildung 5: Diverse Hilfsmorphismen in der Kategorie der Bandschlingel im Zylinder

Wir geben die Beziehungen $h_i = 0$ für $k \leq 3$ noch explizit an: Für $k = 2$ lauten die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 0 &= h_0 q_0^2 = q^{-1} \lambda^{-2} (-qq_0 q_1 + \lambda(q^2 - 1)A_1 q_0 - qq_1) \\ 0 &= h_1 q_0^2 = \lambda^{-2} + \lambda^{-1} q_0 q^{-1} - \lambda^{-1} qq_0 - q_0^2 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung faktorisiert:

$$q_0 = \pm \lambda^{-1} q^{\mp 1}$$

Die erste Gleichung läßt sich dann eindeutig auflösen:

$$A_1 = q_1 \lambda^{-1} \delta^{-1} (1 \mp \lambda q^{\mp 1})$$

Wir setzen daher

$$L_2^\pm := R_0 / (h_0, \pm \lambda^{-1} q^{\mp 1} - q_0) \quad (83)$$

Im Fall $k = 3$ gehen wir zur Basis $\{Y^{-1}e_1, e_1, Ye_1\}$ über. Man überzeugt sich dann leicht, daß die Koeffizienten in dieser Basis dasselbe Ideal definieren. Sie lauten mit q_0^2 multipliziert:

$$\begin{aligned} 0 &= h_0q_0^2 = -(q_0q_1 + \lambda^{-2}q_2) - \lambda^{-1}\delta q_0(1 - A_2 + xq_1 + A_1q_2) \\ 0 &= h_{-1}q_0^2 = -\lambda^{-1}(\delta q_0(q_0 - A_1) + \lambda^{-1}(q_1 + q_0q_2)) \\ 0 &= h_1q_0^2 = \lambda^{-2} - q_0^2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann geschrieben werden als

$$q_0 = \pm\lambda^{-1}$$

Wir setzen daher

$$L_3^\pm := R_0/(h_0, h_{-1}, \pm\lambda^{-1} - q_0) \quad (84)$$

L_3^\pm ist ein Integritätsbereich. Zum Beweis genügt es, zu zeigen, daß die definierenden Gleichungen im Quotientenkörper von R_0 eindeutig aufgelöst werden können und den Bedingungen aus Satz 93 genügen (was offensichtlich ist). Eine solche Auflösung ist etwa gegeben durch

$$\begin{aligned} A_1 &= q_2\lambda^{-1}\delta^{-1} \pm \lambda^{-1} \pm q_1\delta^{-1} \\ A_2 &= \lambda^{-1}(q^2 - 1)^{-1}(-\lambda q\delta + \lambda q_1 - q q_1 - \lambda q^2 q_1 \pm q_2 \mp \lambda q q_2 \mp q^2 q_2 \mp \lambda q q_1 q_2 - q q_2^2) \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt wieder den allgemeinen Fall. Mittels (56) kann die definierende Gleichung aus Definition 26 auch geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} h_i Y^i e &= Y e + \delta \lambda^{-1} Y^{-1} e - \lambda^{-1} \delta \sum_m \bar{q}_m A_m e_1 \\ -\lambda^{-1} \sum_m \bar{q}_m \left(\lambda^{-1} Y^{-m} e + \sum_{s=1}^{m-1} \delta (A_{m-s} Y^{-s} e - Y^{m-2s} e) \right) \end{aligned} \quad (85)$$

Durch diese Ausdrücke wird es nahe gelegt, ähnlich wie im oben behandelten Beispiel L_3^\pm die Basis $Y^{-(k-2)}e_1, Y^{-(k-2)+1}e_1, \dots, Ye_1$ zu verwenden.

$$\begin{aligned} \sum_{i=-(k-2)}^1 h'_i Y^i e &= Y e + \delta \lambda^{-1} Y^{-1} e - \lambda^{-1} \delta \sum_m \bar{q}_m A_m e_1 \\ &\quad - \lambda^{-2} \sum_{m=0}^{k-2} \bar{q}_m Y^{-m} e - \lambda^{-2} \bar{q}_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{q}_i Y^{i-(k-2)} e \\ &\quad - \lambda^{-1} \delta \sum_{m=0}^{k-1} \bar{q}_m \sum_{s=1}^{m-1} A_{m-s} Y^{-s} e + \lambda^{-1} \delta \sum_{m=0}^{k-1} \bar{q}_m \sum_{s=1}^{m-1} Y^{m-2s} e \end{aligned} \quad (86)$$

Da die beiden Basen über eine invertierbare Matrix verbunden sind, erzeugen die beiden Mengen h_0, \dots, h_{k-1} und $h'_{-(k-2)}, \dots, h'_1$ das gleiche Ideal. Einzig der letzte Term in (86) ist noch nicht vollständig in die neue Basis konvertiert. Trotzdem kann man schon das folgende ablesen: Die Gleichungen $h'_{-(k-2)} = 0, \dots, h'_{-1} = 0, h'_0 = 0$ bilden ein lineares Gleichungssystem in oberer Dreiecksform für die Variablen $A_{k-2}, \dots, A_1, A_{k-1}$. Als Nenner tritt (abgesehen von Einheiten) immer nur δ auf. Die Zähler sind irreduzibel, nicht durch δ teilbar, und δ liegt nicht in dem von den Zählern erzeugten Ideal. Damit ist die Anwendung von Satz 93 schon weitgehend vorbereitet. Wir müssen uns aber noch um den Koeffizienten von Ye_1 kümmern. Dieser ist

$$h'_1 = 1 - \lambda^{-2} \bar{q}_{k-1}^2 + \delta \lambda^{-1} \sum_{m=0}^{k-1} \bar{q}_m \sum_{s=1}^{m-1} \tilde{q}_{m-2s,1}$$

Wir bezeichnen mit B die rechts stehende Summe (ohne den Vorfaktor $\delta\lambda^{-1}$), und spalten auf $B = B_1 + B_2$, wobei in B_1 gelten soll $m - 2s = 1$. Wir unterscheiden jetzt gerades $k = 2\mu$ und ungerades $k = 2\mu + 1$. Für ungerades k gilt

$$B_1 = \sum_{m=3,5,\dots}^{k-2} \bar{q}_m = \sum_{s=1}^{\mu-1} \bar{q}_{2s+1} = -q_0^{-1} \sum_{s=2}^{\mu} q_{2s}$$

Für gerades k findet man

$$B_1 = \sum_{m=3,5,\dots}^{k-1} \bar{q}_m = \sum_{s=1}^{\mu-1} \bar{q}_{2s+1} = -q_0^{-1} \sum_{s=1}^{\mu-2} q_{2+2s} + q_0^{-1} = -q_0^{-1} \sum_{s=2}^{\mu-1} q_{2s} + q_0^{-1}$$

Wir berechnen B_2 unter Verwendung von (73) :

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{m=4}^{k-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} \bar{q}_m \tilde{q}_{m-2s,1} \\ &= -q_0^{-1} \sum_{m=4}^{k-2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} q_{m+1} \sum_{t=1}^{m-2s-1} \sum_{i_1+\dots+i_t=m-2s-1} q_{k-i_1} \cdots q_{k-i_t} \\ &\quad + q_0^{-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor} \sum_{t=1}^{k-2s-2} \sum_{i_1+\dots+i_t=k-2s-2} q_{k-i_1} \cdots q_{k-i_t} \end{aligned}$$

Die beiden Zeilen heben sich fast vollständig weg. Lediglich die Summanden mit nur einem q_{k-i_j} Term finden keinen Partner:

$$B_2 = q_0^{-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor} q_{k-(k-2-2s)} = q_0^{-1} \sum_{s=1}^{\mu-2+\epsilon} q_{2+2s} = q_0^{-1} \sum_{s=2}^{\mu-1+\epsilon} q_{2s}$$

Dabei ist $\epsilon = 0$ für gerades k und $\epsilon = 1$ für ungerades k . Bei der Addition von B_1 und B_2 fallen demnach wieder viele Terme weg: Es ist $B = 0$ für ungerades k und $B = q_0^{-1}$ für gerades k . Zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} h'_1 &= 1 - \lambda^{-2} q_0^{-2} = (1 - \lambda^{-1} q_0^{-1})(1 + \lambda^{-1} q_0^{-1}) \quad k \text{ ungerade} \\ h'_1 &= 1 - \lambda^{-2} q_0^{-2} + \delta \lambda^{-1} q_0^{-1} = \lambda^{-2} q_0^{-2} (q + \lambda q_0)(\lambda q_0 - q^{-1}) \quad k \text{ gerade} \end{aligned}$$

38. Satz und Definition. Für $k = 2\mu + 1$ werde definiert

$$L_k^\pm := R_0^k / (\pm \lambda^{-1} - q_0, h'_0, \dots, h'_{-(k-2)}) \quad (87)$$

und für gerades $k = 2m$ entsprechend

$$L_k^\pm := R_0^k / (\pm \lambda^{-1} q^{\mp 1} - q_0, h'_0, \dots, h'_{-(k-2)}) \quad (88)$$

Dann sind L_k^+ und L_k^- zulässige Ringe für \mathcal{B}_n^k .

Beweis: Der klassische Limes existiert als Quotient, weil die Relationen $h'_j = 0$ für $q = q_0 = 1, q_i = 0$ trivial werden. Die Nullteilerfreiheit folgt aus Satz 93. Die dafür notwendigen Eigenschaften wurden schon oben diskutiert und es ist trivial zu sehen, daß die zusätzliche Relation für q_0 ebenfalls die Annahmen dieses Satzes erfüllt. Weiter sieht man, daß keine der Relationen gelten, die die Halbeinfachheit der Ariki-Koike-Algebra zerstören, denn die p_i sind außer durch die Gleichung für q_0 durch diese Beziehungen nicht festgelegt. \square

Die Existenz zulässiger Ringe für alle $k \in \mathbb{N}$ wurde mit anderen Mitteln auch von tom Dieck [10] gezeigt. Wir referieren kurz die wesentlichen Ergebnisse.

Ausgangspunkt seiner Methode ist die Konstruktion eines Moduls \tilde{V}^k , der zu V^k isomorph ist, für den sich die Konsistenzrelationen aber etwas leichter angeben lassen. Dazu wird zwischen geradem $k = 2m$ und ungeradem $k = 2m + 1$ unterschieden. Als Basis dienen die Mengen $\{b_i \mid -m \leq i \leq m\}$ b.z.w. $\{b_i \mid -m + 1 \leq i \leq m\}$, die wie gehabt in Isomorphie zu $\{Y^i e_1\}$ stehen sollen. Die Wirkung der Generatoren wird definiert durch

$$\begin{aligned} e_1.b_i &:= A_i b_0 \\ Y.b_i &:= b_{i+1} \quad i < m \\ Y.b_m &:= \sum_{i=0}^{k-1} q_i b_{i-m+\epsilon(k)} \\ X.b_0 &:= \lambda b_0 \\ X.b_i &:= \lambda^{-1} b_{-i} + \delta \sum_{s=1}^{i-1} A_{i-s} b_{-s} - b_{i-2s} \quad i > 0 \\ X.b_{-i} &:= \lambda b_i + \delta \sum_{s=0}^{i-1} -A_{s-i} b_s + b_{2s-i} \quad i > 0 \end{aligned}$$

Dabei ist $\epsilon(k) := \epsilon_k := k + 1 \pmod{2}$. Weiter zeigt tom Dieck (in unserer Notation):

39. Satz. \tilde{V}^k ist ein $\mathcal{B}_2^k(R)$ -Modul, falls in R die folgenden Relationen gelten:

$$\sigma_0 := \lambda^2 q_0^2 - 1 = 0 \quad k \text{ ungerade} \quad (89)$$

$$\sigma_0 := -\lambda q_0 + \lambda^{-1} q_0^{-1} - q + q^{-1} = 0 \quad k \text{ gerade} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \sigma_j &:= \delta \lambda \sum_{\nu=0}^{j-1} (-q_{k-\nu} (A_{j-\nu} - \epsilon_{j-\nu}) - q_\nu \epsilon(k+j-\nu)) - \\ &q_{k-j} - q_j q_0^{-1} = 0 \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned} \quad (91)$$

$$\tilde{\sigma} := A_{m+i} = \sum_{j=0}^{k-1} q_j A_{m+i-k+j} \quad (92)$$

In diesen Formeln sei $q_k := 1$ vereinbart. Die Relationenfamilie $\tilde{\sigma}$ legt die $A_i, k-1 \geq i > m$ fest.

Zum Beweis zeigt tom Dieck zunächst, daß $\sigma_j = 0 = \sigma_j^*$ hinreichend ist, eine Darstellung zu ergeben, und daß die Relationen $\sigma_j^* = 0$ bereits durch die anderen impliziert werden.

40. Satz. Für $k = 2m + 1$ gilt

$$L_k^\pm = R_0^k / (\pm \lambda^{-1} - q_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \tilde{\sigma}) \quad (93)$$

und für gerades $k = 2m$ entsprechend

$$L_k^\pm = R_0^k / (\pm \lambda^{-1} q^{\mp 1} - q_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \tilde{\sigma}) \quad (94)$$

Wir verzichten auf einen Beweis.

3 Das Wortproblem in \mathcal{B}_n^k

In diesem Abschnitt wird eine Standardform für Worte in \mathcal{B}_n^k bestimmt. Eine Basis der Algebra ergibt sich so aber nicht.

Die verfolgte Strategie besteht darin, beliebige Wörter in den Generatoren als Linearkombination von Wörtern zu schreiben, in denen die Generatoren mit den jeweils höchsten Indizes nur einmal auftreten. Vom diagrammatischen Standpunkt bedeutet das, den äußersten Strang in möglichst einfache Form zu bringen. Der Beweis ist induktiv. Seine Struktur ist wesentlich dadurch bestimmt, daß in den definierenden Relationen höchstens drei Stränge involviert sind. Es ist zu erwarten, daß alle Quotienten-Algebren von Zopfgruppen, die nur derartige Relationen involvieren und für die die 3-Strang Algebra endlichdimensional ist, ähnliche Beweise zulassen. Positive Beispiele sind TLJ und Hecke-Algebren der Serien A und B. Im folgenden kümmern wir uns aber nur um \mathcal{B}_n^k .

In diesem Abschnitt darf k beliebig sein.

41. Satz. *Jedes Element in \mathcal{B}_n^k kann als Linearkombination von Worten der Form $w_1\gamma w_2$ mit $w_i \in \mathcal{B}_{n-1}^k$ und $\gamma \in \Gamma_n := \{1, e_{n-1}, X_{n-1}, Y_n^j, j = 1, \dots, k-1\}$ geschrieben werden (Im Falle $k = \infty$ ist $j \in \mathbb{Z}$). Die Aussage bleibt wahr, wenn in Γ_n die Generatoren X_{n-1} oder Y_n oder beide durch ihr Inverses ersetzt werden.*

Beweis: Der Satz wird induktiv bewiesen. Der Fall $n = 1$ ist trivial und auch $n = 2$ kann man sich explizit überlegen.

Im folgenden betrachten wir den Fall endlicher Höhe. Der Fall unendlicher Höhe erfordert nur minimale Modifikationen.

Sei $w_0\gamma_0w_1\gamma_1 \cdots w_m\gamma_mw_{m+1} \in \mathcal{B}_n^k$ ein beliebiges Wort. Es reicht aus zu zeigen, daß zwei benachbarte γ_i kombiniert werden können. Wir müssen also Worte der Art $w = \gamma_1w_1\gamma_2, w_1 \in \mathcal{B}_{n-1}^k, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_n$ untersuchen. Nach Induktionsannahme haben wir $w_1 = u_1\alpha u_2, u_i \in \mathcal{B}_{n-2}^k, \alpha \in \Gamma_{n-1}$ und damit $w = \gamma_1u_1\alpha u_2\gamma_2 = u_1\gamma_1\alpha\gamma_2u_2$. Es reicht also, die folgende Situation zu betrachten: $w' = \gamma_1\alpha\gamma_2$. Die Fälle $\gamma_1 = 1$ oder $\gamma_2 = 1$ sind trivial. Wir untersuchen jetzt die vier möglichen Werte von α .

1. Fall $\alpha = 1$: Die folgende Tabelle gibt die Relation an, mit der das Produkt $\gamma_1\gamma_2$ auf die Standardform gebracht werden kann.

$\gamma_1 \setminus \gamma_2$	Y_n^j	e_{n-1}	X_{n-1}
Y_n^l	(75)	(95)	(53)
e_{n-1}	(96)	(9)	(7)
X_{n-1}	(97)	(7)	(14)

$$Y_n^l e_{n-1} = X_{n-1} Y_{n-1}^l X_{n-1}^{-1} e_{n-1} = \lambda^{-1} X_{n-1} Y_{n-1}^l e_{n-1} \text{ dann (55) rekursiv} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} e_{n-1} Y_n^j &= \lambda e_{n-1} Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1} \\ &= \lambda e_{n-1} Y_{n-1}^j X_{n-1} - \delta \lambda e_{n-1} Y_{n-1}^j + \delta \lambda A_j e_{n-1} \end{aligned} \quad (96)$$

Der erste Term wird durch rekursive Anwendung von (54) reduziert.

$$X_{n-1} Y_n^j = X_{n-1}^2 Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} &= Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1} - \delta \lambda e_{n-1} Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1} + \delta X_{n-1} Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1} \\ &= Y_{n-1}^j X_{n-1} - \delta Y_{n-1}^j + \delta Y_{n-1}^j e_{n-1} \end{aligned} \quad (98)$$

$$-\delta \lambda (e_{n-1} Y_{n-1}^j X_{n-1} - \delta e_{n-1} Y_{n-1}^j + \delta A_j e_{n-1}) + \delta Y_n^j \quad (99)$$

Auch hier wird (54) rekursiv angewendet.

2. Fall $\alpha = X_{n-2}$:

$\gamma_1 \setminus \gamma_2$	Y_n^j	e_{n-1}	X_{n-1}
Y_n^l	$= X_{n-2} Y_n^{j+l}$ (75)	$= X_{n-2} Y_n^l e_{n-1}$ (95)	$= X_{n-2} Y_n^l X_{n-1}$ (53)
e_{n-1}	$= e_{n-1} Y_n^j X_{n-2}$ (96)	(8)	(21)
X_{n-1}	$= X_{n-1} Y_n^j X_{n-2}$ (97)	(22)	(6)

3. Fall $\alpha = e_{n-2}$:

$\gamma_1 \setminus \gamma_2$	Y_n^j	e_{n-1}	X_{n-1}
Y_n^l	$= e_{n-2} Y_n^{l+j}$ (75)	$= e_{n-2} Y_n^l e_{n-1}$ (95)	$= e_{n-2} Y_n^l X_{n-1}$ (53)
e_{n-1}	$= e_{n-1} Y_n^j e_{n-2}$ (96)	(13)	(20)
X_{n-1}	$= X_{n-1} Y_n^j e_{n-2}$ (97)	(19)	(24)

4. Fall $\alpha = Y_{n-1}^m$:

$\gamma_1 \setminus \gamma_2$	Y_n^j	e_{n-1}	X_{n-1}
Y_n^l	*	wie (100)	*
e_{n-1}	(100)	(45)	(54)
X_{n-1}	*	(55)	(102)

$$e_{n-1} Y_{n-1}^m Y_n^j = e_{n-1} Y_{n-1}^m X_{n-1} Y_n^j X_{n-1}^{-1} \quad (100)$$

$$\stackrel{(54)}{\in} \text{span}\{e_{n-1} Y_{n-1}^s \mid 0 \leq s < k\} Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1}$$

$$\stackrel{(54)}{\subseteq} \text{span}\{e_{n-1} Y_{n-1}^s \mid 0 \leq s < k\} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} X_{n-1} Y_{n-1}^m X_{n-1} &= Y_n^m X_{n-1}^2 = Y_n^m + \delta Y_n^m X_{n-1} - \delta \lambda Y_n^m e_{n-1} \\ &= Y_n^m + \delta X_{n-1} Y_{n-1}^m - \delta \lambda Y_n^m e_{n-1} \end{aligned} \quad (102)$$

Der letzte Term kann mittels (95) reduziert werden.

Die verbleibenden, mit * markierten Fälle, sind:

$$\begin{aligned} Y_n^l Y_{n-1}^m Y_n^j &= X_{n-1} Y_{n-1} X_{n-1}^{-1} Y_{n-1}^m X_{n-1} Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1} \\ X_{n-1} Y_{n-1}^m Y_n^j &= X_{n-1} Y_{n-1}^m X_{n-1} Y_{n-1}^j X_{n-1}^{-1} \\ Y_n^l Y_{n-1}^m X_{n-1} &= X_{n-1} Y_{n-1} X_{n-1}^{-1} Y_{n-1}^m X_{n-1} \end{aligned}$$

Da in diesen Ausdrücken die Indizes aller Generatoren gleich sind, werden diese im folgenden unterdrückt. Gleichungen (54) und (55) implizieren, daß jede Sequenz, die e enthält, reduzibel ist zu einer Linearkombination von $Y^t e Y^s$, was von der Standardform ist. Das motiviert die folgende Definition: Wir schreiben $a \sim b$, falls $\exists c, \chi : a = b + \chi c$, wobei c ein e enthält und χ ein Parameter ist. Folglich erhält die Substitution $X - \delta \leftrightarrow X^{-1}$ diese Äquivalenzrelation.

Um den Beweis abzuschließen, reicht es, zu zeigen, daß jede endliche Kette von Generatoren dieser Art äquivalent ist zu einer Kette, die maximal zwei X enthält. Denn wenn die Kette kein oder nur ein X enthält, ist sie von der Standardform und wenn sie genau zwei X enthält, ist sie entweder $XY^l XY^m \sim XY^l X^{-1} Y^m + \delta XY^{l+m} = Y_{+1}^l Y^m + \delta XY^{l+m}$ oder $Y^l XY^m X \sim Y^l XY^m X^{-1} + \delta Y^l XY^m = Y_{+1}^l Y^m + \delta Y^l XY^m$.

Die Reduzibilität zu Ketten mit maximal zwei X folgt aus folgender Tatsache: Es gibt Familien von Skalaren α, β , so daß gilt:

$$XY^s XY^t X \sim \sum_{i,j} \alpha_{s,t}^{s,t} XY^i XY^j + \sum_{i,j} \beta_{i,j}^{s,t} Y^i XY^j \quad (103)$$

Wir zeigen (103) induktiv. Für $s = 1$ ist $XYXY^tX = Y^tXYX^2 \sim Y^tXY - \delta Y^tXYX = Y^tXY - \delta XYXY^t$. Angenommen, (103) gelte für s . Wir zeigen es für $s + 1$:

$$\begin{aligned} XY^{s+1}XY^tX &= XYX^{-1}XY^sXY^t \\ &\sim \sum_{i,j} \alpha_{i,j}^{s,t} XYX^{-1}XY^iXY^j + \sum_{i,j} \beta_{i,j}^{s,t} XYX^{-1}Y^iXY^j \\ &\sim \sum_{i,j} \alpha_{i,j}^{s,t} XY^{i+1}XY^j + \sum_{i,j} \beta_{i,j}^{s,t} XYXY^iXY^j - \\ &\quad \delta \sum_{i,j} \beta_{i,j}^{s,t} XY^{i+1}XY^j \end{aligned}$$

Der erste und dritte Summand sind bereits in einer Form, in der ihr Beitrag zu $\alpha_{i+1,j}^{s+1,t}$ abgelesen werden kann. Im zweiten Summanden verwenden wir die Induktionshypothese noch einmal.

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} \beta_{i,j}^{s,t} XYXY^iXY^j \\ &\sim \sum_{i,j} \beta_{i,j}^{s,t} \sum_{p,q} (\alpha_{p,q}^{1,i} XY^pXY^{q+j} + \beta_{p,q}^{1,i} Y^pXY^{q+j}) \end{aligned}$$

Es verbleibt nur noch die letzte Behauptung des Satzes zu zeigen. Die Anti-Involution aus Bemerkung 20 zeigt, daß wir X und Y gemeinsam durch ihr Inverses ersetzen dürfen. Da aber Y_n^{-1} eine Linearkombination von Y_n^i ist, kann auch Y allein durch sein Inverses ersetzt werden. Die Kombination beider Substitutionen ersetzt allein X durch sein Inverses. \square

Der Satz impliziert insbesondere, daß \mathcal{B}_n^k für $k < \infty$ endlichdimensional ist.

42. Lemma. *Es gibt Elemente $R_{i,m} \in \mathcal{B}_{i-1}^k$, so daß $e_i Y_i'^m e_i = R_{i,m} e_i$ und*

$$e_i Y_i'^l X_i = e_i Y_i'^{l-1} X_i Y_i'^{-1} - \delta e_i Y_i'^{l-2} + \delta R_{i,l-1} e_i Y_i'^{-1} \quad (104)$$

Beweis: Zum Beweis der ersten Behauptung schreibt man $Y_i'^m = \sum_j a_j b_j c_j$ gemäß Satz 41 mit $a_j, c_j \in \mathcal{B}_{i-1}^k, b_j \in \Gamma_i$. Die Behauptung ist dann offensichtlich.

$$\begin{aligned} e_i Y_i'^l X_i &= e_i Y_i'^l X_i Y_i' X_i X_i^{-1} Y_i'^{-1} = e_i X_i Y_i' X_i Y_i'^l X_i^{-1} Y_i'^{-1} \\ &= e_i Y_i'^{l-1} X_i^{-1} Y_i'^{-1} \\ &= e_i Y_i'^{l-1} X_i Y_i'^{-1} - \delta e_i Y_i'^{l-1} Y_i'^{-1} + \delta e_i Y_i'^{l-1} e_i Y_i'^{-1} \\ &= e_i Y_i'^{l-1} X_i Y_i'^{-1} - \delta e_i Y_i'^{l-2} + \delta R_{i,l-1} e_i Y_i'^{-1} \end{aligned}$$

\square

43. Satz. *In Satz 41 kann Γ_n durch $\Gamma_n' := \{1, e_{n-1}, X_{n-1}, Y_n^j, j = 1, \dots, k-1\}$ ersetzt werden.*

Beweis: Wir schreiben ein beliebiges Element a aus \mathcal{B}_n^k als $a = \sum_j f_j h_j g_j$ mit $f_j, g_j \in \mathcal{B}_{n-1}^k, h_j \in \Gamma_n$. Es reicht zu zeigen, daß $Y_n^i = \sum_s l_s^{(n)} \gamma_s^{(n)} r_s^{(n)}$ mit $\gamma_s^{(n)} \in \Gamma_n', l_s^{(n)}, r_s^{(n)} \in \mathcal{B}_{n-1}^k$, denn dann kann man schlicht diese Ausdrücke für in den h_j vorkommenden Y_n^i einsetzen.

Wir zeigen $Y_n^i = \sum_s l_s^{(n)} \gamma_s^{(n)} r_s^{(n)}$ durch Induktion. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Sei die Formel schon für $n - 1$ als gültig erwiesen.

$$\begin{aligned} Y_n^i &= X_{n-1} Y_{n-1}^i X_{n-1}^{-1} = \sum_s X_{n-1} l_s^{(n-1)} \gamma_s^{(n-1)} r_s^{(n-1)} X_{n-1}^{-1} \\ &= \sum_s l_s^{(n-1)} X_{n-1} \gamma_s^{(n-1)} X_{n-1}^{-1} r_s^{(n-1)} \end{aligned}$$

Die Fälle $\gamma_s^{(n-1)} \in \{1, e_{n-2}, X_{n-2}\}$ reduziert man leicht mit Hilfe der Relationen aus Unterabschnitt 2.1.2. Es bleibt, den Fall $\gamma_s^{(n-1)} = Y'_{n-1}{}^j$ zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
X_{n-1}Y'_{n-1}{}^j X_{n-1}^{-1} &= X_{n-1}Y'_{n-1}X_{n-1}X_{n-1}^{-1}Y'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1}^{-1} \\
&= Y'_n(X_{n-1} - \delta + \delta e_{n-1})Y'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1}^{-1} \\
&= Y'_nX_{n-1}Y'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1}^{-1} - \delta Y'_nY'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1}^{-1} + \\
&\quad \delta Y'_n e_{n-1}Y'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1}^{-1}
\end{aligned} \tag{105}$$

Der zweite Summand ist $-\delta Y'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1}Y'_{n-1}$, also schon von der neuen Standardform. Der dritte Summand ist

$$\begin{aligned}
\delta Y'_n e_{n-1}Y'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1}^{-1} &= \delta \lambda X_{n-1}Y'_{n-1}e_{n-1}Y'_{n-1}{}^{j-1}(X_{n-1} - \delta + \delta e_{n-1}) \\
&= \delta Y'_{n-1}{}^{-1}e_{n-1}Y'_{n-1}{}^{j-1}X_{n-1} - \delta^2 Y'_{n-1}{}^{-1}e_{n-1}Y'_{n-1}{}^{j-1} + \\
&\quad \delta^2 Y'_{n-1}{}^{-1}e_{n-1}Y'_{n-1}{}^{j-1}e_{n-1}
\end{aligned}$$

Lemma 42 zeigt, daß diese Terme zur Standardform reduziert werden können.

Der letzte Summand von (105) kann iterativ reduziert werden. \square

44. Lemma. Für das von e_{n-1} erzeugte Ideal gilt $I_n = \mathcal{B}_{n-1}^k e_{n-1} \mathcal{B}_{n-1}^k$

Beweis: Das Ideal ist definiert als $I_n = \mathcal{B}_n^k e_{n-1} \mathcal{B}_n^k$. Durch Anwendung von Satz 43 entsteht:

$$\begin{aligned}
I_n &= \mathcal{B}_{n-1}^k \Gamma'_n \mathcal{B}_{n-1}^k e_{n-1} \mathcal{B}_{n-1}^k \Gamma'_n \mathcal{B}_{n-1}^k \\
&= \mathcal{B}_{n-1}^k \Gamma'_n \mathcal{B}_{n-2}^k \Gamma'_{n-1} \mathcal{B}_{n-2}^k e_{n-1} \mathcal{B}_{n-2}^k \Gamma'_{n-1} \mathcal{B}_{n-2}^k \Gamma'_n \mathcal{B}_{n-1}^k \\
&= \mathcal{B}_{n-1}^k \Gamma'_n \Gamma'_{n-1} e_{n-1} \mathcal{B}_{n-2}^k \Gamma'_{n-1} \Gamma'_n \mathcal{B}_{n-1}^k
\end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen, daß $\Gamma'_n \Gamma'_{n-1} e_{n-1} \subset \mathcal{B}_{n-1}^k e_{n-1}$ (Man beachte, daß Bemerkung 11 impliziert, daß dann ebenso gilt: $e_{n-1} \Gamma'_{n-1} \Gamma'_n \subset e_{n-1} \mathcal{B}_{n-1}^k$). Die folgende Tabelle berechnet $\gamma_1 \gamma_2 e_{n-1}$ wobei $\gamma_1 \in \{X_{n-1}, e_{n-1}, Y'_n{}^l, l = 0, \dots, k-1\}$, $\gamma_2 \in \{X_{n-2}, e_{n-2}, Y'_{n-1}{}^m, m = 0, \dots, k-1\}$

$\gamma_1 \setminus \gamma_2$	X_{n-2}	e_{n-2}	$Y'_{n-1}{}^m$
X_{n-1}	$= e_{n-2} e_{n-1}$	$X_{n-2}^{-1} e_{n-1}$	Lemma 42
e_{n-1}	$= \lambda^{-1} e_{n-1}$	$= e_{n-1}$	$R_{n-1, m} e_{n-1}$
$Y'_n{}^l$	$= X_{n-2} Y'_{n-1}{}^{-l} e_{n-1}$	$= e_{n-2} Y'_{n-1}{}^{-l} e_{n-1}$	$= Y'_{n-1}{}^{m-l} e_{n-1}$

\square

Wir untersuchen jetzt noch eingehender die Struktur von Mengen von Wörtern, die \mathcal{B}_n^k linear aufspannen. Dabei beschränken wir uns in der Formulierung wieder auf den Fall $k < \infty$, obwohl analoge Aussagen auch in unendlicher Höhe gelten. Im weiteren Verlauf werden nur die klassischen Spezialfälle der folgenden Aussagen benötigt.

45. Lemma. \mathcal{B}_n^k wird linear aufgespannt von einer Menge S_n , die rekursiv definiert wird:

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \{Y^i \mid i = 0, \dots, k-1\} \\
S_n &:= \Gamma_1 \cdots \Gamma_n S_{n-1}
\end{aligned}$$

Dabei werden aus $\Gamma_1 \cdots \Gamma_n$ nur Elemente der folgenden Form benötigt.

$$Y_{l_1}^{m_1} \cdots Y_{l_s}^{m_s} X_i \cdots X_j e_{j+1} \cdots e_{n-1}, \quad m_t \in \{0, \dots, k-1\}, m_s = i, l_1 < \cdots < l_s$$

Dabei ist $1 \leq i \leq n$ und $i-1 \leq j \leq n-1$, so daß die Ketten der X und e auch leer sein können.

Beweis: Satz 41 ergibt die folgende Darstellung von \mathcal{B}_n^k :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n^k &= \text{span}\mathcal{B}_{n-1}^k\Gamma_n\mathcal{B}_{n-1}^k = \text{span}\mathcal{B}_{n-2}^k\Gamma_{n-1}\mathcal{B}_{n-2}^k\Gamma_n\mathcal{B}_{n-1}^k \\ &= \text{span}\mathcal{B}_{n-2}^k\Gamma_{n-1}\Gamma_n\mathcal{B}_{n-1}^k \\ &= \text{span}\Gamma_1\cdots\Gamma_n\mathcal{B}_{n-1}^k\end{aligned}$$

Um die zweite Aussage zu zeigen, nehmen wir an, Y_j^m sei das am weitesten links erscheinende Y in der Kette $Z_i\cdots Z_{j-1}Y_j^m Z_{j+1}\cdots Z_n$ von Generatoren $Z_s \in \Gamma_s$. Dann kann $Z_i\cdots Z_{j-1}$, da es nur aus e und X besteht, nach rechts durchkommutiert und in \mathcal{B}_{n-1}^k absorbiert werden. Ähnlich können e und X , die zwischen zwei Y in der Kette auftreten nach rechts durchkommutiert werden, so daß, nach Iteration des Argumentes, nur Ketten der Art $Y_{i_1}^{m_1}\cdots Y_{i_s}^{m_s} Z_{j+1}\cdots Z_n, i_1 < \cdots < i_s$ übrig bleiben.

Falls andererseits ein $e_i X_{i+1}$ in einer solchen Kette auftritt, kann man es umschreiben zu $e_i X_{i+1} = e_i e_{i+1} X_i^{-1}$. Dann kann X_i^{-1} wie gehabt in \mathcal{B}_{n-1}^k absorbiert werden. Folglich müssen alle X links von allen e in der Kette stehen. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Zu dem vorstehenden Lemma gibt es eine Variante, die die Generatoren Y'_i verwendet.

46. Lemma. \mathcal{B}_n^k wird linear aufgespannt von einer Menge S'_n , die rekursiv definiert wird:

$$\begin{aligned}S'_1 &:= \{Y^i \mid i = 0, \dots, k-1\} \\ S'_n &:= \Gamma'_1\cdots\Gamma'_n S_{n-1}\end{aligned}$$

Dabei werden aus $\Gamma'_1\cdots\Gamma'_n$ nur Elemente der folgenden Form benötigt.

$$Y'^m_i X_i \cdots X_j e_{j+1} \cdots e_{n-1}, \quad m = 0, \dots, k-1$$

Dabei können die Ketten der X und e auch leer sein.

Beweis: Wir argumentieren ähnlich wie in dem Beweis des vorigen Lemmas, verwenden jetzt aber Satz 43, um folgende Darstellung zu erhalten:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n^k &= \text{span}\mathcal{B}_{n-1}^k\Gamma'_n\mathcal{B}_{n-1}^k = \text{span}\mathcal{B}_{n-2}^k\Gamma'_{n-1}\mathcal{B}_{n-2}^k\Gamma'_n\mathcal{B}_{n-1}^k \\ &= \text{span}\mathcal{B}_{n-2}^k\Gamma'_{n-1}\Gamma'_n\mathcal{B}_{n-1}^k \\ &= \text{span}\Gamma'_1\cdots\Gamma'_n\mathcal{B}_{n-1}^k\end{aligned}$$

Um die zweite Aussage zu zeigen, nehmen wir an, ein Y'^m_j erscheine in der Mitte einer Kette $Z_i\cdots Z_{j-1}Y'^m_j Z_{j+1}\cdots Z_n$ von Generatoren $Z_s \in \Gamma'_s$ mit $Z_t \neq Y'_t, t \geq j+1$. Dann kommutiert $Z_i\cdots Z_{j-1}$ mit dem Rest der Kette und kann rechts in \mathcal{B}_{n-1}^k absorbiert werden. Falls andererseits ein $e_i X_{i+1}$ in einer solchen Kette auftritt, kann man es umschreiben zu $e_i X_{i+1} = e_i e_{i+1} X_i^{-1}$. Dann kann X_i^{-1} wie gehabt in \mathcal{B}_{n-1}^k absorbiert werden. Folglich müssen alle X links von allen e in der Kette stehen. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Noch eine andere Art von Erzeugendensystem verdient Beachtung. Wir nennen

$$X(m, i, j) := X_i X_{i-1} \cdots X_j Y'^m_j \quad 0 \leq m < k, i+1 \geq j$$

einen X-Block vom Index i und

$$E(m, i, l, j) := Y'^m_i X_i X_{i+1} \cdots X_l e_{l+1} \cdots e_j \quad 0 \leq m < k, i \leq j, l < j$$

einen E-Block vom Index j .

47. Satz. \mathcal{B}_n^k wird aufgespannt von den Wörtern der Form

$$E(m_1, i_1, l_1, j_1) \cdots E(m_s, i_s, l_s, j_s) X(m'_1, i'_1, j'_1) \cdots X(m'_t, i'_t, j'_t),$$

bei denen die Indizes aller Blöcke verschieden sind und die Indizes der E-Blöcke von links nach rechts, die der X-Blöcke von rechts nach links abfallen.

Beweis: Der Beweis ist natürlich induktiv. Es ist $\mathcal{B}_n^k = \mathcal{B}_{n-1}^k \Gamma_n \mathcal{B}_{n-1}^k$. Für $X_{n-1} \in \Gamma_n$ reduziert man rechts weiter $\mathcal{B}_n^k = \mathcal{B}_{n-1}^k X_{n-1} Z_{n-2} \cdots Z_j$ mit $Z_i \in \Gamma_{i+1}$. Falls in der Kette ein Y_r^m auftritt, können die weiter rechts stehenden Terme nach links gebracht werden. Ein e_j braucht nicht aufzutreten, denn mittels $X_{j+1}e_j = X_j^{-1}e_{j+1}e_j$ könnte dann die ganze Kette der Z_i und schließlich auch X_{n-1} in e verwandelt werden.

Sind wir nun in dem Falle, daß e_{n-1} der Generator mit höchstem Index ist, so entwickeln wir nach links: $\mathcal{B}_n^k = Z_i Z_{i+1} \cdots Z_{n-2} e_{n-1} \mathcal{B}_{n-1}^k$. Mittels $e_i X_{i+1} = e_i e_{i+1} X_i^{-1}$ können dann X -Generatoren, die in der Kette rechts von e -Generatoren stehen, eliminiert werden. \square

48. Vermutung. *Der vorstehende Satz bleibt richtig, wenn in den E-Blöcken stets gilt: $l_r = j_r - 1$.*

Es gibt $k^n(2n-1)!!$ solche Elemente.

Präzisere Aussagen können in der Algebra des klassischen Limes (Definition 29) gemacht werden.

49. Satz. *Es gibt ein lineares Erzeugendensystem von $C\mathcal{B}_n^k$, dessen Elemente die Form $\alpha\beta\gamma$, wobei α ein Produkt von Y' , γ ein Produkt von Y'^{-1} und β ein Element einer Basis der A-Typ BMW-Algebras BA_n ist.*

Ist $k < \infty$ gilt ferner: In jedem Basiswort gibt es höchstens k^n Faktoren Y', Y'^{-1} in α und γ zusammen. Die Dimension von $C\mathcal{B}_n^k$ ist kleiner als $k^n(2n-1)!!$.

Beweis: Der Beweis geschieht durch Induktion nach n . Sei der Satz also schon gezeigt für $n-1$. Es reicht aus, zu zeigen, daß man alle Y'_i , die in dem Erzeugendensystem von $C\mathcal{B}_{n-1}^k$ links stehen, entweder durch die äußere Kette nach links oder in negierter Form ganz nach rechts bringen kann. Wir untersuchen die möglichen Fälle der Reihe nach. Im ersten Falle trete $e_{n-1}Y'_{n-1}$ auf. Das kann umgeschrieben werden gemäß:

$$\begin{aligned} e_{n-1}Y'_{n-1} &= e_{n-1}Y'_{n-1}X_{n-1}Y'_{n-1}Y'_{n-1}^{-1}X_{n-1}^{-1} = \lambda^{-1}e_{n-1}Y'_{n-1}^{-1}X_{n-1}^{-1} \\ &= e_{n-1}X_{n-1}^{-1}Y'_{n-1}^{-1}X_{n-1}^{-1} = e_{n-1}Y_n'^{-1} = e_{n-1}Y_n'^{-1} \end{aligned}$$

Falls $e_i e_{i+1} Y'_i = e_i Y'_i e_{i+1}$ auftritt, zeigt zweifache Anwendung dieser Rechnung, daß ein Y'_{i+2} nach links wandern kann. Es bleibt nur noch die folgende Situation:

$$X_i Y'_i = Y'_{i+1} X_i^{-1} = Y'_{i+1} X_i - \delta Y'_{i+1} + \delta Y'_{i+1} e_i = Y'_{i+1} X_i$$

Das ist von der gewünschten Form.

Keine der Umschreibungen vergrößerte die Zahl der Y' , so daß insgesamt höchstens $(k-1)^n$ davon geben kann: Jede zusätzliche Kette in der rekursiven Konstruktion von S_n bringt höchstens $k-1$ Stück mit. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Dimension von $C\mathcal{B}_{n-1}^k$ kleiner als $k^{n-1}(2n-3)!!$, und wir haben die Y' von den Generatoren von BA_n separiert und so die angegebene Form $\alpha\beta\gamma$ erhalten. Aus der Theorie der Typ-A Algebra BA_n weiß man, daß $2n-1$ verschiedene Ketten $Z_i \cdots Z_n, Z_j \in \{e_{i-1}, X_{i-1}\}$ ausreichen, eine Basis zu erhalten. Jede dieser Kette kann mit Y_i^m beginnen. Die Dimension von $C\mathcal{B}_{n-1}^k$ wird also höchstens um den Faktor $k(2n-1)$ vergrößert. Die Behauptung folgt. \square

4 Der klassische Limes

Unter dem klassischen Limes einer Schlingel-Algebra versteht man eine Algebra, die sich als Bild eines Morphismus ergibt, der den Morphismus von der Zopfgruppe in die Permutationsgruppe spezialisiert und erweitert.

Der klassische Limes wurde schon in Definition 29 eingeführt durch Grundringspezialisierung. Hier beginnen wir eigenständig mit $\mathbb{Z}/(k)$ -bewerteten Brauergraphen und zeigen anschließend, daß die so erhaltene Algebra den klassischen Limes darstellt.

Bei der Definition profitieren wir von tom Diecks Arbeit [10] und brauchen daher nur kurz zu referieren: Es sei $\text{BP}_n^k(R)$ der freie R -Modul über der Menge der Paare (σ, v) , die aus einer freien Involution σ der Menge $P := \{1, 1', 2, 2', \dots, n, n'\}$ und einer Bewertungsfunktion $v : P \rightarrow \mathbb{Z}/(k)$ mit $v(i) + v(\sigma(i)) = 0$ bestehen. Der Grundring R enthalte Elemente $A_i, i \in \mathbb{Z}/(k)$. Die Multiplikation soll bilinear sein und muß daher nur auf Paaren definiert werden. Dazu wird (σ, v) ein CW-Komplex $|\sigma, v|$ zugeordnet, dessen 0-Zellen durch P und dessen 1-Zellen durch die Orbits $\{i, \sigma(i)\}$ gegeben sind. Die Wahl eines Elementes von $\{i, \sigma(i)\}$ definiert eine Orientierung der 1-Zelle und ein zugeordnetes Element aus $\mathbb{Z}/(k)$. Zur Multiplikation von (τ, w) mit (σ, v) werden zunächst die assoziierten CW-Komplexe gebildet und die gestrichenen 0-Zellen von $|\tau, w|$ mit den ungestrichenen von $|\sigma, v|$ identifiziert. Die Wegkomponenten des entstehenden Komplexes werden orientiert und mit den Summen der Bewertungen ihrer Teile versehen. Durch Entfernung der Komponenten, die zu S^1 homöomorph sind, entsteht ein neuer CW-Komplex, der als bewerteter Brauergraph (ρ, t) gelesen werden kann. Das Produkt ist dann (ρ, t) multipliziert mit einem Faktor A_s für jede mit s bewertete Kreiskomponente, die entfernt wurde. Assoziativität des Produktes ist sofort klar.

Angelehnt an die übliche Visualisierung von Brauergraphen durch ebene Graphen können einige geometrische Sprechweisen eingeführt werden. Die gestrichenen Zahlen $1', \dots, n'$ nennen wir obere Punkte, die restlichen untere Punkte. Ein Bogen eines Graphen (σ, v) ist ein Paar $(i, j) \in P \times P$ mit $\sigma(i) = j$. Er heißt horizontal, wenn i und j entweder beide obere oder beide untere Punkte sind, ansonsten heißt er vertikal.

Man rechnet sofort nach, daß es einen Morphismus

$$\chi_n : \mathcal{CB}_n^k \rightarrow \text{BP}_n^k(R_c) \quad a \mapsto (\sigma_a, v_a)$$

gibt, der auf den Generatoren die folgenden Werte annimmt:

$$\begin{aligned} \sigma_Y(i) &= i' \quad \forall i \in P \\ v_Y(1) &= 1 \\ v_Y(1') &= k - 1 \\ v_Y(i) &= 0 \quad i > 1 \\ \sigma_{X_i}(i) &= (i + 1)' \\ \sigma_{X_i}(i + 1) &= i' \\ \sigma_{X_i}(i') &= i + 1 \\ \sigma_{X_i}((i + 1)') &= i \\ \sigma_{X_i}(j) &= j' \quad \forall j \in P - \{i, i + 1, i', (i + 1)'\} \\ v_{X_i}(j) &= 0 \\ \sigma_{e_i}(i) &= i + 1 \\ \sigma_{e_i}(i + 1) &= i \\ \sigma_{e_i}(i') &= (i + 1)' \\ \sigma_{e_i}((i + 1)') &= i' \\ \sigma_{e_i}(j) &= j' \quad \forall j \in P - \{i, i + 1, i', (i + 1)'\} \\ v_{e_i}(j) &= 0 \end{aligned}$$

Er ist surjektiv, denn aus den Bildern der X_i und e_i können zunächst nach den Standardargumenten der Theorie der Braueralgebra alle Brauergraphen aufgebaut werden und durch Anwendung des Bildes von $X_i X_{i-1} \cdots X_1 Y X_1 \cdots X_{i-1} X_i$ können dann die einzelnen Paare $(i, \sigma(i))$ beliebig bewertet werden. Andererseits ist (für endliches k) nach Satz 49 und [10] $\dim(\mathcal{CB}_n^k) \leq k^n(2n - 1)!! = \dim(\text{BP}_n^k(R_c))$ und damit ist χ_n auch injektiv.

5 Die Markovspur

Der graphische Kalkül legt nahe, daß eine Markovspur auf \mathcal{B}_n^k existieren sollte, die als Schließen des Schlingendiagramms interpretiert werden kann. Mit der Untersuchung der Spur bereiten wir den Beweis des Hauptsatzes 69 über die Halbeinfachheit vor.

50. Satz und Definition. *Es sei $a_n \subset R$ das Annulatorideal von $E_n = E(1, 2n - 1) = e_1 e_3 \cdots e_{2n-1}$ in $\mathcal{B}_{2n}^k(R)$. Dann ist durch*

$$x^n \text{tr}(a) E(1, 2n - 1) = \overline{H}_n a H_n \quad \forall a \in \mathcal{B}_n^k$$

(wobei H_n in (110) definiert werden wird) eine lineare Abbildung tr von der Algebra $\mathcal{B}_n^k(R) \otimes_R (R/a_n) = \mathcal{B}_n^k(R/a_n)$ in den Grundring R/a_n definiert. Sie ist eine Markovspur.

Eine Markovspur existiert also insbesondere auf $\mathcal{B}_n^k(R)$, falls R potentiell zulässig ist.

Der Satz und sein Beweis sind auch für $k = \infty$ richtig. Der Beweis ergibt sich aus einer Reihe von Lemmata und wird nach Lemma 58 abgeschlossen. Wir beginnen mit Definitionen von Elementen, die die konzentrischen Halbkreise der graphischen Schließung modellieren.

$$X(i, j) := X_i X_{i+1} \cdots X_j \quad (106)$$

$$X^{-1}(i, j) := X_i^{-1} X_{i+1}^{-1} \cdots X_j^{-1} \quad (107)$$

$$E(i, j) := e_i e_{i+2} \cdots e_j \quad (108)$$

$$H_1 := e_1 \quad (109)$$

$$H_{n+1} := e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) H_n \quad (110)$$

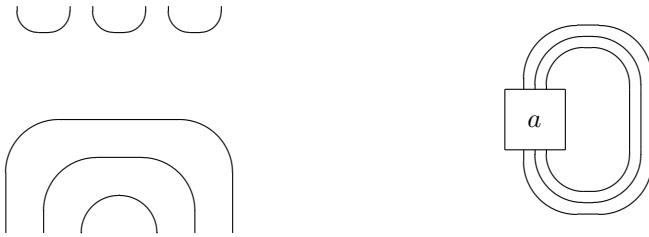


Abbildung 6: Die graphische Interpretation von H_3 (links) und die Bildung der Spur $\text{tr}(a)$ (rechts)

51. Lemma.

$$H_n = E(n, n) E(n-1, n+1) \cdots E(1, 2n-1) \quad (111)$$

$$H_{n+1} = e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n+1) X^{-1}(n+1, 2n) H_n \quad (112)$$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß (111) die definierende Rekursion erfüllt.

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= E(n+1, n+1) X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) \\ &\quad E(n, n) E(n-1, n+1) \cdots E(1, 2n-1) \\ &= e_{n+1} X_{n+2} X_{n+1} E(n, n) X(n+3, 2n+1) X(n+2, 2n) \\ &\quad E(n-1, n+1) \cdots E(1, 2n-1) \\ &= e_{n+1} e_{n+2} E(n, n) X(n+3, 2n+1) X(n+2, 2n) E(n-1, n+1) \cdots E(1, 2n-1) \\ &= E(n+1, n+1) E(n, n+2) X_{n+3} X_{n+2} E(n-1, n+1) \\ &\quad X(n+4, 2n+1) X(n+3, 2n) E(n-2, n+2) \cdots E(1, 2n-1) \\ &= E(n+1, n+1) E(n, n+2) E(n-1, n+3) \\ &\quad X(n+4, 2n+1) X(n+3, 2n) E(n-2, n+2) \cdots E(1, 2n-1) \\ &= \dots = E(n+1, n+1) E(n, n+2) E(n-1, n+3) \cdots E(1, 2n+1) \end{aligned}$$

Der Beweis ruht (neben der Kommutativität von Generatoren) vorallem auf der Relation $e_i X_{i+1} X_i = e_i e_{i+1}$. Da ebenso $e_i X_{i+1}^{-1} X_i^{-1} = e_i e_{i+1}$ gilt, kann (112) analog bewiesen werden. Alternativ (und einfacher) gelangt man zu (112) indem man auf (110) den Morphismus $a \mapsto \bar{a}^*$ anwendet. \square

52. Lemma. $X_i^\pm H_n = X_{2n-i}^\pm H_n$, $e_i H_n = e_{2n-i} H_n$

Beweis: Sei $i = 1$. Der Fall $n = 1$ ist dann trivial. Sei nun nach Induktionsannahme die Behauptung schon gezeigt für $i = 1, n$. Wir zeigen sie für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
X_1 H_{n+1} &= X_1 e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) X_1 H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) X_{2n-1} H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n-2) X_{2n-1} X_{2n} X_{2n-1} H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n-2) X_{2n} X_{2n-1} X_{2n} H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X_{2n} X(n+1, 2n-2) X_{2n-1} X_{2n} H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n-1) X_{2n} X_{2n+1} X_{2n} X(n+1, 2n) H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n-1) X_{2n+1} X_{2n} X_{2n+1} X(n+1, 2n) H_n \\
&= X_{2n+1} e_{n+1} X(n+2, 2n-1) X_{2n} X_{2n+1} X(n+1, 2n) H_n \\
&= X_{2n+1} H_{n+1}
\end{aligned}$$

Für $i > 1$ erkennt man aus (111), daß X_i nach rechts bewegt werden kann, bis man auf eine Situation geführt wird, die dem Fall $i = 1$ bis auf einen Indexshift gleicht.

Die Rechnung für X_i^{-1} benutzt (112) und verläuft analog. Die letzte Gleichung folgt aus den ersten beiden. \square

53. Lemma. $e_{2n-1} = X(n, 2n-2)^{-1} X(n+1, 2n-1)^{-1} e_n X(n+1, 2n-1) X(n, 2n-2)$

Beweis: Der Induktionsbeweis startet (für $n = 2$) mit $e_3 = X_2^{-1} X_3^{-1} e_2 X_3 X_2 = X(2, 2)^{-1} X(3, 3)^{-1} e_2 X(3, 3) X(2, 2)$. Der Schritt ist:

$$\begin{aligned}
&X(n+1, 2n)^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) = \\
&= X(n+1, 2n)^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} X_n^{-1} X_{n+1}^{-1} e_n \\
&\quad X_{n+1} X_n X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) \\
&= X(n+1, 2n)^{-1} X_n^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} X_{n+1}^{-1} e_n \\
&\quad X_{n+1} X(n+2, 2n+1) X_n X(n+1, 2n) \\
&= X(n, 2n)^{-1} X(n+1, 2n+1)^{-1} e_n X(n+1, 2n+1) X(n, 2n) \\
&= X_{2n}^{-1} X_{2n+1}^{-1} X_{2n-1}^{-1} X_{2n}^{-1} X(n, 2n-2)^{-1} X(n+1, 2n-1)^{-1} e_n \\
&\quad X(n+1, 2n-1) X(n, 2n-2) X_{2n} X_{2n-1} X_{2n+1} X_{2n} \\
&= X_{2n}^{-1} X_{2n+1}^{-1} X_{2n-1}^{-1} X_{2n}^{-1} e_{2n-1} X_{2n} X_{2n-1} X_{2n+1} X_{2n} \\
&= X_{2n}^{-1} X_{2n+1}^{-1} e_{2n} X_{2n+1} X_{2n} = e_{2n+1}
\end{aligned}$$

\square

54. Lemma. $e_n X(n+1, n+k) X(n, n+k-1) = X(n+1, n+k) X(n, n+k-1) e_{n+k}$

Beweis: Hier ist k ein beliebiger Index (und hat also nichts zu tun mit dem k aus (64)). Für $k = 1$ ist die Behauptung $e_n X_{n+1} X_n = X_{n+1} X_n e_{n+1}$ eine definierende Relation. Der Induktionsschritt ist:

$$e_n X(n+1, n+k+1) X(n, n+k) =$$

$$\begin{aligned}
&= e_n X(n+1, n+k) X_{n+k+1} X(n, n+k-1) X_{n+k} \\
&= e_n X(n+1, n+k) X(n, n+k-1) X_{n+k+1} X_{n+k} \\
&= X(n+1, n+k) X(n, n+k-1) e_{n+k} X_{n+k+1} X_{n+k} \\
&= X(n+1, n+k) X(n, n+k-1) X_{n+k+1} X_{n+k} e_{n+k+1} \\
&= X(n+1, n+k+1) X(n, n+k) e_{n+k+1}
\end{aligned}$$

□

55. Lemma. $H_{n+1} = e_{n+1} X(n+2, 2n) X(n+1, 2n-1) X_{2n+1}^{-1} X_{2n}^{-1} H_n$

Beweis: Zum Beweis wird das vorangehende Lemma zweimal angewendet

$$\begin{aligned}
e_{n+1} X(n+2, 2n) X(n+1, 2n-1) X_{2n+1}^{-1} X_{2n}^{-1} H_n &= \\
&= X(n+2, 2n) X(n+1, 2n-1) e_{2n} X_{2n+1}^{-1} X_{2n}^{-1} H_n \\
&= X(n+2, 2n) X(n+1, 2n-1) X_{2n+1} X_{2n} e_{2n+1} H_n \\
&= e_{n+1} X(n+2, 2n) X(n+1, 2n-1) X_{2n+1} X_{2n} H_n = H_{n+1}
\end{aligned}$$

□

56. Lemma. $Y^{\pm 1} H_n = \lambda^{-1 \pm 1} Y'_{2n}{}^{\mp 1} H_n$

Beweis: Der Induktionsbeweis startet mit

$$Y H_1 = Y e_1 = X_1^{-1} Y^{-1} Y X_1 Y e_1 = \lambda^{-1} X_1^{-1} Y^{-1} e_1 = (X_1 Y X_1)^{-1} e_1$$

Der Induktionsschritt ist dann:

$$\begin{aligned}
Y H_{n+1} &= Y e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n+1) X^{-1}(n+1, 2n) H_n \\
&= e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n+1) X^{-1}(n+1, 2n) Y H_n \\
&= e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n+1) X^{-1}(n+1, 2n-1) X_{2n}^{-1} Y'_{2n}{}^{-1} H_n \\
&= e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n) X_{2n+1}^{-1} X^{-1}(n+1, 2n-1) Y'_{2n+1}{}^{-1} X_{2n} H_n \\
&= e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n) X_{2n+1}^{-1} Y'_{2n+1}{}^{-1} X^{-1}(n+1, 2n-1) X_{2n} H_n \\
&= e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n) Y'_{2n+2}{}^{-1} X_{2n+1} X^{-1}(n+1, 2n-1) X_{2n} H_n \\
&= Y'_{2n+2}{}^{-1} e_{n+1} X^{-1}(n+2, 2n) X^{-1}(n+1, 2n-1) X_{2n+1} X_{2n} H_n \\
&= Y'_{2(n+1)}{}^{-1} H_{n+1}
\end{aligned}$$

Der Beweis für Y^{-1} ist ähnlich. □

Mit der Anti-Involution aus Bemerkung 12 ergibt sich aus dem vorigen:

57. Lemma. $\overline{H_n} X_i^{\pm} = \overline{H_n} X_{2n-i}^{\pm}, \overline{H_n} e_i = \overline{H_n} e_{2n-i}, \overline{H_n} Y^{\pm 1} = \overline{H_n} Y'_{2n}{}^{\mp 1}$ Also $\overline{H_n} a b H_n = \overline{H_n} b a H_n, \quad \forall a, b \in \mathcal{B}_n^k$

Damit ist gezeigt, daß die in 50 definierte Abbildung eine Spur ist.

58. Lemma. tr ist eine Markovspur. Genauer gilt für $a \in \mathcal{B}_n^k$:

$$\text{tr}(1) = 1 \tag{113}$$

$$\text{tr}(a e_n) = x^{-1} \text{tr}(a) \tag{114}$$

$$\text{tr}(a X_n^{\pm}) = x^{-1} \lambda^{\mp} \text{tr}(a) \tag{115}$$

$$\text{tr}(a Y_{n+1}^m) = A_m x^{-1} \text{tr}(a) \tag{116}$$

Beweis: Sei $a \in \mathcal{B}_n^k$ und $\gamma \in \Gamma_{n+1}$. Dann gilt $e_{n+1}a\gamma e_{n+1} = ae_{n+1}\gamma e_{n+1} = s(\gamma)ae_{n+1}$ mit einem Faktor s , der die Werte $s(\gamma) = x, 1, \lambda^{-1}, A_m$ annimmt, falls $\gamma = 1, e_n, X_n, Y_{n+1}^m$. Der Beweis durch Induktion nach n hat einen trivialen Anfang und als Induktionsschritt die Rechnung:

$$\begin{aligned}
& \overline{H}_{n+1}a\gamma H_{n+1} \\
&= \overline{H}_n X(n+1, 2n)^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} e_{n+1} \\
&\quad a\gamma e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) H_n \\
&= \overline{H}_n X(n+1, 2n)^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} \\
&\quad as(\gamma)e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) H_n \\
&= s(\gamma) \overline{H}_n a X(n+1, 2n)^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} \\
&\quad e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) H_n \\
&= s(\gamma) \overline{H}_n a e_{2n+1} H_n = s(\gamma) \overline{H}_n a H_n e_{2n+1} \\
&= s(\gamma) x^{n \operatorname{tr}(a)} E(1, 2n-1) e_{2n+1} = (s(\gamma)/x) x^{n+1} \operatorname{tr}(a) E(1, 2n+1)
\end{aligned}$$

□

Aus den Überlegungen zur Spur folgt noch ein Ergebnis, das auch für sich alleine von Interesse ist.

59. Satz. *Sei R potentiell zulässig. Dann ist der Kauffman-Skeinmodul des Volltorus $K_{0,0}^k(R)$ (Definition 17) frei vom Rang 1.*

Beweis: Nach einer Verallgemeinerung des Alexander-Theorems kann jede Verschlingung im Volltorus durch Schließung eines Zopfes im Zylinder erhalten werden. Die obigen Überlegungen zeigen dann, daß die Skeinrelationen ausreichen, die Verschlingung vollständig auszulösen, d.h. als Vielfaches des leeren Knotens zu schreiben. Da über potentiell zulässigen Ringen das Annulatorideal von $E_n^{(G)}$ verschindet, muß auch dasjenige des leeren Knotens verschwinden. Dieser ist also ein freier Erzeuger. □

5.1 Die Spur im klassischen Limes

Satz 50 zeigt auch, wie sich der Wert der Spur im klassischen Limes berechnet. In diesem Unterabschnitt wird k als endlich vorausgesetzt.

Für ein $a = (\sigma, v) \in \operatorname{BP}_n^k(R_c)$ sei zunächst \hat{a} der Zykelanteil in der nach [10] durchgeführten Komposition, und $n_i(\hat{a})$ bezeichne die Zahl der Zyklen, die mit i bewertet werden. Dann ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Multiplikation

$$\operatorname{tr}(a) = x^{-n} \prod_{i=0}^{k-1} A_i^{n_i(\hat{a})} \quad (117)$$

60. Satz. *Die Spur tr ist auf $C\mathcal{B}_n^k = \operatorname{BP}_n^k(R_c)$ nicht ausgeartet.*

Beweis: Wir verwenden ein lineares Erzeugendensystem $S_n = \{v_i \mid i = 1, \dots, k^n(2n-1)!\}$. Um den Satz zu beweisen, reicht es, $\det(\operatorname{tr}(v_i v_j^*))_{i,j} \neq 0$ nachzuweisen. Die Anti-Involution $a \mapsto a^*$ vertauscht i und i' , geometrisch gesprochen vertauscht sie also oben und unten. Da dabei die Orientierung geändert wird, verwandelt sich eine Bewertung mit i in eine mit $-i$. Deshalb sind in $\widehat{aa^*}$ alle Bögen mit 0 bewertet. Nehmen wir an, a habe s obere (und s untere) horizontale Bögen. Dann gibt es s Zyklen in aa^* . Wenn wir die Spur berechnen, entstehen weitere s Zyklen aus den jeweils s verbleibenden horizontalen Bögen von a und a^* . Die vertikalen Bögen aus a bilden eine Permutation, deren Inverses in a^* den vertikalen Anteil ausmacht. Beim Schließen entstehen also weitere $n - 2s$ Zyklen. Insgesamt enthält aa^* also genau n Zyklen und es ist $\operatorname{tr}(aa^*) = 1$. Jetzt wählen wir mittels Tensorierung $A_1 := \dots := A_{k-1} := x^{-1}$. Die Spur wird dann ein

Laurentpolynom in x . Die Wahl der A_i bewirkt, daß nicht-triviale Bewertungen eines Bogens den Grad von x in der Spur vermindern. Sei nun β ein Bogen in a und b ein anderer Graph, der keinen zu β gespiegelten Bogen β^* enthält. Indem man die Fälle, daß β horizontal oder vertikal ist, betrachtet, stellt man fest, daß der Zykel der Schließung, der β enthält, mehr als zwei Bögen aus a und b enthält. Die Spur von ab enthält daher weniger Zyklen als die Spur von aa^* . Also ist $b = a^*$ der eindeutige Graph mit höchstem Grad von x in $\text{tr}(ab)$.

Um tr als nicht ausgeartet zu erweisen, reicht es aus zu zeigen, daß

$$\det(\text{tr}(v_i v_j^*)_{i,j}) = x^{-nk^n(2n-1)!!} \det\left(\left(x^{n_0(v_i v_j^*)} \prod_{s=1}^{k-1} x^{n_s(v_i v_j^*)/2}\right)_{i,j}\right)$$

nicht verschwindet. Die Diagonaleinträge in dieser Matrix sind jeweils diejenigen mit dem höchsten x -Grad in jeder Zeile. In der Entwicklung der Determinante gibt es also genau einen Term mit maximalem Grad in x und also kann die Determinante nicht verschwinden, d.h. aber, daß sie auch vor dem Tensorierungsprozeß nicht Null gewesen sein kann. \square

5.2 Spurkonstruktion nach Wenzl

Wenzl hat in [34] die Markovspur auf der Typ-A-BMW-Algebra als iterierte bedingte Erwartungen konstruiert. Dieser Unterabschnitt überträgt dieses Verfahren auf den B-Fall. Voraussetzung ist die Injektivität einer bestimmten Inklusion der Algebren: Wir setzen bis einschließlich Lemma 68 die folgende Hypothese voraus:

61. Hypothese. Die Abbildung $\mathcal{B}_n^k \rightarrow \mathcal{B}_{n+2}^k, a \mapsto x^{-1}ae_{n+1}$ ist injektiv.

Im Beweis des Struktursatzes wird die folgende Situation relevant:

62. Lemma. Die Hypothese ist erfüllt, falls die Spur auf \mathcal{B}_n^k nicht ausgeartet ist.

Beweis: Wegen der Invertierbarkeit von x reicht es aus, zu zeigen, daß für $0 \neq a \in \mathcal{B}_n^k$ gilt $ae_{n+1} \neq 0$. Nehmen wir also das Gegenteil an und werfen durch einen weiteren Inklusionsmorphismus $0 = ae_{n+1}$ sogar nach \mathcal{B}_{2n+2}^k . Nach Voraussetzung ist die Spur auf \mathcal{B}_n^k nicht ausgeartet, es gibt also ein $b \in \mathcal{B}_n^k$ mit $\text{tr}(ba) \neq 0$. Wir fassen b, H_n, \overline{H}_n als Elemente in \mathcal{B}_{2n+2}^k auf und bilden das Produkt a' , das wegen $ae_{n+1} = 0$ ebenfalls verschwindet:

$$\begin{aligned} a' &:= \overline{H}_n X(n+1, 2n)^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} b a e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) H_n \\ &= \overline{H}_n b a X(n+1, 2n)^{-1} X(n+2, 2n+1)^{-1} e_{n+1} X(n+2, 2n+1) X(n+1, 2n) H_n \\ &= \overline{H}_n b a e_{2n+1} H_n = \overline{H}_n b a H_n e_{2n+1} \\ &= x^n \text{tr}(ba) E(1, 2n-1) e_{2n+1} = x^n \text{tr}(ab) E(1, 2n+1) \end{aligned}$$

Da $E(1, 2n+1)$ verschwindendes Annulatorideal hat, impliziert $a' = 0$ das Verschwinden der Spur $\text{tr}(ab) = 0$. Widerspruch. \square

Sei $w = w_1 \gamma w_2 \in \mathcal{B}_{n+1}^k$ mit $w_i \in \mathcal{B}_n^k, \gamma \in \Gamma_{n+1}$. Dann gilt $e_{n+1} w e_{n+1} = w_1 e_{n+1} \gamma e_{n+1} w_2 = s w_1 w_2 e_{n+1}$ mit einem Faktor s , der die Werte $s = x, 1, \lambda^{-1}, A_m$ annimmt, falls $\gamma = 1, e_n, X_n, Y_{n+1}^m$. Die Hypothese 61 ermöglicht die folgende Definition:

63. Definition. $\epsilon_n : \mathcal{B}_{n+1}^k \rightarrow \mathcal{B}_n^k$ sei definiert durch $e_{n+1} a e_{n+1} =: x \epsilon_n(a) e_{n+1}$.

Offensichtlich gilt $\epsilon_n(w_1 a w_2) = w_1 \epsilon_n(a) w_2$ falls $w_i \in \mathcal{B}_n^k$. Darüberhinaus folgt aus (13), daß $e_{n+1} = e_{n+1} e_n e_{n+1} = x \epsilon_n(e_n) e_{n+1}$ und also $\epsilon_n(e_n) = x^{-1}$. Ähnlich folgt aus (8) die Beziehung $e_{n+1} = \lambda^\pm e_{n+1} X_n^\pm e_{n+1} = \lambda^\pm x \epsilon_n(X_n^\pm) e_{n+1}$ und also $\epsilon_n(X_n^\pm) = x^{-1} \lambda^\mp$. Weiter impliziert (45) $e_{n+1} = A_m^{-1} e_{n+1} Y_{n+1}^m e_{n+1} = A_m^{-1} x \epsilon_n(Y_{n+1}^m) e_{n+1}$ und damit $\epsilon_n(Y_{n+1}^m) = A_m x^{-1}$.

Die Iteration der bedingten Erwartung liefert eine Abbildung in den Grundring, die wir mutigerweise ebenfalls mit tr bezeichnen.

64. Definition. $\text{tr}(a) := \text{tr}(\epsilon_{n-1}(a)), \text{tr}(1) := 1$

65. Lemma. $\text{tr}(e_n) = \epsilon_n(e_n) = x^{-1}, \quad \text{tr}(X_n^\pm) = \epsilon_n(X_n^\pm) = x^{-1}\lambda^\mp, \quad \text{tr}(Y_{n+1}^m) = \epsilon_n(Y_{n+1}^m) = A_m x^{-1}$

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften von tr :

66. Lemma. $\forall w_1, w_2 \in \mathcal{B}_n^k, \gamma \in \Gamma_{n+1}$ gilt $\text{tr}(w_1\gamma w_2) = \text{tr}(\gamma)\text{tr}(w_1 w_2)$ und $\epsilon_n(w_1 a w_2) = \text{tr}(\gamma) a b$.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus der zweiten, und diese wird durch Rechnung gezeigt: $x\epsilon_n(w_1\gamma w_2)e_{n+1} = e_{n+1}w_1\gamma w_2e_{n+1} = w_1e_{n+1}\gamma e_{n+1}w_2 = w_1x\epsilon_n(\gamma)e_{n+1}w_2 = w_1w_2x\epsilon_n(\gamma)e_{n+1}$. \square

Dieses Lemma und Lemma 58 implizieren, daß beide Spurdefinitionen übereinstimmen (denn wegen der Wortsätze reichen die im Lemma angegebenen Relationen aus, die Spur auf beliebigen Elementen ausrechnen zu können). Damit ist die Verwendung der Bezeichnung tr für die Iteration der bedingten Erwartung gerechtfertigt.

Aus diesem Unterabschnitt wird im weiteren Verlauf nur die bedingte Erwartung verwendet. Wir haben die Spur ja schon konstruiert und insbesondere die Spureigenschaft $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$ bewiesen. Um die Diskussion der B-BMW-Algebra aber näher an Wenzls Untersuchung der A-Typ-Algebra anzuschließen, verwenden wir den Rest dieses Unterabschnittes dazu, die Spureigenschaft nach seiner Methode zu zeigen.

67. Lemma. $\forall a \in \mathcal{B}_n^k \quad \epsilon_n(X_n^{-1}aX_n) = \epsilon_n(X_n a X_n^{-1}) = \epsilon_n(e_n a e_n) = \epsilon_{n-1}(a)$

Beweis: Sei $a = w_1\gamma w_2 \in \mathcal{B}_n^k, w_i \in \mathcal{B}_{n-1}^k, \gamma \in \Gamma_n$. Multiplikation mit $x e_{n+1}$ ist nach Lemma 61 eine Äquivalenztransformation und führt die Behauptung über in:

$$\begin{aligned} x\epsilon_n(X_n^{-1}w_1\gamma w_2X_n)e_{n+1} &= x\epsilon_n(X_n w_1\gamma w_2 X_n^{-1})e_{n+1} = \\ &= x\epsilon_n(e_n w_1\gamma w_2 e_n)e_{n+1} = x\epsilon_{n-1}(w_1\gamma w_2)e_{n+1} \end{aligned}$$

Durch Weglassen der Faktoren w_1, w_2 entsteht folgende Form:

$e_{n+1}(X_n^{-1}\gamma X_n)e_{n+1} = e_{n+1}(X_n \gamma X_n^{-1})e_{n+1} = e_{n+1}(e_n \gamma e_n)e_{n+1} = x\text{tr}(\gamma)e_{n+1}$. Für $\gamma = 1$ ist das offensichtlich wahr, und für $\gamma = e_{n-1}$ erhält man

$$\begin{aligned} e_{n+1}(X_n^{-1}e_{n-1}X_n)e_{n+1} &= e_{n+1}(X_n e_{n-1} X_n^{-1})e_{n+1} = e_{n+1}(e_n e_{n-1} e_n)e_{n+1} = x x^{-1} e_{n+1} \\ \Leftrightarrow e_{n+1}(X_{n-1}e_n X_{n-1}^{-1})e_{n+1} &= e_{n+1}(X_{n-1}^{-1}e_n X_{n-1})e_{n+1} = e_{n+1}e_n e_{n+1} = e_{n+1} \end{aligned}$$

Das ist offensichtlich richtig.

Im Falle $\gamma = Y_n^m$ gilt

$$\begin{aligned} e_{n+1}(X_n^{-1}Y_n^m X_n)e_{n+1} &= e_{n+1}(X_n Y_n^m X_n^{-1})e_{n+1} = e_{n+1}(e_n Y_n^m e_n)e_{n+1} = x\text{tr}(Y_n^m)e_{n+1} \\ \Leftrightarrow e_{n+1}(X_n^{-1}Y_n^m X_n)e_{n+1} &= e_{n+1}Y_{n+1}^m e_{n+1} = e_{n+1}(e_n Y_n^m e_n)e_{n+1} = A_m e_{n+1} \end{aligned}$$

Daß dies wahr ist, sieht man durch Umschreiben des ersten Ausdrucks

$$\begin{aligned} e_{n+1}X_n^{-1}Y_n^m X_n e_{n+1} &= e_{n+1}e_n X_{n+1} Y_n^m X_n e_{n+1} = e_{n+1}e_n Y_n^m X_{n+1} X_n e_{n+1} \\ &= e_{n+1}e_n Y_n^m e_n X_{n+1} X_n = A_m e_{n+1} e_n X_{n+1} X_n = A_m e_{n+1} \end{aligned}$$

Bleibt nur noch $\gamma = X_{n-1}$.

$$\begin{aligned} e_{n+1}(X_n^{-1}X_{n-1}X_n)e_{n+1} &= e_{n+1}(X_n X_{n-1} X_n^{-1})e_{n+1} = \\ &= e_{n+1}(e_n X_{n-1} e_n)e_{n+1} = x\text{tr}(X_{n-1})e_{n+1} \\ \Leftrightarrow e_{n+1}(X_{n-1}X_n X_{n-1}^{-1})e_{n+1} &= e_{n+1}(X_{n-1}^{-1}X_n X_{n-1})e_{n+1} = \\ &= e_{n+1}(\lambda^{-1}e_n)e_{n+1} = \lambda^{-1}e_{n+1} \\ \Leftrightarrow X_{n-1}e_{n+1}X_n e_{n+1}X_{n-1}^{-1} &= X_{n-1}^{-1}e_{n+1}X_n e_{n+1}X_{n-1} = \lambda^{-1}e_{n+1} = \lambda^{-1}e_{n+1} \\ \Leftrightarrow X_{n-1}\lambda^{-1}e_{n+1}X_{n-1}^{-1} &= X_{n-1}^{-1}\lambda^{-1}e_{n+1}X_{n-1} = \lambda^{-1}e_{n+1} \end{aligned}$$

\square

68. Lemma. *Angenommen, I_{n+1} sei halbeinfach, und tr sei eine Spur auf \mathcal{B}_n^k . Dann ist tr eine Spur auf \mathcal{B}_{n+1}^k .*

Beweis: Es reicht, zu zeigen, daß $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu) \forall u, v \in \mathcal{B}_{n+1}^k$. Falls einer der Faktoren, etwa u , sogar in \mathcal{B}_n^k liegt, ist dies einfach zu sehen: $\text{tr}(uv) = \text{tr}(\epsilon_n(uv)) = \text{tr}(u\epsilon_n(v)) = \text{tr}(\epsilon_n(v)u) = \text{tr}(\epsilon_n(vu)) = \text{tr}(vu)$.

Nach Satz 41 können wir $u, v \in \mathcal{B}_{n+1}^k$ schreiben als

$$u = u_1 + u_2 Y'_{n+1} + u_3 e_n u_4 + u_5 X_n u_6 \quad (118)$$

$$v = v_1 + v_2 Y'_{n+1} + v_3 e_n v_4 + v_5 X_n^{-1} v_6 \quad (119)$$

Da tr linear ist, reicht es, alle Kombinationen von Summanden zu untersuchen. Nach dem zuvor gesagten bleiben nur noch neun Fälle, von denen wir zuerst die symmetrischen behandeln. Dabei schreiben wir a (resp. b) für einen der Summanden von u (resp. v) und nennen die u_i, v_i um.

Erster Fall: $a = a_1 e_n a_2, b = b_1 e_n b_2, a_i, b_i \in \mathcal{B}_n$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(ab) &= \text{tr}(\epsilon_n(a_1 e_n a_2 b_1 e_n b_2)) = \text{tr}(a_1 \epsilon_n(e_n a_2 b_1 e_n) b_2) \\ &= \text{tr}(a_1 \epsilon_{n-1}(a_2 b_1) b_2) = \text{tr}(b_2 a_1 \epsilon_{n-1}(a_2 b_1)) \\ &= \text{tr}(\epsilon_{n-1}(b_2 a_1) \epsilon_{n-1}(a_2 b_1)) = \text{tr}(\epsilon_{n-1}(a_2 b_1) \epsilon_{n-1}(b_2 a_1)) \\ &= \text{tr}(a_2 b_1 \epsilon_{n-1}(b_2 a_1)) = \text{tr}(b_1 \epsilon_{n-1}(b_2 a_1) a_2) \\ &= \text{tr}(b_1 \epsilon_n(e_n b_2 a_1 e_n) a_2) = \text{tr}(\epsilon_n(b_1 e_n b_2 a_1 e_n a_2)) = \text{tr}(ba) \end{aligned}$$

Zweiter Fall: $a = a_1 X_n a_2, b = b_1 X_n^{-1} b_2$

$$\begin{aligned} \text{tr}(ab) &= \text{tr}(a_1 X_n a_2 b_1 X_n^{-1} b_2) = \text{tr}(a_1 \epsilon_n(X_n a_2 b_1 X_n^{-1}) b_2) \\ &= \text{tr}(a_1 \epsilon_{n-1}(a_2 b_1) b_2) = \text{tr}(b_2 a_1 \epsilon_{n-1}(a_2 b_1)) \\ &= \text{tr}(\epsilon_{n-1}(a_2 b_1) \epsilon_{n-1}(b_2 a_1)) \end{aligned}$$

Ab der letzten Gleichung kann die Kette mit vertauschten a, b rückwärts gelesen werden.

Dritter Fall: $a = a_1 Y'_{n+1}, b = b_1 Y'_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(ab) &= \text{tr}(a_1 Y'_{n+1} b_1 Y'_{n+1}) = \text{tr}(a_1 Y'^2_{n+1} b_1) \\ &= \text{tr}(Y'^2_{n+1} b_1 a_1) = \text{tr}(b_1 Y'_{n+1} a_1 Y'_{n+1}) = \text{tr}(ba) \end{aligned}$$

Vierter Fall: Wir betrachten jetzt den ersten nicht symmetrischen Fall $a = a_1 e_n a_2, b = a_3 Y'_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(ab) &= \text{tr}(a_1 \epsilon_n(e_n a_2 a_3 Y'_{n+1})) = \text{tr}(a_1 \epsilon_n(e_n Y'_{n+1}) a_2 a_3) \\ &= \lambda \text{tr}(a_1 \epsilon_n(e_n Y'^{-1}_n) a_2 a_3) = \lambda \text{tr}(a_1 \epsilon_n(e_n) Y'^{-1}_n a_2 a_3) \\ &= \lambda x^{-1} \text{tr}(a_1 Y'^{-1}_n a_2 a_3) = \lambda x^{-1} \text{tr}(a_2 a_3 a_1 Y'^{-1}_n) \\ &= \lambda \text{tr}(a_2 a_3 a_1 \epsilon_n(e_n) Y'^{-1}_n) = \text{tr}(a_2 a_3 a_1 \epsilon_n(Y'_{n+1} e_n)) \\ &= \text{tr}(\epsilon_n(a_3 Y'_{n+1} a_1 e_n) a_2) = \text{tr}(ba) \end{aligned}$$

Der fünfte Fall $b = a_1 e_n a_2, a = a_3 Y'_{n+1}$ geht analog.

Sechster Fall: $a = a_1 X_n a_2, b = b_1 Y'_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(ab) &= \text{tr}(a_1 \epsilon_n(X_n Y'_{n+1}) a_2 b_1) = \text{tr}(a_1 \epsilon_n(X_n^2 Y'_n X_n) a_2 b_1) \\ &= \text{tr}(a_1 \epsilon_n(Y'_n X_n) a_2 b_1) + \delta \text{tr}(a_1 \epsilon_n(Y'_{n+1}) a_2 b_1) - \delta \lambda \text{tr}(a_1 \epsilon_n(e_n Y'_n X_n) a_2 b_1) \\ &= \text{tr}(a_1 Y'_n x^{-1} \lambda^{-1} a_2 b_1) + \delta \text{tr}(a_1 \epsilon_n(Y'_{n+1}) a_2 b_1) - \delta \text{tr}(a_1 \epsilon_n(e_n Y'_{n+1}) a_2 b_1) \\ &= \text{tr}(a_1 Y'_n x^{-1} \lambda^{-1} a_2 b_1) + \delta \text{tr}(a_1 \epsilon_n(Y'_{n+1}) a_2 b_1) - \delta \text{tr}(a_1 \epsilon_n(Y'_{n+1} e_n) a_2 b_1) \\ &= \text{tr}(a_1 \epsilon_n(X_n Y'_n) a_2 b_1) + \delta \text{tr}(a_1 \epsilon_n(Y'_{n+1}) a_2 b_1) - \delta \lambda \text{tr}(a_1 \epsilon_n(X_n Y'_n e_n) a_2 b_1) \\ &= \text{tr}(a_1 \epsilon_n(Y'_{n+1} X_n) a_2 b_1) = \text{tr}(b_1 \epsilon_n(Y'_{n+1} a_1 X_n) a_2) = \text{tr}(ba) \end{aligned}$$

Beim Übergang zur vierten Zeile wurde der vierte Fall verwendet.

Es bleiben jetzt nur noch die nicht diagonalen Fälle, die ein e_n mit X_n oder X_n^{-1} paaren. Diese treten aber de facto gar nicht auf. Denn wegen der vorausgesetzten Halbeinfachheit des Ideals I_{n+1} gibt es eine zentrale Idempotente $z \in \mathcal{B}_{n+1}^k$ mit $z\mathcal{B}_{n+1}^k \cong I_{n+1}$. Sei nun $a \in I_{n+1}$, also $a = az$. Dann ist $ab = azb = a(zb)$. Also kann ObdA auch $b \in I_{n+1}$ angenommen werden (ansonsten ist die Spur 0). Aber $a, b \in I_{n+1}$ impliziert, daß es sich um Linearkombinationen der Form $a = \sum_i a_i e_n a'_i, b = \sum_i b_i e_n b'_i$ mit $a_i, a'_i, b_i, b'_i \in \mathcal{B}_n^k$ handelt. Terme dieser Art wurden aber schon behandelt. \square

6 Der Struktursatz

In diesem Abschnitt wird das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit gegeben: Die Struktur von \mathcal{B}_n^k für endliche k als halbeinfache, endlichdimensionale Algebra wird geklärt. Zunächst werden aber noch einige Definitionen benötigt.

Ein Young-Diagramm λ der Größe n ist eine Partition der natürlichen Zahl n : $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \sum_i \lambda_i = n, \lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Im folgenden arbeiten wir mit geordneten Tupeln von k Young-Diagrammen $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ (vergl. [1]). Die Größe eines Tupels von Young-Diagrammen ist die Summe der Größen seiner Bestandteile. Es bezeichne $\widehat{\Gamma}_n^k$ die Menge der k -Tupeln von Young-Diagrammen der Größen $n, n-2, \dots$

69. Satz. *Es sei R ein im Sinne von Definition 30 zulässiger Ring, und K sei sein Quotientenkörper. Dann gilt für $\mathcal{B}_n^k = \mathcal{B}_n^k(K), k < \infty$:*

1. \mathcal{B}_n^k ist eine halbeinfache Algebra. Die einfachen Komponenten werden durch $\widehat{\Gamma}_n^k$ indiziert.

$$\mathcal{B}_n^k = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\Gamma}_n^k} \mathcal{B}_{n,\lambda}^k \quad (120)$$

2. Die Bratteliregel für die Einschränkung von Modulen lautet: Ein einfacher $\mathcal{B}_{n,\underline{\nu}}^k$ Modul $V_{\underline{\nu}}, \underline{\nu} \in \widehat{\Gamma}_n^k$ zerfällt als \mathcal{B}_{n-1}^k Modul in alle Module $\underline{\lambda} \in \widehat{\Gamma}_{n-1}^k$, die aus $\underline{\nu}$ durch Zufügen oder Wegnehmen einer Box entstehen.
3. tr ist eine treue Spur. Zu jedem Tupel von Young-Diagrammen $\underline{\lambda} \in \widehat{\Gamma}_n^k$ gibt es eine minimale Idempotente $p_{\underline{\lambda}}$ und eine nichtverschwindende Funktion $Q_{\underline{\lambda}}$, die nicht von n abhängt und $\text{tr}(p_{\underline{\lambda}}) = Q_{\underline{\lambda}}/x^n$ erfüllt.

Zum Beweis benötigen wir einige Resultate der Jones-Wenzl-Theorie der Inklusionen endlichdimensionaler, halbeinfacher Algebren.

Sei $A \subset B \subset C$ eine Einbettung endlichdimensionaler Algebren über einem Körper der Charakteristik 0. Es seien A und B halbeinfach, und tr eine mit der Einbettung verträgliche, nicht ausgeartete Spur auf ihnen. Die bedingte Erwartung dieser Inklusion ist dann $\epsilon_A : B \rightarrow A, \text{tr}(ab) = \text{tr}(a\epsilon_A(b))$. Ferner gebe es eine Idempotente $e \in C$, so daß $e^2 = e, ebe = e\epsilon_A(b)\forall b \in B$ und $\varphi : A \rightarrow C, a \mapsto ae$ injektiv ist.

Eine solche Situation kann allein aus dem Inklusionspaar $A \subset B$ mit seiner gemeinsamen treuen Spur tr und bedingter Erwartung ϵ_A konstruiert werden. Sei dazu $\widehat{C} := \{\alpha : B \rightarrow B \mid \alpha \text{ linear}, \alpha(ba) = \alpha(b)a \forall a \in A, b \in B\}$. Die Einbettung $B \subset \widehat{C}$ wird gegeben durch $b \mapsto \alpha_b, \alpha_b(b_1) := bb_1$. Dabei wird e gegeben durch $e_A = \epsilon_A : B \rightarrow B$. Die Unteralgebra von \widehat{C} , die von B und e_A erzeugt wird, wird mit $\langle B, e_A \rangle$ bezeichnet. In diesem Rahmen hat Wenzl die folgenden Ergebnisse bewiesen. [34, Theorem 1.1]

1. $\langle B, e_A \rangle \cong \text{End}_A(B)$

2. Die einfachen Komponenten von A und $\langle B, e_A \rangle$ stehen in Bijektion. Die Einbettungsmatrizen von $A \subset B \subset \langle B, e_A \rangle$ sind zueinander transponiert. Falls p eine minimale Idempotente in A ist, dann ist auch pe_A eine minimale Idempotente in $\langle B, e_A \rangle$
3. $\langle B, e_A \rangle \cong Be_AB$
4. $\langle B, e \rangle \cong \langle B, e_A \rangle \oplus \tilde{B}$, wobei \tilde{B} eine Unteralgebra von B ist.
5. 4 impliziert, daß das von e in C erzeugte Ideal isomorph ist zu $\langle B, e_A \rangle$.

Jetzt kann der Struktursatz bewiesen werden.

Beweis: \mathcal{B}_0^k ist der Grundkörper. Also ist die Behauptung wahr mit $\text{tr}(p_{(\cdot, \dots, \cdot)}) = \text{tr}(1) = Q_{(\cdot, \dots, \cdot)}/x^0, Q_{(\cdot, \dots, \cdot)} = 1$. Die Algebra \mathcal{B}_1^k ist von der Dimension k und hat eine Basis $\{1, Y, \dots, Y^{k-1}\}$. Sie ist kommutativ und halbeinfach. Die einfachen Blöcke sind durch die Eigenräume von Y gegeben. Die Existenz der Idempotenten haben wir uns schon in der Diskussion im Anschluß an Gleichung (68) überlegt. Die Spur ist auf \mathcal{B}_1^k nicht ausgeartet, denn die Determinante von $\text{tr}(Y^i Y^j)$ verschwindet nach Lemma 31 nicht.

Sei der Satz induktiv schon für \mathcal{B}_n^k bewiesen.

Die Jones-Wenzl-Theorie kann (nach Induktionsvoraussetzung und den bereits bewiesenen Eigenschaften der Spur) auf folgende Situation angewendet werden: $A = \mathcal{B}_{n-1}^k, B = \mathcal{B}_n^k, C = \mathcal{B}_{n+1}^k, e = x^{-1}e_n, \epsilon_A = \epsilon_{n-1}$, denn A, B sind nach Induktionsannahme halbeinfache Algebren mit einer gemeinsamen treuen Spur. Die Idempotenz $e^2 = e$ ist klar und die Beziehung zur Spur und zur bedingten Erwartung stimmen nach den Ergebnissen aus Abschnitt 5. Insbesondere garantiert Lemma 62 (mit $n \rightarrow n-1$), daß ϵ_{n-1} existiert.

Aussage 1 der Jones-Wenzl-Theorie besagt dann, daß $\text{End}_A(B) \cong \langle B, e_A \rangle$ halbeinfach ist. Dies ist aber nach Aussage 5 gerade das von e erzeugte Ideal I_{n+1} . Die Quotientenalgebra $\mathcal{B}_{n+1}^k/I_{n+1}$ ist die Ariki-Koike-Algebra AK_{n+1}^k und laut [1] ebenfalls halbeinfach. Also³ ist auch \mathcal{B}_{n+1}^k halbeinfach und besitzt daher eine Darstellung als direkte Summe $\mathcal{B}_{n+1}^k = I_{n+1} \oplus \mathcal{B}_{n+1}^k/I_{n+1}$. Aussage 2 bedeutet, daß die einfachen Komponenten von I_{n+1} durch $\hat{\Gamma}_{n-1}^k$ indiziert werden. Die einfachen Blöcke von AK_{n+1}^k werden durch Tupel von Young-Diagrammen der Größe $n+1$ indiziert (siehe [1]).

Damit ist Punkt 1 des Satzes vollständig bewiesen.

Die Inklusionsmatrix des Teils I_{n+1} ist die Transponierte der Inklusionsmatrix von $\mathcal{B}_{n-1}^k \subset \mathcal{B}_n^k$ und damit von der in der Bratteli-Regel behaupteten Form. Für den Teil AK_{n+1}^k folgt die Gültigkeit der Bratteli-Regel aus [1].

Um die Treue der Spur zu erweisen, müssen wir zeigen, daß die Funktionen Q nicht verschwinden. Falls $p_\lambda \in \mathcal{B}_{n-1}^k$ eine minimale Idempotente in $\mathcal{B}_{n-1, \lambda}^k$ ist, folgt nach Punkt 2, daß $x^{-1}p_{(\mu, \lambda)}e_n$ eine minimale Idempotente in \mathcal{B}_{n+1}^k ist. Die Spur dieser Idempotenten ist $\text{tr}(x^{-1}p_\lambda e_n) = x^{-2}\text{tr}(p_\lambda) = Q_\lambda/x^{n-1+2}$. Dies verschwindet offensichtlich nicht. Die Idempotenten dieser Art sind diejenigen von I_{n+1} . Für die anderen Idempotenten (die von $\mathcal{B}_{n+1}^k/I_{n+1}$ herkommen) werde Q definiert durch $\text{tr}(p_\lambda) = Q_\lambda/x^n$. Zum Beweis, daß diese Q nicht verschwinden, wird der klassische Limes benötigt. Eine minimale Idempotente p_λ von \mathcal{B}_n^k liefert eine Idempotente im Limes. Wir wissen bereits, daß in diesem Limes die Spur treu ist. Also hat die Funktion Q_λ einen nicht verschwindenden klassischen Limes und kann daher selbst nicht verschwinden. \square

Aus der Darstellungstheorie der orthogonalen und symplektischen Quantengruppen (siehe etwa [4]) können (modifizierte) TensorDarstellungen der Algebren \mathcal{B}_n^k gewonnen werden. Sei nämlich B die permutierende R-Matrix in der fundamentalen Darstellung $\pi_V : \mathcal{U}_q(g) \rightarrow \text{End}(V)$ einer

³Im allgemeinen ist die Halbeinfachheit von I und A/I in $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ nicht hinreichend für die Halbeinfachheit von A . In unsere Situation ist aber A eine endlichdimensionale Algebra über einem Körper, und für diese ist Halbeinfachheit äquivalent zum Verschwinden des Radikals. Nach Voraussetzung haben also I und A/I verschwindende Radikale. Die Abbildung $A \rightarrow A/I$ wirft das Radikal $\text{Rad}(A)$ in das Radikal von A/I , also in das Nullideal. Also ist $\text{Rad}(A) \subset I$ und darum $\text{Rad}(A) = I \cap \text{Rad}(A) \subset \text{Rad}(I) = \{0\}$. Es folgt die Halbeinfachheit von A .

solchen Quantengruppe, und sei π_W eine weitere irreduzible Darstellung. Dann wird $W \otimes V^{\otimes n}$ wie folgt zum Darstellungsraum der Algebra $\mathcal{B}_n^k(\mathbb{C}(\lambda, q))$, $x = 1 - (\lambda - \lambda^{-1})/(q - q^{-1})$: Der Generator X_i wirkt durch $\text{id}_W \otimes \text{id}_V \cdots \otimes B \otimes \text{id}_V$, wobei B im i - und $i + 1$ -ten V wirkt. Der Generator Y wirkt durch $(\pi_W \otimes \pi_V)(R_{21}R) \otimes \text{id}_V \otimes \cdots \otimes \text{id}_V$. Die Gültigkeit der Relationen (5) - (8) ist dann nach der Theorie der Darstellungskategorie der Quantengruppen klar. Ebenso folgen sofort (27), (28) und (29) aus dem graphischen Kalkül der Darstellungskategorien. Die Relationen (64) und (30) folgen aus der Endlichdimensionalität resp. aus der Irreduzibilität von W .

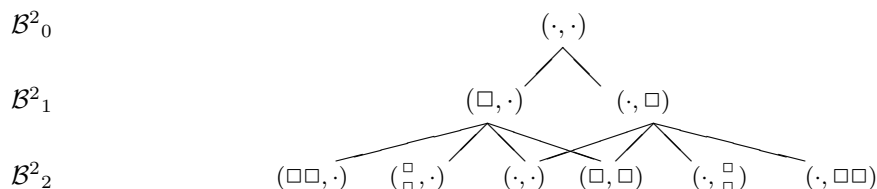


Abbildung 7: Das Bratteli Diagramm von \mathcal{B}_n^2

7 Tensordarstellungen

Im Gegensatz zu den oben betrachteten modifizierten Tensordarstellungen bauen echte Tensordarstellungen der Zopfgruppe ZB_n nur auf einem Vektorraum auf.

70. Definition. Ein Vierzopf-Paar (B, F) auf einem Vektorraum V besteht aus Isomorphismen $F : V \rightarrow V, B : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, so daß gilt

$$\begin{aligned} (F \otimes \text{id})B(F \otimes \text{id})B &= B(F \otimes \text{id})B(F \otimes \text{id}) \\ (B \otimes \text{id})(\text{id} \otimes B)(B \otimes \text{id}) &= (\text{id} \otimes B)(B \otimes \text{id})(\text{id} \otimes B) \end{aligned}$$

Ein Vierzopf-Paar definiert eine Darstellung von ZB_n auf $V^{\otimes n}$ durch

$$\begin{aligned} \phi &: \text{ZB}_n \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n}) \\ \tau_0 &\mapsto F \otimes 1 \cdots \otimes 1 \\ \tau_i &\mapsto 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes B \otimes 1 \cdots \otimes 1 \end{aligned}$$

7.1 Tensordarstellungen zu $k = 2$

Aus den Arbeiten von Wenzl und tom Dieck ist bekannt, wie sich Tensordarstellungen von $\mathcal{B}_n^2(\mathbb{C}(q))$ gewinnen lassen. Dabei sei im Grundkörper $\delta = q - q^{-1}$. Die Konstruktion des Vierzopf-Paares verwendet die R-Matrix der Quantengruppe $U_q(\mathfrak{so}_N)$, $N = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$. Die N dimensionale definierende Darstellung sei $V = \text{span}\{v_i \mid i \in I\}$. Wir verwenden die Indexmenge $I = \{-N + 2, -N + 4, \dots, -3, -1, 0, 1, 3, \dots, N - 2\}$. Die permutierende R-Matrix $B = \tau R$ ist dann

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i \neq 0} (q f_{i,i} \otimes f_{i,i} + q^{-1} f_{i,-i} \otimes f_{-i,i}) + f_{0,0} \otimes f_{0,0} + \sum_{i \neq j, -j} f_{i,j} \otimes f_{j,i} + \\ &\quad (q - q^{-1}) \left(\sum_{i < j} f_{i,i} \otimes f_{j,j} - \sum_{j < -i} q^{\frac{i+j}{2}} f_{i,j} \otimes f_{-i,-j} \right) \end{aligned}$$

Dabei ist $f_{i,j}$ die $N \times N$ Matrix, die an der Stelle (i, j) eine 1 und sonst 0 beinhaltet.

Aus $E := 1 - (B - B^{-1})/\delta$ bestimmt man

$$E = \sum_{i,j} q^{\frac{i+j}{2}} f_{i,j} \otimes f_{-i,-j}$$

Daraus folgt sofort $E^2 = xE$ mit $x = \sum_i q^i$, und daraus $\lambda = q^{1-N}$.

Von tom Dieck stammt die folgende Lösung der 4-Zopf-Relation.

$$F = -f_{0,0} + q^{-1/2} \sum_{i \neq 0} f_{-i,i} + (q^{-1} - 1) \sum_{i > 0} f_{i,i} \quad (121)$$

Diese Matrix erfüllt

$$\begin{aligned} F^2 &= (q^{-1} - 1)F + q^{-1} \\ (F \otimes 1)B(F \otimes 1)B &= B(F \otimes 1)B(F \otimes 1) \\ E &= E(F \otimes 1)B(F \otimes 1) \end{aligned}$$

Der reskalierte Generator $\tilde{Y} := \lambda^{1/2}Y = q^m Y$ erfüllt $e_1 \tilde{Y} X_1 \tilde{Y} = e_1$. Eine Darstellung der Algebra \mathcal{B}_n^2 ergibt sich deshalb aus dem Vierzopf-Paar (B, F) , wenn \tilde{Y} auf F abgebildet wird. Die Parameter der zugehörigen Tensorarstellung sind $\tilde{q}_1 = (q^{-1} - 1)$, $\lambda = q^{1-N}$.

Die Markovspur kann als Matrix-Spur verstanden werden. Dazu sei D die Diagonalmatrix $D_{i,i} := q^i$. Damit wird definiert $\Psi : \text{End}(V^{\otimes n}) \rightarrow K$, $\Psi(a) := \text{Tr}(a(D^{\otimes n}))/\text{Tr}(D^{\otimes n})$. Hier ist Tr die gewöhnliche Spur von Matrizen.

71. Lemma. $\text{tr} = \Psi \circ \phi$

Beweis: In den Parametern dieser Darstellung ist

$$\text{tr}(\tilde{Y}) = \frac{A_1}{x} = \frac{q_1}{1 - q_0 \lambda} = \frac{q^{-1} - 1}{1 - q^{-1} q^{1-N}} = \frac{q^{-1} - 1}{1 - q^{-N}}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \text{Tr}(D) &= \sum_{I \ni i > 0} q^i + q^0 + \sum_{I \ni i < 0} = 1 + q^{-1} \sum_{i=1}^m (q^2)^i + q \sum_{i=1}^m (q^{-2})^i \\ &= 1 + \frac{q - q^N}{1 - q^2} + \frac{q^{-1} - q^{-N}}{1 - q^{-2}} \\ \text{Tr}(DF) &= -1 + \sum_{I \ni i > 0} (q^{-1} - 1)q^i = (q^{-2} - q^{-1}) \sum_{i=1}^m (q^2)^i - 1 \\ &= \frac{q^{-2} - q^{-1}}{1 - q^2} (q^2 - q^{N+1}) - 1 \\ \Psi(\tilde{Y}) &= \text{Tr}(DF)/\text{Tr}(D) = \frac{-q^{N+1} + q^{2N} - q^{2N-1} + q^{N+2}}{q^N - q^{N+2} - q^{2N} + q^2} = -\frac{q - 1}{q - q^{-N+1}} \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises wird wie im A-Fall [34] geführt. \square

7.2 Tensorarstellungen zu $k = 3$

Eine Zylinder-Zopfmatrix, die die Zopfmatrix der Quantengruppe $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}_5)$ zu einem Vier-Zopf-Paar ergänzt, ist gegeben durch $F := PGP^{-1}$. Dabei ist P die Matrix, die das Element $\pi = (5, -4, 3, 1, 2)$ aus der Coxeter-Gruppe WB_5 als vorzeichenbehaftete Permutationsmatrix realisiert: $Pe_i = \text{sgn}(\pi(i))e_{\pi(i)}$. Die Matrix G ist gegeben durch

$$G := q^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b} + b + \frac{1+q}{q^2} & -\frac{a_2}{a_3 q} & \frac{a_1}{a_3 \sqrt{q}} & \frac{a_1^2 b(1+q)}{a_2 a_3 (b-1)^2 \sqrt{q}} & -\frac{a_1^2 b \sqrt{q}}{a_3^2 (b-1)^2 (1+q)} \\ \frac{a_3(1+q)^2}{a_2 q^2} & \frac{1}{b} + b - 1 - \frac{1}{q} & \frac{a_1(1+q)}{a_2 \sqrt{q}} & \frac{a_1^2 b(1+q)}{a_2^2 (b-1)^2 \sqrt{q}} & 0 \\ -\frac{a_3(b-1)^2(1+q)}{a_1 b q^{\frac{3}{2}}} & \frac{a_2(b-1)^2}{a_1 b \sqrt{q}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2 a_3 (b-1)^2(1+q)}{a_1^2 b q^{\frac{3}{2}}} & \frac{a_2^2(b-1)^2}{a_1^2 b \sqrt{q}(1+q)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_3^2(b-1)^2(1+q)}{a_1^2 b q^{\frac{3}{2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$(q^2 b - t)^2 (t - q^2 b^{-1})^2 (1 - t)$$

Die Parameter der \mathcal{B}_n^k -Darstellung sind

$$\begin{aligned} x &= q^{-3} + q^{-1} + 1 + q + q^3 \\ A_1 &= q^3 b^{-1} (1 + b^2 + b q + q^2 + b^2 q^2) \\ A_2 &= \frac{q^5 + q^7 + b q^2 (q^4 - 1) + b^3 q^2 (q^4 - 1) + b^4 (q^5 + q^7) + b^2 (1 - q - q^3 + q^5 + q^7)}{b^2} \\ q_0 &= q^4 \\ q_1 &= b^{-1} q^2 (1 + b^2 + b q^2) \\ q_2 &= q^2 b + q^2 b^{-1} + 1 \end{aligned}$$

8 Invarianten von Knoten im Volltorus

Durch das Schließen von Zöpfen entstehen Verschlingungen. Der Äquivalenzbegriff für Verschlingungen induziert damit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Zöpfe. Das klassische Markov-Theorem beschreibt diese Äquivalenzrelation rein algebraisch.

S. Lambropoulou [22] und A. B. Sossinsky [29] haben Markovs Theorem auf B-Zöpfe verallgemeinert. Zwei Zöpfe β_1, β_2 haben demnach äquivalente Schließungen $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ genau dann, wenn β_1, β_2 durch eine Folge zweier elementarer Züge ineinander überführt werden können: Zug I: Konjugation $\beta \sim \alpha \beta \alpha^{-1}$ und Zug II: $\alpha \sim \alpha \tau_n$ für $\alpha \in \text{ZB}_n$.

Das Theorem impliziert die Existenz einer Erweiterung des Kauffman-Polynoms für B-Verschlingungen. Es bezeichne $\pi : \text{ZB}_n \rightarrow \mathcal{B}_n^k$ den Morphismus $\tau_i \mapsto X_i$. Ohne weiteren Beweis können wir jetzt eine Invariante der B-Verschlingung $\hat{\beta}$, die durch Schließen aus dem B-Zopf $\beta \in \text{ZB}_n$ entsteht, hinschreiben:

72. Definition. Das B-Kauffmanpolynom einer B-Verschlingung $\hat{\beta}$ ist definiert als

$$L(\hat{\beta}, n) := x^{n-1} \lambda^{e(\beta)} \text{tr}(\beta) \quad \beta \in \text{ZB}_n \quad (122)$$

$e : \text{ZB}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die Exponentialsumme mit $e(\tau_i) = 1, e(\tau_0) = 0$.

Auf Typ-A-Verschlingungen reduziert sich das zur Dubrovnik-Variante des Kauffman-Polynoms.

9 Halbeinfachheit im nichtgenerischen Fall

Bisher hatten wir als Grundring stets (einen Quotienten) eines Laurentinges vorausgesetzt. Dies war beim Beweis der Halbeinfachheit entscheidend. Hier soll diskutiert werden, was passiert, wenn \mathbb{C} als Grundkörper verwendet wird.

Ein Teilergebnis kann durch direkte Übertragung von Wenzls Analyse der Typ A BMW Algebra erzielt werden (vgl. [34, Chap. 4]). Das Annulatorideal der Spur werde mit J_n bezeichnet

$$J_n := J_n(\lambda, x, A_1, \dots) = \{a \in \mathcal{B}_n^k \mid \forall b \in \mathcal{B}_n^k : \text{tr}(ab) = 0\}$$

Lemma 66 impliziert dann $J_n \subset J_{n+1}$, und damit ist die GNS-Darstellung $\pi_{\text{tr}}^{(n)}$ des Spurzustandes unabhängig vom Darstellungsraum: $\pi_{\text{tr}}^{(n+1)}(\mathcal{B}_n^k) = \pi_{\text{tr}}^{(n)}(\mathcal{B}_n^k)$.

73. Satz. *Die Algebra $\pi_{\text{tr}}(\mathcal{B}_n^k)$ ist halbeinfach, falls*

$$\prod_{i=1}^m \frac{q^{2i} - q^{-2i}}{q^2 - q^{-2}} \neq 0 \quad \forall 1 \leq m \leq n$$

$$q^{2d} p_i \neq p_j \quad \forall d \in \mathbb{Z}, |d| < n, i \neq j, 0 \leq i, j \leq k-1$$

Beweis: Der Beweis besteht aus einem Neudurchgang durch den Beweis von Satz 69, bei dem die Algebren durch ihre Bilder unter der Darstellung π_{tr} ersetzt sind. Da $\pi_{\text{tr}}(\mathcal{B}_n^k)/\pi_{\text{tr}}(I_n)$ ein Quotient der Ariki-Koike-Algebra ist, kann die Halbeinfachheit gefolgert werden, wenn alle Ariki-Koike-Algebren mit höchstens n Strängen halbeinfach sind. Die Bedingung dafür ist aber laut [2] gerade die angegebene. \square

Bei der Untersuchung von BA_n fährt Wenzl fort, indem er Kriterien für $J_n = 0$, d.h. für die Halbeinfachheit von BA_n angibt. Dieser Teil seiner Untersuchung kann nicht übertragen werden, da er entscheidend benutzt, daß ein Quotient von BA_n als Zentralisator des n -fachen Tensorproduktes der fundamentalen Darstellung der Quantengruppe zu so_N auftritt.

10 Die volle Typ B Birman-Murakami-Wenzl-Algebra

Eine 'volle', d.h. alle heuristischen Erwartungen erfüllende Birman-Wenzl-Algebra vom Typ B sollte graphisch erzeugt werden von allen in Bild 1 vorkommenden Generatoren $X_i^{(G)}, X_i^{(G)-1}, e_i^{(G)}, i \geq 0$, die jeweils 4-Term Skeinrelationen genügen. Es sollten dann alle Isotopiebewegungen und Skeinbewegungen erlaubt sein. Wir hatten schon gesehen, daß der Projektor e_0 auf den p_0 Eigenraum von Y mit den $e_i, i \geq 1$ die Relationen der B-Temperley-Lieb-Algebra erfüllt. Damit eine Skeinrelation mit vier Termen gilt, setzen wir $k = 3$ und betrachten in diesem Fall e_0 genauer:

$$e_0 = \alpha_0 - \alpha_0(p_1^{-1} + p_2^{-1})Y + \alpha_0 p_1^{-1} p_2^{-1} Y^2 \quad (123)$$

$$q_0 = p_0 p_1 p_2 \quad q_1 = -p_0 p_1 - p_1 p_2 - p_0 p_2 \quad q_2 = p_0 + p_1 + p_2 \quad (124)$$

$$Y^2 = -p_1 p_2 + (p_1 + p_2)Y + \alpha_0^{-1} p_1 p_2 e_0 \quad (125)$$

$$Y^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1} - p_1^{-1} p_2^{-1} Y + \alpha_0^{-1} p_0^{-1} e_0 \quad (126)$$

$$e_0 = \alpha_0 p_0 Y^{-1} + \alpha_0 p_0 p_1^{-1} p_2^{-1} Y - p_0 \alpha_0 (p_1^{-1} + p_2^{-1}) \quad (127)$$

$$e_0^2 = x_0 e_0 \quad x_0 := \alpha_0 (1 - p_0 (p_1^{-1} + p_2^{-1}) + p_0^2 p_1^{-1} p_2^{-1}) \quad (128)$$

$$e_1 e_0 e_1 = x'_0 e_1 \quad x'_0 = \alpha_0 (x - A_1 (p_1^{-1} + p_2^{-1}) + A_2 p_1^{-1} p_2^{-1}) \quad (129)$$

Relation (125) kann dazu benutzt werden, Y^2 zu eliminieren.

Die graphische Interpretation suggeriert ferner, daß ein klassischer Limes existieren und zur Algebra der symmetrischen Brauergraphen [28] isomorph sein sollte. Für $n = 2$ gibt es 25 solche Graphen. Von den 27 Basiselementen von \mathcal{B}_2^3 ergeben $Y^2 X Y^2, X Y^2 X Y^2$ nach Anwendung von (125) keine Brauergraphen. Es muß also weitere Relationen geben. Die Überlegungen aus Bild 8 motivieren die folgende Definition.

Als Grundring wählen wir in diesem Abschnitt L_3^- (resp. dessen Quotientenkörper), denn dann ist ein klassischer Limes mit $Y^2 = 1$ möglich. Dabei ist es günstig, die Konsistenzgleichungen nach p_1, p_2, A_2 aufzulösen.

74. Definition. Die volle Typ B Birman-Murakami-Wenzl-Algebra VB_n ist definiert als der Quotient von \mathcal{B}_n^3 nach

$$X_1^{-1}Y^{-1}X_1^{-1}e_0 = (p_1^{-1} + p_2^{-1})e_0 + \alpha_0^{-1}p_0^{-1}e_0e_1e_0 - p_1^{-1}p_2^{-1}e_0X_1YX_1 \quad (130)$$

Die Parameter sind $x, \lambda, p_0, p_1, p_2, A_1, A_2, \alpha_0$. Es müssen drei Konsistenzgleichungen befriedigt werden. Die topologische Interpretation von Y als Band, das stets zur Zylinderachse hin orientiert ist, legt die folgende Wahl nahe:

$$p_0 = 1 \quad (131)$$

Wir werden die weiteren Relationen trotzdem für beliebiges p_0 hinschreiben. Nach (131) bleiben noch vier freie Parameter. Als weitere, topologisch motivierte Relation kann noch gefordert werden:

$$x_0 = x'_0$$

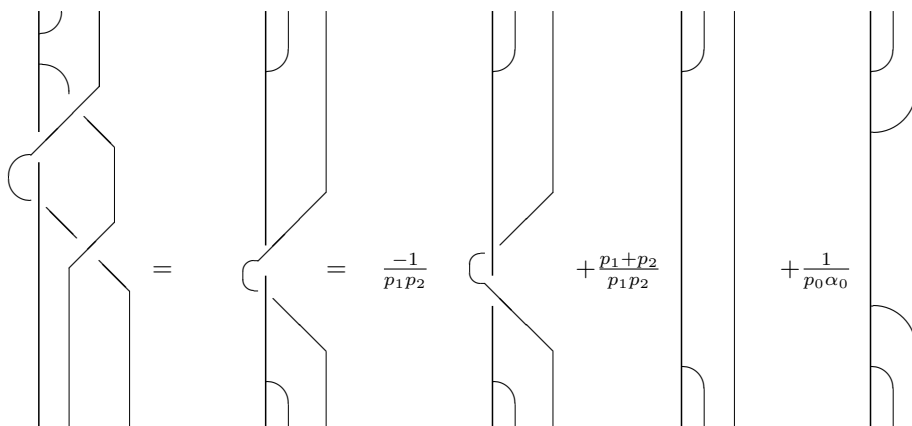


Abbildung 8: $X_1^{-1}Y^{-1}X_1^{-1}e_0$ kann topologisch (aber nicht algebraisch) auf eine symmetrische Form gebracht werden (erste Gleichung). Die Skeinrelation (126) erlaubt dann die weitere Zerlegung. Das motiviert (130).

75. Satz. VB_n ist halbeinfach und trägt eine treue Markovspur. Das Bratteli-Diagramm besteht aus dem Unterdiagramm des Bratteli-Diagramms von \mathcal{B}_n^3 , das aus denjenigen Tripeln von Young-Diagrammen besteht, die maximal eine Box im ersten Young-Diagramm besitzen.

Beweis: Als Quotient einer halbeinfachen Algebra ist VB_n selbst halbeinfach. Damit ist auch sofort klar, daß tr eine treue Spur induziert, von der aber nicht klar ist, ob sie die Markoveigenschaft hat. Ihre Treue zeigt aber, daß das Analogon der Inklusions-Hypothese 61 erfüllt ist. Wenzls Zugang liefert dann eine Markovspur.

Wir zeigen jetzt, daß im Quotienten genau die im Satz beschriebenen Komponenten auftreten. Bis hinauf zu $n = 2$ läßt sich das mühelos verifizieren. Betrachten wir noch einmal den Induktionsschritt im Beweis von Satz 69. Der Teil der $n + 1$ -Zeile im Bratteli-Diagramm, der der $n - 1$ -Zeile entspricht, ist nach Induktionsannahme von der beschriebenen Form. Es bleibt also nur zu untersuchen, welche der durch Multi-Young-Diagramme mit $n + 1$ Kästchen indizierten Komponenten, also der Komponenten von AK_{n+1}^k , mit der neuen Relation verträglich sind. Es muß also geklärt werden, welche Modulen der Ariki-Koike-Algebra verträglich sind mit der Restklasse der Relation (130) im Quotienten nach dem von e_1 erzeugten Ideal:

$$X_1^{-1}Y^{-1}X_1^{-1}e_0 = (p_1^{-1} + p_2^{-1})e_0 - p_1^{-1}p_2^{-1}X_1YX_1e_0 \quad (132)$$

Wir beschreiben kurz die irreduziblen Module der Ariki-Koike-Algebra AK_n^3 . Eine Basis des Moduls, der durch das Tripel von Young-Diagrammen $\underline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ indiziert wird, ist gegeben

durch die Menge der Multi-Young-Tableaux (MYT) $t = (t_0, t_1, t_2)$ der Form $\underline{\lambda}$, gefüllt mit $1, \dots, n$. Der Generator Y wirkt durch Multiplikation mit p_i , falls 1 sich im Tableau t_i befindet. X_i wirkt als Multiplikation mit q , falls sich $i, i+1$ in der selben Zeile des selben YT befinden, und als Multiplikation mit $-q^{-1}$, falls sich $i, i+1$ in der selben Spalte des selben YT befinden. Um die Wirkung von X_i auf den restlichen MYT beschreiben zu können, brauchen wir einige weitere Definitionen. Es sei $c_t(i) := m - l$, wobei m die Spalte und l die Zeile des Kästchens ist, in dem i in seinem YT steht. Ferner sei $r_t(i, j) := c_t(j) - c_t(i)$, $\Delta(w, z) := 1 - q^{2w}z$ und $m_t(i)$ bezeichne den Index des YT, das i enthält. Die Wirkung von X_i ist dann

$$X_i t := (q\Delta(r_t(i+1, i), P))^{-1}((q^2 - 1)t + t'\Delta(1 + r_t(i+1, i), P))$$

mit $P := p_{m_t(i)} p_{m_t(i+1)}^{-1}$. Dabei sei t' das MYT, das aus t durch Vertauschen von i und $i+1$ entsteht.

Aus der Beschreibung der Wirkung von Y wird klar, daß e_0 als Projektor auf diejenigen MYT wirkt, in denen 1 im ersten YT steht. Wir müssen also

$$X_1^{-1} Y^{-1} X_1^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1} - p_1^{-1} p_2^{-1} X_1 Y X_1$$

auf solchen MYT testen. Nachdem die linke Seite vollständig expandiert wurde, $(X_1 - \delta)Y^{-1}(X_1 - \delta) = X_1 Y^{-1} X_1 - \delta(X_1 Y^{-1} + Y^{-1} X_1) + \delta^2 Y^{-1}$, läßt sich die Relation direkt anwenden. Da 1 in der Position (1, 1) des ersten YT steht, und die Relation außer Y nur X_1 enthält, gibt es nur drei Fälle zu unterscheiden. Falls die 2 ebenfalls in t_0 steht, kann sie dort nur auf der Position (1, 2) (Fall A) oder der Position (2, 1) (Fall B) auftreten. Falls die 2 aber nicht in t_0 steht, muß sie in t_1 oder t_2 die Position (1, 1) einnehmen (Fall C). Eine einfache, aber längliche Rechnung zeigt dann, daß die Bedingung in den Fällen A und B verletzt ist, im Fall C aber gilt. Die 2 darf also nie im ersten MYT unter oder rechts von der 1 zu stehen kommen. Da die X_i aber beliebige Permutationen generieren, ist das nur dann ausgeschlossen, wenn es überhaupt keine derartigen Kästchen gibt, d. h. wenn das erste YD maximal ein Kästchen enthält. \square

Das Bratteli-Diagramm von VB_n kann demnach einfacher gezeichnet werden, indem das erste Diagramm weggelassen wird. Die Zahl der Kästchen in den MYD der Algebra \mathcal{B}_n^3 ist $n, n-2, \dots$. Einem Paar (t_1, t_2) von Yang-Diagrammen mit einer beliebigen Zahl von Kästchen $m \leq n$ entspricht also das Diagramm (\cdot, t_1, t_2) , falls $m - n = 0 \bmod 2$, und das Diagramm (\square, t_1, t_2) , falls $m - n = 1 \bmod 2$. Die Bratteli-Regel ist so zu ergänzen, daß eine unveränderte Übernahme eines Paares von YD von einer Zeile zur nächsten erlaubt wird. Dies ist genau die Beschreibung des Bratteli-Diagramms der symmetrischen Braueralgebra, die Holger Reich in seiner Diplomarbeit [28] gegeben hat.

Bevor wir den klassischen Limes diskutieren, ist es notwendig, noch einige Relationen bereitzustellen.

$$\begin{aligned} e_1 Y^{-1} X_1 &= e_1 Y^{-1} X_1^{-1} Y^{-1} Y X_1^2 = \lambda e_1 Y X_1^2 & (133) \\ &= e_1 Y (\lambda - \delta p_1^{-1} p_2^{-1}) + e_1 \delta (p_1^{-1} + p_2^{-1} - \lambda^2 A_1) + e_1 e_0 \delta \alpha_0^{-1} p_0^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 e_0 X_1 &= \alpha_0 p_0 e_1 (Y^{-1} + p_1^{-1} p_2^{-1} Y - p_1^{-1} - p_2^{-1}) X_1 \\ &= e_1 Y \alpha_0 p_0 (\lambda - \delta p_1^{-1} p_2^{-1} - \lambda^{-1} p_1^{-2} p_2^{-2}) + e_1 e_0 (\delta + \lambda^{-1} p_1^{-1} p_2^{-1}) & (134) \\ &\quad + e_1 \alpha_0 p_0 (\delta p_1^{-1} + \delta p_2^{-1} - \delta \lambda^2 A_1 \\ &\quad + p_1^{-1} p_2^{-1} (p_1^{-1} + p_2^{-1}) \lambda^{-1} - \lambda p_1^{-1} - \lambda p_2^{-1}) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Relationen kann $e_0 X_1 e_0$ berechnet werden, indem (130) von rechts mit X_1 multipliziert wird. Die linke Seite ist dann $e_0 X_1^{-1} Y^{-1}$ und kann sofort zu einer Summe von neun Termen expandiert werden. Auf der rechten Seite setze man (134) ein. Dann ergibt sich:

$$\frac{e_0 X_1 e_0}{\alpha_0 p_0} = e_0 e_1 Y (\lambda - \lambda^{-1} p_1^{-2} p_2^{-2}) + e_0 e_1 e_0 \lambda^{-1} \alpha_0^{-1} p_0^{-1} p_1^{-1} p_2^{-1} \quad (135)$$

$$\begin{aligned}
& -e_0 X_1 Y X_1 p_1^{-1} p_2^{-1} \delta + e_0 (\delta (p_1^{-1} + p_2^{-1}) + \delta x_0 \alpha_0^{-1} p_0^{-1} - p_1^{-1} p_2^{-1} \delta p_0) \\
& + e_0 e_1 (-\delta \lambda^2 A_1 + (p_1^{-1} p_2^{-2} + p_1^{-2} p_2^{-1}) \lambda^{-1} - \lambda (p_1^{-1} + p_2^{-1}) + \\
& \quad p_0^{-1} p_1^{-1} p_2^{-1} \delta)
\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck bewährt sich die Wahl $p_0 = 1$: Sie bringt die Koeffizienten der asymmetrischen Terme $e_0 e_1, e_0 e_1 Y$ zum Verschwinden.

Wir beschreiben den klassischen Limes als zweistufigen Prozeß. Im klassischen Limes soll gelten $Y e_0 = e_0$, so daß für die erste Stufe L_0 der Limes $p_0 \rightarrow 1$ durchgeführt werden muß (falls nicht von vornherein mit $p_0 = 1$ gearbeitet wird). Dann drücken wir δ durch x aus und definieren L_1 als den anschließenden Limes $\lambda \rightarrow 1$. Weiter muß $\alpha_0^{-1} \rightarrow 0$ sein. Um das zu erreichen, führen wir die Substitution S ein, die α_0 nach (128) durch x_0 ausdrückt. Der gesamte Limesprozess ist also $L := L_1 S L_0$. Es ist dann $L(\alpha_0^{-1}) = 0$. Weiter ist $L(x'_0) = 0/0$, so daß im Limes x'_0 nicht mehr festgelegt ist.

Ein kleiner Schönheitsfehler liegt darin, daß der Koeffizient von $e_0 e_1 e_0$ in (135) im Limes gegen -1 statt gegen 1 geht. Dessen ungeachtet ist aber sofort klar, daß eine Variante der von H. Reich untersuchten symmetrischen Braueralgebra definiert werden kann, in der eine horizontale Reidemeister-II-Bewegung auf der Symmetrieachse ein Minuszeichen generiert. Dies stört insbesondere nicht die Überlegungen zur Treue der Spur.

Ein anderer Kompromiß ist möglich: Es treten keine Vorzeichenprobleme auf, wenn man nicht fordert, daß der Beitrag von e_0 zu Y^2 im Limes verschwinden muß. Dies tritt bei den Tensorarstellungen (die interessanterweise über $V\mathcal{B}_n$ faktorisieren) aus Abschnitt 7.2 auf.

11 Epilog: Der Weg zu einer kategoriellen Interpretation

Wir sind Versuche, wollen es auch sein.
Friedrich Nietzsche

Die Typ-A BMW-Algebra besitzt eine natürliche kategorielle Anwendung: Quotienten von ihr treten als Zentralisatoren (d.h. als Endomorphismenalgebren in den Darstellungskategorien) des n -fachen Tensorproduktes der orthogonalen und symplektischen Quantengruppen auf. Um auch für die Typ-B-Verallgemeinerungen entsprechende Interpretationen zu ermöglichen, muß das Konzept der Tensorategorie auf den B-Fall verallgemeinert werden. Dieser Epilog unternimmt einige Schritte in diese Richtung. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Begriffsbildung. Beweise werden nur skizziert oder ganz weggelassen, wenn die Aussage geometrisch plausibel ist.

Die Grundzüge der Theorie, die in diesem Anhang präsentiert wird, wurde in Diskussionen mit Herrn tom Dieck erarbeitet und dann unabhängig weiterentwickelt [9]. Ihre Wurzeln sind zum einen die schon früher von tom Dieck [7] vorgeschlagene Interpretation einer B-Kategorie als Modul über einer A-Kategorie, zum anderen die in [16] aus physikalischen Überlegungen definierten Strukturen.

Unsere Notationen für Tensorkategorien schließen möglichst dicht an Kassels Buch [20] an. Insbesondere ist $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$ der Reassoziations- und $c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ der Zopfmorphimus.

11.1 Modulpaare von Tensorkategorien

In diesem Abschnitt wird die Idee formalisiert, eine Tensorategorie auf einer anderen wirken zu lassen. Die zweite Kategorie wird damit zu einem Modul der Monoidstruktur der ersten.

76. Definition. *Sei \mathcal{B} eine beliebige Kategorie und \mathcal{A} eine Tensorategorie. Wir sagen, daß \mathcal{A} auf \mathcal{B} (von rechts) wirkt, wenn es einen Funktor $*$: $\mathcal{B} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ gibt, so daß die folgenden Axiome erfüllt sind.*

1. Die folgende Gleichung gilt, wann immer beide Seiten definiert sind.

$$(f * g)(f' * g') = (ff') * (gg') \quad (136)$$

2. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $\lambda \in \text{Nat}(*(\text{Id} \times \otimes), *(* \times \text{Id}))$, d.h. $\lambda_{Y, X_1, X_2} : Y * X_1 \otimes X_2 \rightarrow Y * X_1 * X_2$, so daß folgendes Pentagondiagramm für alle Objekte $Y \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, $X_i \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Y * (X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 & \xrightarrow{\text{id}_Y * a_{X_1, X_2, X_3}} & Y * X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3) \\ \downarrow \lambda_{Y, X_1 \otimes X_2, X_3} & & \lambda_{Y, X_1, X_2 \otimes X_3} \downarrow \\ Y * (X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 & \xrightarrow{\lambda_{Y, X_1, X_2} * \text{id}_{X_3}} & Y * X_1 * X_2 \otimes X_3 \\ & & \lambda_{Y * X_1, X_2 \otimes X_3} \downarrow \\ Y * (X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 & & Y * X_1 * X_2 * X_3 \end{array} \quad (137)$$

3. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $\rho_Y : Y * 1 \rightarrow Y$, so daß

$$\begin{array}{ccc} Y * 1 \otimes X & \xrightarrow{\lambda_{Y, 1, X}} & Y * 1 * X \\ \downarrow \text{id}_Y * l_X & & \rho_Y * \text{id}_X \downarrow \\ Y * X & \xrightarrow{\text{id}_Y * X} & Y * X \end{array} \quad (138)$$

Hier bezeichnet 1 das Einsobjekt in \mathcal{A} und $l_X : 1 \otimes X \rightarrow X$ ist sein Kompatibilitätsmorphismus \mathcal{A} .

Das Paar $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ (zusammen mit dem Funktor $*$) heißt Modulpaar. Wir sagen auch, \mathcal{A} wirke auf \mathcal{B} .

77. Beispiele. 1. Jeder Tensorfunktors $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen Tensor kategorien macht $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ zu einem Modulpaar durch die Definition $X * Y := X \otimes F(Y)$, $\lambda_{X, Y_1, Y_2} := a_{X, F(Y_1), F(Y_2)}^{-1}$. Insbesondere wirkt jede Tensor kategorie auf sich selbst.

2. Sei \mathcal{A} eine Kategorie von Bimoduln über einem Ring R . Diese Kategorie wirkt auf der Kategorie \mathcal{B} der R -Rechtsmoduln. Auch dies ist ein Sonderfall des ersten Beispiels. Man wähle für F den Vergißfunktors.

3. Sei \mathcal{A} eine Gruppe, die als Kategorie betrachtet wird: Die Objekte sind die Gruppenelemente, das Tensorprodukt ist Gruppenmultiplikation. Die Endomorphismenräume sind alle isomorph zu einem Ring R . Zwischen verschiedenen Elementen gibt es nur $0 \in R$ als trivialen Morphismus. \mathcal{A} wirke auf einer Menge \mathcal{B} , die wir in ähnlicher Weise zu einer Kategorie machen. Dann bilden \mathcal{A} und \mathcal{B} ein Modulpaar.

Weitere Beispiele werden später gegeben.

78. Definition. Das Modulpaar $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ heißt strikt, falls \mathcal{A} eine strikte Kategorie ist, und falls für alle Objekte gilt: $Y * X_1 * X_2 = Y * X_1 \otimes X_2$, $\lambda_{Y, X_1, X_2} = \text{id}_{Y * X_1 * X_2}$ und $\rho_Y = \text{id}_Y$.

79. Definition. Seien $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ und $(\mathcal{B}', \mathcal{A}')$ zwei Modulpaare. Ein Funktors zwischen $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ und $(\mathcal{B}', \mathcal{A}')$ besteht aus folgenden Daten:

1. Ein Funktors $F_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$
2. Ein Tensorfunktors $F_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ mit funktoriellen Isomorphismen φ_0, φ_2 definiert wie in [20][XI.4.1].

3. Natürliche Isomorphismen $\omega_{X,Y} : F_{\mathcal{B}}(X * Y) \rightarrow F_{\mathcal{B}}(X) * F_{\mathcal{A}}(Y)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
F_{\mathcal{B}}(Y * X_1 \otimes X_2) & \xrightarrow{\lambda_{Y, X_1, X_2}} & F_{\mathcal{B}}(Y * X_1 * X_2) \\
\downarrow \omega_{Y, X_1 \otimes X_2} & & \omega_{Y * X_1, X_2} \downarrow \\
F_{\mathcal{B}}(Y) * F_{\mathcal{A}}(X_1 \otimes X_2) & & F_{\mathcal{B}}(Y * X_1) * F_{\mathcal{A}}(X_2) \\
\downarrow \text{id} * \varphi_2(X_1, X_2)^{-1} & & \omega_{Y, X_1} * \text{id}_{F_{\mathcal{A}}(X_2)} \downarrow \\
F_{\mathcal{B}}(Y) * F_{\mathcal{A}}(X_1) \otimes F_{\mathcal{A}}(X_2) & \xrightarrow{\lambda'_{F_{\mathcal{B}}(Y), F_{\mathcal{A}}(X_1), F_{\mathcal{A}}(X_2)}} & F_{\mathcal{B}}(Y) * F_{\mathcal{A}}(X_1) * F_{\mathcal{A}}(X_2)
\end{array} \quad (139)$$

4. Es kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
F_{\mathcal{B}}(Y * 1) & \xrightarrow{F_{\mathcal{B}}(\rho_Y)} & F_{\mathcal{B}}(Y) \\
\downarrow \omega_{Y, 1} & & \rho'_{F_{\mathcal{B}}(Y)} \uparrow \\
F_{\mathcal{B}}(Y) * F_{\mathcal{A}}(1) & \xrightarrow{\text{id} * \varphi_0^{-1}} & F_{\mathcal{B}}(Y) * 1
\end{array} \quad (140)$$

Tensor kategorien können mittels eines Verfahrens von MacLane strikt gemacht werden. Ein ähnliches Resultat gilt auch für Modulpaare:

80. Satz. Jedes Modulpaar $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ ist äquivalent zu einem strikten Modulpaar $(\mathcal{B}^{\text{str}}, \mathcal{A}^{\text{str}})$.

Beweis: Der Beweis ist eine Erweiterung von MacLanes Beweis: Die Objekte von \mathcal{B}^{str} sind definitionsgemäß Tupel bestehend aus einem Objekt aus \mathcal{B} und beliebig vielen aus \mathcal{A} , d.h.

$$\begin{aligned}
\text{Obj}(\mathcal{B}^{\text{str}}) &:= \{(Y, X_1, \dots, X_k) \mid Y \in \text{Obj}(\mathcal{B}), X_i \in \text{Obj}(\mathcal{A}), k \in \mathbb{N}_0\} \\
\text{Obj}(\mathcal{A}^{\text{str}}) &:= \{(X_1, \dots, X_k) \mid X_i \in \text{Obj}(\mathcal{A}), k \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

Der Äquivalenzfunktorkomplex ist auf Objekten definiert als

$$F_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\text{str}} \rightarrow \mathcal{A}, (X_1, \dots, X_k) \mapsto X_1 \otimes (X_2 \otimes (\dots))$$

und

$$F_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}^{\text{str}} \rightarrow \mathcal{B}, (Y, X_1, \dots, X_k) \mapsto Y * X_1 * \dots * X_k.$$

Die Morphismenräume werden definiert durch

$$\begin{aligned}
\text{Mor}_{\mathcal{A}}^{\text{str}}(S_1, S_2) &:= \text{Mor}_{\mathcal{A}}(F_{\mathcal{A}}(S_1), F_{\mathcal{A}}(S_2)) \\
\text{Mor}_{\mathcal{B}}^{\text{str}}(S_1, S_2) &:= \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F_{\mathcal{B}}(S_1), F_{\mathcal{B}}(S_2))
\end{aligned}$$

Die Funktoren $F_{\mathcal{B}}, F_{\mathcal{A}}$ sind wesentlich treu und voll treu (essentially faithful und fully faithful). Also handelt es sich bei ihnen um Äquivalenzen von Kategorien. Ein Rechtsinverses ist gegeben durch $Y \mapsto (Y)$.

Tensorprodukte und die Wirkung werden durch das Anhängen von Tupeln gegeben. Es müssen noch die natürlichen Isomorphismen $\omega_{S, S'} : F_{\mathcal{B}}(S * S') \rightarrow F_{\mathcal{B}}(S) * F_{\mathcal{A}}(S')$ definiert werden. Das geschieht durch Induktion über die Länge von S' . Man setzt $\omega_{S, ()} := \rho_{F_{\mathcal{B}}(S)}^{-1}, \omega_{S, (X)} := \text{id}, \omega_{S, (X) \otimes S'} := \lambda_{F_{\mathcal{B}}(S), X, F_{\mathcal{A}}(S')}^{-1} \omega_{S * (X), S'}$. Die folgende Gleichung liefert die Grundlage zum Beweis von (139).

$$\lambda_{F_{\mathcal{B}}(S), F_{\mathcal{A}}(S'), F_{\mathcal{A}}(S'')} (\text{id}_{F_{\mathcal{B}}(S)} * \varphi_2(S', S'')^{-1}) \omega_{S, S' \otimes S''} = (\omega_{S, S'} * \text{id}_{F_{\mathcal{A}}(S'')}) \omega_{S * S', S''}$$

Beweis durch Induktion nach der Länge von S' . \square

Die Striktifizierung vereinfacht wesentlich die Aufgabe, Modulpaare durch Generatoren und Relationen zu beschreiben (analog zu [20][XII.1]). Wir starten mit einem strikten Modulpaar $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ und zeichnen eine Menge \mathcal{F} von \mathcal{B} -Morphismen aus. Sie werden benutzt, um formale Worte rekursiv zu definieren: Alle Worte der Länge 1 sind von der Form $[f]$ mit $f \in \mathcal{F}$ oder von der Form $[\text{id}_Y], Y \in \text{Obj}(\mathcal{B})$. Falls a, b Wörter der Länge $\leq n$ sind, und g ein Morphismus aus \mathcal{A} ist, dann sind

$a * g$ und ab Worte der Länge $n+1$. Jedes Wort definiert einen Morphismus aus \mathcal{B} durch die Regeln: $[f] := f, \bar{a} * \bar{g} := \bar{a} * g, \bar{a}\bar{b} := \bar{a} \circ \bar{b}$. Die Menge der Teilwörter eines Wortes ist ebenfalls rekursiv definiert: $\text{sub}([f]) := \{[f]\}$, $\text{sub}(a * b) := \{b\} \cup \text{sub}(a)$, $\text{sub}(ab) := \text{sub}(a) \cup \text{sub}(b)$. Zwei Wörter a, b heißen äquivalent $a \sim b$, genau dann, wenn es eine Sequenz von Wörtern a_i gibt mit $a_0 = a, a_k = b$, so daß a_{i+1} aus a_i erhalten wird durch Anwendung einer der folgenden Transformationen auf ein Teilwort. $(ab)c \sim a(bc)$, $[\text{id}]a \sim a, a[\text{id}] \sim a, a * \text{id}_1 \sim a, [\text{id}_{Y * X}] \sim [\text{id}_Y] * \text{id}_X, a * gg' \sim a * g * g', (a * g)(a' * g') \sim (aa') * (gg')$. Es folgt $(a * \text{id}_{b(g)})([\text{id}_{s(\bar{a})}] * g) \sim ([\text{id}_{b(\bar{a})}] * g)(a * \text{id}_{s(g)})$ und $(a_1 * \text{id}) \cdots (a_k * \text{id}) \sim (a_1 \cdots a_k) * \text{id}$. Ein einfacher induktiver Beweis zeigt, daß jedes Wort äquivalent ist zu einem der Form $h_1 \cdots h_m$, wobei die h_i von der Form $[f] * \text{id}_X$ mit $f \in \mathcal{F}$ oder von der Form $[\text{id}_X] * g$ sind.

Das freie Modulpaar, das von \mathcal{F} erzeugt wird, ist das Paar $(\mathcal{M}(\mathcal{F}), \mathcal{A})$. Dabei hat $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ die selben Objekte wie \mathcal{B} , aber die Morphismenräume bestehen aus Äquivalenzklassen von Wörtern.

Weitere Relationen $\mathcal{R} = \{(r_i, r'_i) \mid i = 1..k\}$ können benutzt werden, einen anderen Äquivalenzbegriff $a \sim_{\mathcal{R}} b$ auf den Worten zu definieren. Man darf dann in einem Schritt zusätzlich ein Teilwort r_i durch r'_i ersetzen und umgekehrt. Man sagt, das Modulpaar $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ sei von \mathcal{F} erzeugt mit Relationen \mathcal{R} , falls jeder Morphismus aus \mathcal{B} als Bild eines Wortes erhalten werden kann und falls $a \sim_{\mathcal{R}} b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$.

11.2 Zylinderzopfung

81. Definition. Ein striktes Modulpaar $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ heißt zylindrisch gezopft, falls gilt:

1. $\text{Obj}(\mathcal{B}) = \text{Obj}(\mathcal{A})$ und $1 * X = X$
2. \mathcal{A} ist eine gezopfte Tensorategorie mit Zopfisomorphismus $c_{X,Y} \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X \otimes Y, Y \otimes X)$
3. Zu jedem Objekt X gibt es einen Isomorphismus $t_X \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}(X, X)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$c_{Y,X}(t_Y \otimes \text{id}_X)c_{X,Y}(t_X \otimes \text{id}_Y) = (t_X \otimes \text{id}_Y)c_{Y,X}(t_Y \otimes \text{id}_X)c_{X,Y} = t_{X \otimes Y} \quad (141)$$

$$ft_X = t_Y f \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \quad (142)$$

4. Falls \mathcal{A} eine Dualität besitzt (starr ist), soll ferner gelten:

$$(t_X \otimes \text{id}_{X^*})b_X = c_{X^*,X^*}^{-1}(t_{X^*}^{-1} \otimes \text{id}_X)c_{X^*,X}^{-1}b_X \quad (143)$$

$$d_X(t_X^{*-1} \otimes \text{id}_X) = d_X c_{X,X^*}(t_X \otimes \text{id}_{X^*})c_{X^*,X} \quad (144)$$

t heißt die Zylinderzopfung. In einer unpräzisen Sprechweise sagen wir auch, \mathcal{B} sei eine Zylinderzopf-Tensorategorie (ZTK).

Aus der Striktheit und den Forderungen des ersten Punktes folgt $X * Y = 1 * X * Y = 1 * X \otimes Y = X \otimes Y$. Ferner bemerke man, daß (143), (144) umgeschrieben werden kann zu

$$t_{X \otimes X^*} b_X = b_X \quad d_X t_{X^* \otimes X} = d_X$$

82. Bemerkung. 1. Der Morphismenraum $\text{End}_{\mathcal{B}}(X^{\otimes n})$ trägt in natürlicher Weise eine Darstellung der Zopfgruppe ZB_n .

2. Falls es m verschiedene Morphismen $t^{(1)}, \dots, t^{(m)}$ gibt, so daß jeder einzelne davon und auch jedes Produkt der Art $t^{(i_1)} \cdots t^{(i_s)}, i_1 < \cdots < i_s$ das Paar $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ zu einem zylindrisch gezopften Modulpaar machen, dann hat man in ähnlicher Weise eine Darstellung der Zopfgruppe eines Henkelkörpers des Geschlechtes m [29].
3. Es sei $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ ein Rechtsmodulpaar und $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein Linksmodulpaar, und beide Paare seien zylindrisch gezopft. Diese Situation liefert Darstellungen der Zopfgruppe des affinen Wurzelsystems mit Coxeter-Diagramm $\bullet = \bullet - \bullet - \cdots - \bullet - \bullet = \bullet$.

Das fundamentale geometrische Beispiel der Bandschlingeln im Zylinder wird im nächsten Abschnitt untersucht. Wir geben hier einige einfachere Beispiele.

- 83. Beispiele.**
1. Eine Bandkategorie \mathcal{A} , die auf sich selbst wirkt, ist trivialerweise ein zylindrisch gezopftes Modulpaar qua Bandtwist $t_X = \theta_X$.
 2. Eine abelsche Gruppe G mit einer Bilinearform $c : G \times G \rightarrow K^*$, die Werte in den Einheiten eines kommutativen Ringes K annimmt, kann als gezopfte Tensorcategory \mathcal{A} interpretiert werden [32][p. 29]. Das Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ ist dann zylindrisch gezopft, wenn es eine Abbildung $t : G \rightarrow K^*$ mit $t(gg') = c(g, g')c(g', g)t(g)t(g')$ gibt. Falls c symmetrisch ist, ist t also ein Charakter der Gruppe.
 3. Sei \mathcal{A} eine Tensorcategory und $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ ein Objekt darin. Diese Kategorie wirkt auf \mathcal{B} , die definitionsgemäß dieselben Objekte hat, aber als Morphismenräume $\text{Mor}_{\mathcal{B}}(X_1, X_2) := \text{Mor}(X \otimes X_1, X \otimes X_2)$. Die Wirkung ist durch das Tensorprodukt gegeben. Die Zylinderzopfung $t_Y := c_{Y, X}c_{X, Y}$ macht dann \mathcal{B} zu einer ZTK.

Weitere Beispiele können [16] entnommen werden. Der dort verwendete Begriff einer eingeschränkten Coxeter-B-Tensorcategory ist äquivalent zu dem hier verwendeten eines zylindrisch gezopften Modulpaares. In [16] wird auch die Dualität zu Zylinder-Zopfstrukturen auf Hopfalgebren besprochen.

11.3 Bandschlingel im Zylinder

Das fundamentale Beispiel eines zylindrisch gezopften Modulpaares ist das Paar $(\text{CylRib}, \text{Rib})$. Dabei ist Rib Turaevs Kategorie von Bandschlingeln im \mathbb{R}^3 und CylRib ist die Kategorie der Bandschlingel im Zylinder. Diese Kategorie ist ähnlich definiert wie auch Rib. Die Bänder erstrecken sich allerdings im Raum $(\mathbb{R}^2 - (0, 0)) \times [0, 1]$. Wir hatten diese Kategorie bereits im Haupttext verwendet und dort ihre Morphismenräume als $C_{n,m}$ bezeichnet. Die Wirkung einer Verschlingung f aus Rib auf ein g aus CylRib wird dabei durch Nebeneinandersetzen gegeben.

Wie im gewöhnlichen Fall können Schlingel mit den Objekten einer Tensorcategory \mathcal{A} gefärbt werden. Es ergibt sich $\text{CylRib}_{\mathcal{A}}$ in vollständiger Analogie zu $\text{Rib}_{\mathcal{A}}$ [32].

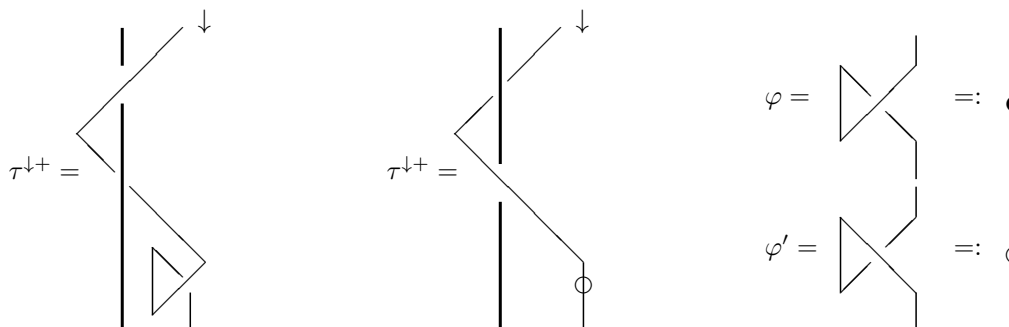


Abbildung 9: Die grundlegenden Generatoren von CylRib und eine neue Notation für Bandtwists.

Wir benutzen weitestgehend Turaevs Notation für die Generatoren von Rib. Die Generatoren von CylRib sind $\tau^{\downarrow\pm}\tau^{\uparrow\pm}$. Bild 9 zeigt $\tau^{\downarrow+}, \tau^{\downarrow-}$. Der Pfeil zeigt die Orientierung an. Hier stehen einfache Linien für Bänder, die flach in der Zeichenebene liegen. Verdrillung des Bandes werden wie in Bild 9 durch Punkte angezeigt.

84. Satz. Die folgenden Relationen gelten in CylRib:

$$\tau^{\downarrow+} = \tau^{\downarrow-}{}^{-1} \tag{145}$$

$$\tau^{\uparrow+} = \tau^{\uparrow-}^{-1} \quad (146)$$

$$\tau^{\downarrow-} = (\cap \otimes \downarrow)(\varphi'^{\uparrow} \otimes \downarrow \otimes \downarrow)(\tau^{\uparrow+} \otimes X^-)(\cup^- \otimes \downarrow) \quad (147)$$

$$\tau^{\uparrow-} = (\cap^- \otimes \uparrow)(\varphi' \otimes \uparrow \otimes \uparrow)(\tau^{\downarrow+} \otimes T^-)(\cup \otimes \uparrow) \quad (148)$$

$$(\tau^{\downarrow+} \otimes \downarrow)X^+(\tau^{\downarrow+} \otimes \downarrow)X^+ = X^+(\tau^{\downarrow+} \otimes \downarrow)X^+(\tau^{\downarrow+} \otimes \downarrow) \quad (149)$$

$$(\tau^{\uparrow+} \otimes \uparrow)T^+(\tau^{\uparrow+} \otimes \uparrow)T^+ = T^+(\tau^{\uparrow+} \otimes \uparrow)T^+(\tau^{\uparrow+} \otimes \uparrow) \quad (150)$$

$$(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow)Y^-(\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow)Z^- = Y^-(\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow)Z^-(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow) \quad (151)$$

$$(\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow)Z^-(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow)Y^- = Z^-(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow)Y^-(\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow) \quad (152)$$

$$(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow)\cup = Y^+(\tau^{\uparrow-}\varphi^{\uparrow} \otimes \downarrow)\cup^- \quad (153)$$

$$\cap(\tau^{\uparrow-} \otimes \downarrow) = \cap^-(\tau^{\downarrow+}\varphi' \otimes \downarrow)Y^- \quad (154)$$

$$(\uparrow \otimes \varphi)\cup^- = (\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow)Z^-(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow)\cup \quad (155)$$

$$\cap(\uparrow \otimes \varphi) = \cap^-(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow)Y^-(\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow) \quad (156)$$

$$(\downarrow \otimes \varphi^{\uparrow})\cup = (\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow)Y^-(\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow)\cup^- \quad (157)$$

$$\cap^-(\downarrow \otimes \varphi^{\uparrow}) = \cap^-(\tau^{\uparrow+} \otimes \downarrow)Z^-(\tau^{\downarrow+} \otimes \uparrow) \quad (158)$$

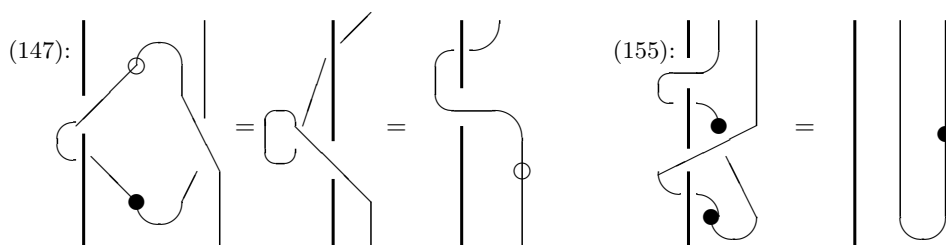


Abbildung 10: Generatoren von CylRib und Abkürzungen für Bandverdrillungen

Nach Hinzeichnen dieser Relationen sind die Beweise augenfällig. Einige Kostproben gibt Bild 10. Wegen (147) und (148) benötigt man lediglich $\tau^{\downarrow+}, \tau^{\uparrow+}$ als Generatoren. Das reduziert die Zahl der Relationen, denn (147) und (148) verwandeln (153) und (154) in Beziehungen, die nur Typ-A-Schlingen involvieren.

85. Satz. Die Menge $\mathcal{F} := \{\tau^{\downarrow+}, \tau^{\uparrow+}\}$ erzeugt das Modulpaar $(\text{CylRib}, \text{Rib})$ mit den Relationen (149)-(152), (155)-(158).

Beweis: Zylinderschlingen können als gewöhnliche Schlingen betrachtet werden, indem die Zylinderachse als zusätzliche, starre Komponente eingeführt wird. Die Frage der Äquivalenz von Diagrammen von Zylinderschlingen kann daher durch die Betrachtung der Äquivalenz von gewöhnlichen Schlingen entschieden werden. Es fehlt dazu aber eine Methode, Zylinderschlingen systematisch so zu deformieren, daß sie aus den Generatoren aufgebaut sind. Eine solche Methode (es gibt noch andere) ist der R-Prozeß (R wie Radar). Er verwendet Diagramme von Zylinderschlingen, die in die horizontale Ebene projiziert sind. Das Bild der Achse ist dann lediglich ein Punkt. Damit die Anfangs- und Endpunkte von Schlingen in den oberen und unteren horizontalen Ebenen nicht aufeinander projizieren, bewegen wir die oberen um ϵ in Richtung der zweiten Koordinate und die unteren um $-\epsilon$. Bei der Multiplikation von Schlingen müssen die Enden dann durch horizontale, in der Verklebungsebene liegende Bänder der Länge 2ϵ verbunden werden. Bild 11 zeigt ein Beispiel eines solchen Diagrammes. Wir nennen sie horizontale Diagramme in Unterscheidung von den bisher verwendeten Standarddiagrammen.

In einer solchen horizontalen Projektion wählen wir jetzt einen Strahl, der sich vom Punkt der Zylinderachse in den linken Halbraum (erste Koordinate negativ) erstreckt, derart, daß er die Kurven des Diagramms nur transversal trifft und Kreuzungspunkte vermeidet. Von diesem Strahl ausgehend wird das Diagramm, wie in Bild 12 gezeigt, verschoben, bis sich alles Nichttriviale im

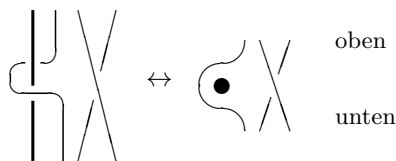


Abbildung 11: Beispiel einer Projektion in die horizontale Ebene

rechten Halbraum tummelt. Dem Ergebnis dieses Prozesses kann ein Standard-Diagramm zugeordnet werden, indem die Bögen um die Zylinderachse von innen nach außen nacheinander von unten nach oben auf die Zylinderachse in dem Standarddiagramm übertragen werden. Diagramme, die sich durch eine Reidemeisterbewegung unterscheiden, die ober- oder unterhalb des Radarstrahls liegt, werden dabei offensichtlich in solche überführt, die wiederum durch eine derartige Transformation am verschobenen Ort verbunden sind. Es stellt sich also nur die Frage, wie das Ergebnis von der Wahl des Radarstrahls abhängt. Hier gibt es zwei relevante Möglichkeiten, die in Analogie zu Reidemeisterbewegungen der Typen II und III stehen und den Radarstrahl betreffen. Betrachten wir also in Analogie zu Bewegung III zwei Diagramme, die sich nur darin unterscheiden, daß der Radarstrahl einmal oberhalb, das andere mal unterhalb einer Kreuzung verläuft. Bild 13 zeigt Diagramme dieser beiden Fälle. Wir fordern dabei, daß der im rechten Halbraum konzentrierte Schlingel in einen Kasten eingeschperrt sei, der diagonal im Raum liege, so daß den Anschlüssen der Bänder in horizontaler und in vertikaler Projektion die gleiche Reihenfolge zukommt. Der Vergleich der beiden Diagramme auf der rechten Seite von Bild 13 liefert sofort die Vierzopfrelation. Eine ähnliche Überlegung im Falle eines Minus/Maximus, das unter- resp. oberhalb des Radarstrahls liegt, liefert die Extremumsbeziehung. Die orientierten Versionen sind gerade die Beziehungen (149)-(152), (155)-(158). \square

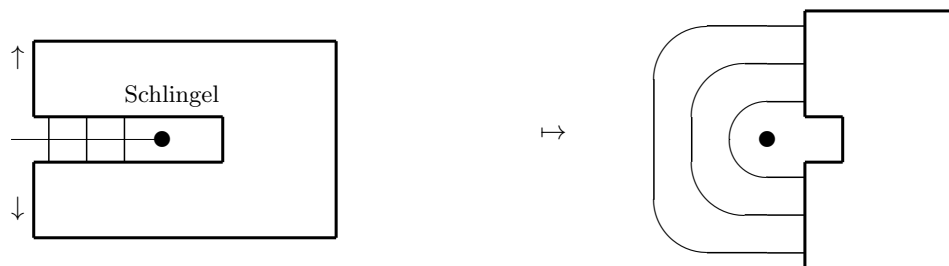


Abbildung 12: Deformation eines horizontalen Diagrammes: Links der Schlingel mit dem nach links gerichteten Radarstrahl, sowie den Pfeilen der Deformationsrichtung. Rechts das Ergebnis der Deformation

Zylinderbandschlingel können analog zu ihren Geschwistern in S^3 mit Morphismen einer ZTK eingefärbt werden, und es gilt folgender Satz:

86. Satz. *Es gibt einen eindeutigen Tensorfunktork zwischen strikten Modulpaaren $F : (\text{CylRib}_A, \text{Rib}_A) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{A})$, so daß F_A Turaevs Funktor ist, der funktorielle Morphismus ω trivial ist, und daß gilt:*

$$F_{\mathcal{B}}(\tau_X^{\downarrow\pm}) = t_X^{\pm 1} \tag{159}$$

$$F_{\mathcal{B}}(\tau_X^{\uparrow\pm}) = t_{X^*}^{\pm 1} \tag{160}$$

Beweis: Eindeutigkeit ist klar, da $F_{\mathcal{B}}$ auf den Generatoren definiert ist. Es bleibt die Verträglichkeit mit den Relationen zu zeigen. Das geschieht durch naheliegende graphische Beweise,

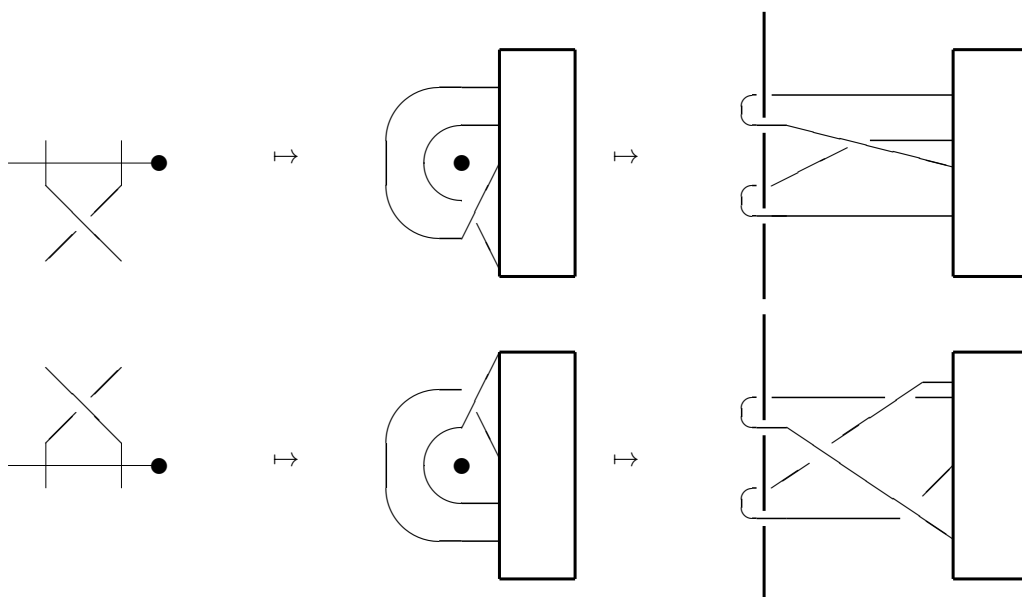


Abbildung 13: Die Bilder der oberen und unteren Reihe unterscheiden sich nur darin, daß der Radarstrahl einmal oberhalb, das andere mal unterhalb einer Kreuzung verläuft. Die irrelevanten Teile der Schlingel werden jeweils weggelassen. Der zweite Übergang ordnet dem horizontalen Diagramm ein Standarddiagramm zu. Nach der Konvention im Text wird dabei der innere Bogen unten plaziert. Da nach der Wahl der Lage des Restschlingels die Anschlußstellen die gleiche Reihenfolge besitzen, liegt fest, wie die weitere Verdrahtung erfolgen muß: Im oberen Bild liegt etwa die innere Schlinge um die Achse unten, so daß die einzige Kreuzung im Standarddiagramm nur wie gezeigt ausfallen kann.

die hier aufzuschreiben aber zuviel Platz beanspruchen würde. \square

11.4 Zylinderzopfung mit Punkten

Die bisher definierten zylindrisch gezopfene Modulpaare (Zylinderzopf-Tensorkategorien) decken noch nicht alle Anwendungsfälle ab. Es fehlt noch die Möglichkeit, den elementaren Schlingel e_0 aus $V\mathcal{B}_n^k$ b.z.w. aus der Typ-B-Temperley-Lieb-Algebra zu behandeln. In diesem Abschnitt werden Punktmorphismen definiert, die das geforderte leisten. Ihre Definition ist im Rahmen der Begrifflichkeit der Modulpaare einfach, überfordert aber den Apparat aus [16].

87. Definition. Eine Punktstruktur auf einer Zylinderzopf-Tensorkategorie $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ mit starrer (also mit einer Dualität versehenen) Kategorie \mathcal{A} besteht aus Punkt-Morphismen $b^0_X \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}(1, X)$ und Kopunkt-Morphismen $d^0_X \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}(X, 1)$ für alle Objekte, so daß die folgenden Axiome gelten:

$$d^0_Y f = d^0_X \quad f b^0_X = b^0_Y \quad \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \quad (161)$$

$$d_X(b^0_{X^*} \otimes \text{id}_X) = d^0_X \quad (162)$$

$$(d^0_X \otimes \text{id}_{X^*})b_X = b^0_{X^*} \quad (163)$$

$$b^0_{X \otimes Y} = (b^0_X \otimes \text{id}_Y)b^0_Y \quad (164)$$

$$d^0_{X \otimes Y} = d^0_Y(d^0_X \otimes \text{id}_Y) \quad (165)$$

$$b^0_X = t_X b^0_X \quad (166)$$

$$d^0_X = d^0_X t_X \quad (167)$$

$$(t_Y \otimes \text{id}_X)c_{X,Y}(b^0_X \otimes \text{id}_Y) = c_{Y,X}^{-1}(b^0_X \otimes \text{id}_Y)t_Y \quad (168)$$

$$t_Y(d^0_X \otimes \text{id}_Y) = d^0_X c_{Y,X}(t_Y \otimes \text{id}_X) c_{X,Y} \quad (169)$$

Einfache Konsequenzen sind:

$$d^0_{X^*} = d_X c_{X,X^*}(\theta_X b^0_X \otimes \text{id}_{X^*}) \quad (170)$$

$$b^0_{X^*} = (d^0_{X^*} \otimes \text{id}_X)(\text{id}_{X^*} \otimes \theta_X^{-1}) c_{X^*,X}^{-1} b_X \quad (171)$$

Eine Punktstruktur ist das B-Analogon einer Dualität in einer Tensor-kategorie.

$(\text{CylRib}, \text{Rib})$ besitzt keine Punktstruktur. Wir definieren $(\text{PCylRib}, \text{Rib})$ als Erweiterung in der es erlaubt ist, daß Bänder auf der Zylinderachse enden. Bild 14 zeigt dann die Punkt- und Kopunkt-Morphismen dieser Kategorie. Man beachte, daß Punkte, also die Enden von Bändern auf der Zylinderachse, nicht aneinander vorbeigeschoben werden können. Es gibt also keine Möglichkeit, das rechte Diagramm von Bild 14 zu vereinfachen.



Abbildung 14: Punkt- und Kopunkt-Morphismen in PCylRib

11.5 Skeinrelationen

In der Kategorie PCylRib können Skeinrelationen gefordert werden, die die von Kauffman verallgemeinern.

Wir setzen:

$$c - c^{-1} = \delta(1 - bd) \quad (172)$$

$$cb = \lambda b \quad dc = \lambda d \quad (173)$$

$$db = A_0 \quad (174)$$

$$t^{-1} = \alpha t + \beta + \gamma b^0 d^0 \quad (175)$$

$$d^0 b^0 = x_0 \quad (176)$$

$$db^0 d^0 b = x'_0 \quad (177)$$

$$d(t \otimes \text{id})b = A_1 \quad (178)$$

$$d(t^{-1} \otimes \text{id})b = A_{-1} \quad (179)$$

$$(d^0 \otimes \text{id})c(b^0 \otimes \text{id}) = \epsilon + \mu t + \nu b^0 d^0 \quad (180)$$

Dabei sind $\delta, A_0, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, A_1, A_{-1}, x_0, x'_0, \epsilon, \mu, \nu$ Parameter. Die Skeinrelationen sind weitgehend selbsterklärend. (180) ist die kategorielle Fassung von (135). Die Endomorphismenalgebren von n sind volle Typ-B-Birman-Wenzl-Algebren.

Unter der Voraussetzung, daß die Annulatorideale der Generatoren verschwinden, können einige Beziehungen zwischen den Parametern abgeleitet werden. Zunächst folgt wie im Falle der A-Kategorie

$$A_0 \delta - \delta = \lambda - \lambda^{-1}$$

Weiter ist $d^0 = d^0 t^{-1} = \alpha d^0 + \beta d^0 + \gamma d^0 b^0 d^0 = (\alpha + \beta + \gamma x_0) d^0$. Also:

$$1 = \alpha + \beta + \gamma x_0$$

ähnlich gilt

$$A_{-1} = \alpha A_1 + \beta A_0 + \gamma x'_0$$

Durch Multiplikation von $\lambda^{-1}(t^{-1} \otimes \text{id})b = c(t \otimes \text{id})b$ mit d folgt

$$A_1 \lambda^2 = A_{-1}$$

Wir haben $\gamma x_0 b^0 d^0 = \gamma b^0 d^0 b^0 d^0 = b^0 d^0 (t^{-1} - \alpha t - \beta) = b^0 d^0 (1 - \alpha - \beta)$ und daraus

$$\gamma x_0 = 1 - \alpha - \beta$$

Ähnlich folgt aus $x'_0 = db^0 d^0 b = \gamma^{-1}(d(t^{-1} \otimes 1)b - \alpha d(t \otimes 1)b - \beta db)$:

$$\gamma x'_0 = A_{-1} - \alpha A_1 - \beta A_0$$

Zuletzt tensorieren wir (175) mit c und multiplizieren von links mit $d \otimes \text{id}$ und von rechts mit $b \otimes \text{id}$. Nach etwas Rechenarbeit ergibt sich dann eine Gleichung der Art (180) aus der abgelesen werden kann:

$$\begin{aligned} \nu &= -\alpha \lambda \\ \mu &= \gamma^{-1}(\alpha \delta - \alpha^2 \lambda + \lambda^{-1}) \\ \epsilon &= -\gamma^{-1}(\alpha \beta \lambda + \alpha \delta A_1 + \beta \lambda^{-1}) \end{aligned}$$

Von den 13 eingeführten Parametern bleiben also 4 übrig. Die topologisch motivierte Forderung $x_0 = x'_0$ reduziert die Zahl der freien Parameter weiter auf 3. Die volle Typ-B Birman-Wenzl Algebra hängt, wie wir gesehen haben, ebenfalls von 4 b.z.w. 3 Parametern ab. Wir haben also alle Relationen zwischen den Parametern gefunden.

Verschlingungen im Volltorus sind Endomorphismen des 0-Objektes. Durch Anwendung von Kauffmans Theorie [21] können die gewöhnlichen Zopfungen c eliminiert werden. Es bleiben dann nur noch Bänder, die auf der Zylinderachse enden und/oder diese umschlingen. Mit (180) können diese auseinandergezogen und dann einzeln vollständig berechnet werden. Damit hat man – bis auf die Verdrillungsnormalisierung – das zur vollen Typ-B-BMW-Algebra gehörige Kauffman-Polynom ausgerechnet.

12 Appendix A: Turaevs Struktursatz des Kauffman-Skeinmoduls des Volltorus

Der Kauffman-Skeinmodul des Volltorus ist frei. Dieses Theorem von Tuarev hatten wir verwendet, um zu zeigen, daß das Annulatorideal des Elementes $e_1 \cdots e_{2n-1} \in \mathcal{B}_{2n}^k$ über geeigneten Grundringen verschwindet. Leider ist kein Beweis des Theorems publiziert. Turaev hat in [31] ausführlich den HOMFLY-Skeinmodul des Volltorus behandelt und sich im Falle des Kauffman-Skeinmoduls auf die Formulierung des Ergebnisses und den Hinweis beschränkt, der Beweis gelinge 'by the same scheme'. In diesem Anhang wird eine Ausarbeitung des Beweises gegeben.

Wesentliches Beweishilfsmittel ist die Konstruktion einer Folge von Invarianten P_m von Verschlingungen im Volltorus, die spezielle Evaluationen des Kauffman-Polynoms verallgemeinern. Wir geben zunächst die Definition der Invarianten und beweisen ihre relevanten Eigenschaften. Danach wird Turaevs Theorem formuliert und bewiesen.

Ein anderer Beweis wurde von Hoste und Kidwell erarbeitet, aber ebenfalls nie publiziert. Eine sinngemäße Verallgemeinerungen sollte auch für Henkelkörper gelten. Torsionselemente entstehen aber, falls π_2 der 3-Mannigfaltigkeit nichttrivial ist [27].

Wie halten uns in Notation und Beweisstruktur möglichst eng an Tuarevs Vorgaben, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede deutlich werden zu lassen. Unterschiede ergeben sich an zwei Stellen: Zum einen müssen symmetrische Laurentpolynome anstelle gewöhnlicher Polynome verwendet werden. Zum anderen arbeiten wir von vornherein mit einem etwas anderen Grundring. Das erspart uns eine Ringlokalisierung bei der Anwendung des Theorems.

Darstellungs-Operatoren

In diesem Unterabschnitt werden Operatoren definiert, die in der Konstruktion der Invarianten elementaren Schlingen zugeordnet werden.

Dazu fixieren wir $m \in \mathbb{N}$ und verwenden Operatoren aus der Darstellungskategorie von $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}_{2m+1})$. Als Indexmenge dient dabei

$$I = \{-2m + 1, -2m + 3, \dots, -3, -1, 0, 1, 3, \dots, 2m - 1\} = I_- \cup \{0\} \cup I_+$$

Die Partition geschieht dabei nach dem Vorzeichen. Alle im weiteren auftretenden und nicht näher bestimmten Summationsvariablen seien aus I .

Als Grundring wird im folgenden ein Laurent-Ring über dem Körper der rationalen Funktionen über einer Wurzel aus q verwendet:

$$T_m := \mathbb{Q}(q^{1/2})[\{w_i^{\pm 1}\}_{i \in I_+}]$$

In diesem Ring setzen wir

$$\begin{aligned} w_0 &:= 1 \\ w_i &:= w_{-i}^{-1} \quad i \in I_- \end{aligned}$$

V sei der freie T_m -Modul mit Basis $\{v_i \mid i \in I\}$. Die folgenden Operatoren stammen aus der Darstellungskategorie der Quantengruppe $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}_{2m+1})$:

$$\begin{aligned} d &: T_m \rightarrow V \otimes V \\ &1 \mapsto \sum_{i \in I} q^{i/2} v_i \otimes v_{-i} \\ b &: v_i \otimes v_j \mapsto \delta_{i,-j} q^{i/2} \\ B &: V \otimes V \rightarrow V \otimes V \\ B &= \sum_{i \neq 0} (q f_{i,i} \otimes f_{i,i} + q^{-1} f_{i,-i} \otimes f_{-i,i}) + f_{0,0} \otimes f_{0,0} + \sum_{i \neq j, -j} f_{i,j} \otimes f_{j,i} + \\ &\quad (q - q^{-1}) \left(\sum_{i < j} f_{i,i} \otimes f_{j,j} - \sum_{j < -i} q^{\frac{i+j}{2}} f_{i,j} \otimes f_{-i,-j} \right) \end{aligned}$$

Dabei ist $f_{i,j}$ die Matrix, die an der Stelle (i, j) eine Eins und sonst überall Nullen hat.

Der folgende Operator ist kein Morphismus von $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}_{2m+1})$ -Moduln.

$$\Theta : V \rightarrow V \quad v_i \mapsto v_i w_i q^{-i}$$

88. Lemma. *Die oben definierten Operatoren erfüllen die folgenden Relationen:*

$$\begin{aligned} b(\Theta \otimes \Theta) &= b \\ (\Theta \otimes \Theta)d &= d \\ (\Theta \otimes \Theta)B &= B(\Theta \otimes \Theta) \\ bd &= \sum_{i \in I} q^i \\ bB &= q^{-2m} B \\ Bd &= q^{-2m} B \\ B - B^{-1} &= (q - q^{-1})(1 - db) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\Theta \otimes \Theta)d &= \sum_{i \in I} q^{i/2} (v_i w_i q^{-i}) \otimes (v_{-i} w_{-i} q^i) = d \\ b(\Theta \otimes \Theta)(v_i \otimes v_j) &= b(v_i w_i q^{-i} \otimes v_j w_j q^{-j}) \\ &= \delta_{i,-j} q^{i/2} w_i w_j q^{-i-j} = q^{i/2} \delta_{i,-j} = b(v_i \otimes v_j) \end{aligned}$$

Um die dritte Gleichung zu sehen, lassen wir zunächst B auf $v_i \otimes v_j$ wirken. Dabei verwenden wir die boolesche Heaviside-Funktion $H(b)$. Sie ist 0 oder 1 je nach Wahrheitswert ihres Argumentes.

$$\begin{aligned} B(v_i \otimes v_j) &= \delta_{i,j} q v_i \otimes v_j + \delta_{i,-j} q^{-1} v_j \otimes v_i + \delta_{i,0} \delta_{j,0} v_0 \otimes v_0 \\ &\quad + (1 - \delta_{i,j})(1 - \delta_{i,-j}) v_j \otimes v_i + H(i < j)(q - q^{-1}) v_i \otimes v_j \\ &\quad - (q - q^{-1}) \delta_{i,-j} \sum_{-s > i} q^{(s+i)/2} v_s \otimes v_{-s} \end{aligned}$$

Also ist mit $M_{i,j} := w_i w_j q^{-i-j} = M_{j,i}$, $M_{s,-s} = 1$:

$$\begin{aligned} (\Theta \otimes \Theta)B(v_i \otimes v_j) &= \delta_{i,j} q M_{i,j} v_i \otimes v_j + \delta_{i,-j} q^{-1} M_{i,j} v_j \otimes v_i + \delta_{i,0} \delta_{j,0} M_{i,j} v_0 \otimes v_0 \\ &\quad + (1 - \delta_{i,j})(1 - \delta_{i,-j}) M_{i,j} v_j \otimes v_i + H(i < j)(q - q^{-1}) M_{i,j} v_i \otimes v_j \\ &\quad - (q - q^{-1}) \delta_{i,-j} \sum_{-s > i} q^{(s+i)/2} v_s \otimes v_{-s} \end{aligned}$$

Es ist $(\Theta \otimes \Theta)(v_i \otimes v_j) = M_{i,j}(v_i \otimes v_j)$, d.h. $(\Theta \otimes \Theta)$ wirkt skalar auf $v_i \otimes v_j$, und $B(\Theta \otimes \Theta)(v_i \otimes v_j)$ ergibt ebenfalls den obigen Ausdruck.

Die vier letzten Gleichungen sind Standard-Resultate. \square

Konstruktion der Invarianten

Sei L eine Verschlingung im Volltorus. Wir ordnen ihr ein Element $P_m(L) \in T_m$ zu. Dazu sei der Torus auf die komplexe Ebene gelegt, so daß seine Projektion einen Annulus ergibt. Diesen vergrößern wir zu \mathbb{C}^* und projizieren L zu einem regulären Diagramm darin. Regularität soll dabei bedeuten, daß es nur endlich viele singuläre Punkte gibt. Singuläre Punkte sind: Stellen mit Tangente parallel zur reellen Achse, Kreuzungen und Schnittpunkte mit der negativen reellen Achse. Außerdem sollen Kreuzungen transversal sein. Weiter verlangen wir, daß die imaginären Werte der singulären Punkte paarweise verschieden sind. Dann können wir Hilfslinien parallel zur reellen Achse so einzeichnen, daß jeder der entstehenden Streifen entweder genau ein Extremum, genau eine Kreuzung oder alle Schnittpunkte des Diagramms mit der reellen Achse enthält. Wenn eine Hilfslinie das Diagramm n mal schneidet, wird ihr das n -fache Tensorprodukt von V zugeordnet. Dem Streifen zwischen zwei Hilfslinien wird dann ein Operator zugeordnet, der zwischen diesen Moduln vermittelt. Positiven Kreuzungen wird B , negativen Kreuzungen B^{-1} , Maxima d und Minima b zugeordnet. Dem Streifen, der die reelle Achse enthält, wird $\Theta^{\otimes s} \otimes \text{id}^{\otimes t}$ zugeordnet, wenn es s (t) Schnittpunkte des Diagrammes mit der negativen (positiven) reellen Achse gibt. Das Produkt aller Operatoren ist eine Abbildung $T_m \rightarrow T_m$. Ihren Wert auf 1 bezeichnen wir mit $P_m(L)$.

89. Lemma. P_m ist eine Invariante der regulären Isotopie im Volltorus. Für disjunkte Verschlingungen L, L' gilt $P_m(LL') = P_m(L)P_m(L')$. P_m verallgemeinert das Kauffman-Polynom in dem Sinne, daß es sich auf den (in Bild 3 definierten) Skeintupeln $(L_+, L_-, L_0, L_\infty)$ und (L_α, L_c) folgendermaßen verhält:

$$P_m(L_\alpha) = q^{-2m} P_m(L_c) \tag{181}$$

$$P_m(L_+) - P_m(L_-) = (q - q^{-1})(P_m(L_0) - P_m(L_\infty)) \tag{182}$$

Für den leeren Knoten \emptyset gilt $P_m(\emptyset) = 1$, und für den einfachen Knoten O , der eine Kreisscheibe berandet, gilt $P_m(O) = \sum_{i \in I} q^i$. Falls $m > n > 0$, gilt für den fundamentalen Knoten L_n , der die

Zylinderachse n mal positiv umrundet und dabei in der Höhe ansteigt:

$$P_m(L_n) = 1 + \sum_{j \neq 0} w_j^n + (1 - q^{-2}) \sum_{c=2}^n (1 - q^{-2})^{c-2} \sum_{j_1 < \dots < j_c} \sum_{l_1 + \dots + l_c = n, l_s > 0} \prod_{s=1}^c w_{j_s}^{l_s} q^{\delta_{0,j_s}(1-l_s)} \quad (183)$$

Beweis: Zum Beweis der ersten Aussage ist Invarianz unter den Reidemeister-Bewegungen II und III zu zeigen. Solange die Sonderrolle der negativen reellen Achse nicht zum Tragen kommt, ist die Invarianz eine bekannte Aussage. Betrachten wir also die negative Achse. Eine Typ II Bewegung bewegt ein Minimum (Maximum) über diese Achse. In dem Operatorprodukt tritt dann einmal $b(\Theta \otimes \Theta)$ (oder $(\Theta \otimes \Theta)d$) auf, das andere mal b (oder d). Bei der Typ III Bewegung einer Kreuzung über die Achse wird $(\Theta \otimes \Theta)B$ zugeordnet, solange die Kreuzung über der Achse ist, und $B(\Theta \otimes \Theta)$ danach. In allen Fällen folgt die Invarianz von P_m aus dem obigen Lemma.

Zur zweiten Aussage: Durch eine reguläre Isotopie kann erreicht werden, daß die beiden Komponenten in verschiedenen Kreisringen liegen. Die Behauptung folgt dann aus der tensoriellen Struktur.

Die Skeinrelationen ergeben sich unmittelbar aus den drei letzten Beziehungen des obigen Lemmas.

Es bleibt, die letzte Behauptung zu zeigen. Wir schreiben $B(v_i \otimes v_j) = \sum_{\mu, \nu} B_{i,j}^{\mu, \nu} v_\mu \otimes v_\nu$. Dann ist

$$P_m(L_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} w_{i_1} q^{-i_1} \dots w_{i_n} q^{-i_n} q^{i_1 + \dots + i_n} B_{i_1, i_2}^{i_1, i_2} B_{i_2, i_3}^{i_2, i_3} \dots B_{i_{n-1}, i_n}^{i_{n-1}, i_n}$$

Man erkennt, daß sich die q^{i_s} Faktoren gegenseitig wegheben. Es ist

$$B_{i,j}^{i,j} = \begin{cases} 1 & : i = j = 0 \\ q & : 0 \neq i = j \neq 0 \\ q - q^{-1} & : i < j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Deshalb kann die obige Summe auf $i_1 \leq \dots \leq i_n$ eingeschränkt werden. In einem derart sortierten n -Tupel zählen wir jetzt die Blöcke, in denen i jeweils konstant ist, d.h. wir setzen

$$c = c(i) := 1 + \#\{(i_s, i_{s+1}) \mid i_s < i_{s+1}\} \quad i = (i_1 \leq \dots \leq i_n)$$

Damit ergibt sich

$$P_m(L_n) = \sum_{c=1}^n (q - q^{-1})^{c-1} \sum_{j_1 < \dots < j_c} \sum_{l_1 + \dots + l_c = n, l_s > 0} q^{n-c} \prod_{s=1}^c w_{j_s}^{l_s} q^{\delta_{0,j_s}(1-l_s)}$$

Zum letzten Ausdruck: $n - c$ entspricht der Zahl der Stellen in einem Tupel $(i_1 \leq \dots \leq i_n)$ an denen Gleichheit gilt. Gemäß der obigen Formel für $B_{i,j}^{i,j}$ steuern die B dann einen Faktor q^{n-c} bei, falls $j_s \neq 0$. Falls $j_s = 0$, sind aus q^{n-c} die überzähligen Potenzen von q herauszudividieren. Das geschieht im letzten Faktor. Die im Lemma angegebene Form ergibt sich, indem aus der äußersten Summe der Summand zu $c = 1$ herausgenommen und explizit aufgeschrieben wird. \square

Symmetrische Polynome in Laurenttringen

Bevor der Beweis von Turaevs Theorem in Angriff genommen werden kann, müssen noch einige Tatsachen über symmetrische Laurentpolynome zusammengetragen werden. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Wir betrachten den Laurenttring $P := R[w_1^\pm, \dots, w_n^\pm]$ und denken ihn uns als Quotienten eines Polynomringes $\hat{P} = R[w_1, w_1', \dots, w_n, w_n']$, $P \cong \hat{P}/(w_i w_i' - 1)$. Ein Polynom

$p \in P$ heißt symmetrisch, wenn es ein symmetrisches Polynom $q \in \widehat{P}$ gibt, so daß p das Bild von q unter der Surjektion $\pi : \widehat{P} \rightarrow P, w_i \mapsto w_i, w_i' \mapsto w_i^{-1}$ ist. Symmetrische Laurentpolynome sind also nicht nur invariant unter Permutationen der Variablen, sondern auch unter ihrer Invertierung.

Es seien E_0, \dots, E_{2n} die elementarsymmetrischen Polynome in \widehat{P} . Ihre Bilder seien $e_i := \pi(E_i)$. Beispiele in zwei Variablen x, y sind:

$$\begin{aligned} e_0 = e_4 &= 1 \\ e_1 = e_3 &= x + y + x^{-1} + y^{-1} \\ e_2 &= 2 + xy + xy^{-1} + x^{-1}y + x^{-1}y^{-1} \end{aligned}$$

Darstellungssätze der Theorie der elementarsymmetrischen Funktionen übertragen sich sofort: Man nehme ein Urbild, wende den Satz an, und gehe mit π zurück nach P . Die algebraische Unabhängigkeit der E_i überträgt sich aber natürlich nicht. Vielmehr hat man folgende Relationen:

$$e_i = e_{2n-i}$$

Es gilt aber :

90. Lemma. *Die elementarsymmetrischen Polynome $e_i, i = 1, \dots, n$ sind im Laurenttring in n Variablen algebraisch unabhängig.*

Beweis: Sei $f \in R[y_1, \dots, y_n]$ ein nichttriviales Polynom, so daß $f(e_1, \dots, e_n) = 0$. Die (nichttrivialen) Monome von f können geschrieben werden in die Form $ay_1^{m_1-m_2}y_2^{m_2-m_3} \dots y_n^{m_n}$ mit $a \neq 0$. Die Tupel (m_1, \dots, m_n) nichttrivialer Monome werden lexikographisch geordnet (mit $x_i^s \leq x_i^t$, falls $s \geq t$). Sei jetzt (m_1, \dots, m_n) das erste Tupel in dieser Ordnung. In $f(e_1, \dots, e_n)$ gibt es dann genau einen Term $ax_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, und dieser verschwindet offensichtlich nicht. Widerspruch. \square

Der Beweis stimmt exakt mit dem Beweis der analogen Aussage im gewöhnlichen Fall (v.d. Waerden, Abschnitt 33) überein. Der Grund dafür ist, daß ein elementarsymmetrisches Polynom in einem Laurenttring geschrieben werden kann als $e_i = \epsilon_i + r$, wobei ϵ_i das gewöhnliche, S_n -invariante elementarsymmetrische Polynom in den Variablen x_1, \dots, x_n ist, und r ein Polynom, dessen Monome Totalgrad $< i$ haben.

Turaevs Theorem

Es sei im Anschluß an die Notation des Haupttextes $C_{0,0}(\Lambda)$ der Modul, der von den zahmen, ambienten Isotopieklassen von Bandverschlingungen im Volltorus über dem Grundring $\Lambda := \mathbb{Z}[\lambda^\pm, q^\pm]$ frei erzeugt wird, und \mathcal{T} bezeichne seinen Quotienten nach den Skeinrelationen des Kauffmanpolynoms (Bild 3 links). Turaev arbeitete über dem Grundring $\mathbb{Z}[\lambda^\pm, \delta^\pm]$. Die Formulierung des Theorems ist in beiden Fällen gleich:

91. Satz. $\mathcal{T} \cong \Lambda[A_1, A_2, \dots]$

\mathcal{T} ist selbst ein kommutativer Ring und Lemma 89 sagt aus, daß P_m als Ringhomomorphismus aufgefaßt werden kann:

$$\begin{aligned} P_m &: \mathcal{T} \rightarrow T_m \\ g(\lambda, q)[L] &\mapsto g(q^{-2m}, q)P_m(L) \end{aligned} \tag{184}$$

Dabei ist g ein Laurentpolynom und $[L]$ bezeichnet die Isotopie-Äquivalenzklasse der Verschlingung L . Wir zeigen jetzt, daß die $[L_n]$ in \mathcal{T} algebraisch unabhängig sind und also mit freien Variablen A_n identifiziert werden können. Dies ist die für uns relevante Aussage des Theorems. Die zweite Aussage, daß sich nämlich jede Verschlingung durch die Skeinrelationen auf Linearkombinationen von Produkten dieser elementaren Verschlingungen reduzieren läßt, folgt aus den algebraischen Überlegungen im Haupttext oder alternativ aus der Anwendung von Kauffmans Methode.

Nehmen wir also an, es gäbe ein nichttriviales Polynom f in N Variablen über Λ , so daß $0 = f([L_1], \dots, [L_N])$. Der Ringwechsel aus (184) bildet dann für unendlich viele m zumindest

einen Koeffizienten dieses Polynoms auf ein nichtverschwindendes Element ab. Es reicht also, die algebraische Unabhängigkeit der $P_m(L_n)$ für geeignet hohe m (konkret: $m > N \geq n$) zu zeigen.

Aus Lemma 89 haben wir die Darstellung

$$P_m(L_n) = 1 + \sum_{j \neq 0} w_j^n + (1 - q^{-2})R_n$$

mit einem symmetrischen Laurentpolynom R_n vom Grade n . Bekannte Darstellungssätze der Theorie der symmetrischen Polynome (u.a. [25] [(2.11')]) liefern dann

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq 0} w_j^n &= c_n e_n + \psi_n \quad \text{mit} \quad 0 \neq c_n \in \mathbb{Z}, \quad \psi_n \in \mathbb{Q}(q^{1/2})[e_1, \dots, e_{n-1}] \\ R_n &= d_n e_n + \phi_n \quad \text{mit} \quad d_n \in \mathbb{Z}, \quad \phi_n \in \mathbb{Q}(q^{1/2})[e_1, \dots, e_{n-1}] \\ P_m(L_n) &= 1 + e_n(c_n + (1 - q^{-2})d_n) + \psi_n + (1 - q^{-2})\phi_n \end{aligned}$$

Der Koeffizient von e_n in der letzten Zeile verschwindet nicht, da $c_n \neq 0$. Eine algebraische Abhängigkeit der $P_m(L_n)$ würde demnach die Abhängigkeit der e_n nach sich ziehen. Da wir nach Annahme $m > n$ haben, steht dies aber im Widerspruch zu Lemma 90. Der Beweis des Theorems ist beendet.

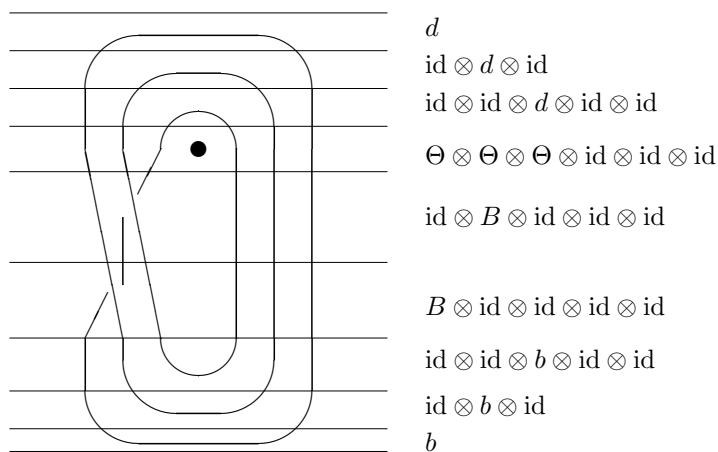


Abbildung 15: Der elementare Knoten L_3 in regulärer Projektion und seine Zerlegung mit Hilfslinien. Rechts daneben die den Streifen zugeordneten Operatoren.

Neuformulierung des Theorems

Dieser Abschnitt bringt Turaevs Theorem in die Form, die im Haupttext benötigt wird.

Vergleich der Definitionen zeigt, daß sich \mathcal{T} von $K_{0,0}^\infty$ nur um die dritte Skeinrelation unterscheiden. Der Isomorphismus in Turaevs Theorem assoziiert die Klasse des Knotens L_n mit A_n . Deshalb kann das Theorem auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$K_{0,0}^\infty(\Lambda[A_1, A_2, \dots]) \cong \Lambda[A_1, A_2, \dots]$$

Über diesem Grundring ist $K_{0,0}^\infty$ demnach ein freier Modul des Ranges 1. Tensorierung mit $\mathbb{C}[x^\pm]$ und Quotientenbildung nach dem Ideal $((x-1)(q-q^{-1}) - \lambda^{-1} + \lambda)$ liefert einen Morphismus in den Ring R_0^∞ , so daß wir (teilweise mit einer weiteren Tensorierung) haben

92. Satz. $K_{0,0}^\infty(R_0^\infty) \cong R_0^\infty$ und $K_{0,0}^\infty(R_{0,k}^\infty) \cong R_{0,k}^\infty$

13 Appendix B: Beweise zu Aussagen aus Abschnitt 2.1.2

(36): Aus (27) folgt $X_1X_1YX_1Y = X_1YX_1YX_1$ und daher kommutiert X_1YX_1Y mit X_1 , und also auch mit X_1^{-1} . Wegen (25) kommutiert es auch mit e_1 .

(37,38): Für $j \geq i + 1$ folgt die Kommutativität aus (5,28) und für $j \leq i - 1$ handelt es sich um eine einfache Anwendung der Relation (6).

(39) und (40) sind trivial.

(41), (42): werden durch Induktion bewiesen. Der Schritt für (41) lautet:

$$\begin{aligned}
Y_i X_i Y_i X_i &= X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} X_i X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} X_i \\
&= X_{i-1} Y_{i-1} X_i X_{i-1} X_i^{-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} X_i \\
&= X_{i-1} X_i Y_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} X_i^{-1} X_{i-1}^{-1} X_i \\
&= X_{i-1} X_i Y_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1} X_i^{-1} X_{i-1}^{-1} \\
&= X_{i-1} X_i X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} X_i^{-1} X_{i-1}^{-1} \\
&= X_i X_{i-1} X_i Y_{i-1} X_{i-1} X_i^{-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} \\
&= X_i X_{i-1} Y_{i-1} X_i X_{i-1} X_i^{-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} \\
&= X_i X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} X_i X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} \\
&= X_i Y_i X_i Y_i
\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt für (42) ist fast identisch. Es reicht, die negativen Exponenten der X zu entfernen, und Y durch Y' zu ersetzen.

(43,44): Die Induktionsbeweise starten von (29) und der gespiegelten Version $\lambda^{-1}e_1 = e_1 Y X_1 Y$, die leicht zu zeigen ist:

$$\lambda e_1 Y X_1 Y = e_1 X_1 Y X_1 Y \stackrel{(36)}{=} X_1 Y X_1 Y e_1 = e_1$$

Im Induktionsschritt für (44) wird (12) genutzt, um e_{i+1} durch e_i auszudrücken:

$$\begin{aligned}
Y'_{i+1} X_{i+1} Y'_{i+1} e_{i+1} &= X_i Y'_i X_i X_{i+1} X_i Y'_i X_i X_i^{-1} X_{i+1}^{-1} e_i X_{i+1} X_i \\
&= X_i Y'_i X_{i+1} X_i X_{i+1} Y'_i X_{i+1}^{-1} e_i X_{i+1} X_i \\
&= X_i X_{i+1} Y'_i X_i X_{i+1} X_{i+1}^{-1} Y'_i e_i X_{i+1} X_i \\
&= X_i X_{i+1} Y'_i X_i Y'_i e_i X_{i+1} X_i = \lambda^{-1} X_i X_{i+1} e_i X_{i+1} X_i = \lambda^{-1} e_{i+1}
\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt für (43) lautet:

$$\begin{aligned}
e_{i+1} Y_{i+1} X_{i+1} Y_{i+1} &= e_{i+1} X_i Y_i X_i^{-1} X_{i+1} X_i Y_i X_i^{-1} = e_{i+1} X_i Y_i X_{i+1} X_i X_{i+1}^{-1} Y_i X_i^{-1} \\
&= e_{i+1} X_i X_{i+1} Y_i X_i Y_i X_{i+1}^{-1} X_i^{-1} = X_i X_{i+1} e_i Y_i X_i Y_i X_{i+1}^{-1} X_i^{-1} \\
&= \lambda^{-1} X_i X_{i+1} e_i X_{i+1}^{-1} X_i^{-1} = \lambda^{-1} e_{i+1}
\end{aligned}$$

(45): Der Beweis geschieht durch Induktion:

$$\begin{aligned}
e_i Y_i^m e_i &= e_i X_{i-1} Y_{i-1}^m X_{i-1}^{-1} e_i = e_i e_{i-1} X_{i-1}^{-1} Y_{i-1}^m X_{i-1}^{-1} e_i \\
&= e_i e_{i-1} Y_{i-1}^m X_{i-1}^{-1} X_{i-1}^{-1} e_i = e_i e_{i-1} Y_{i-1}^m e_{i-1} X_{i-1}^{-1} X_{i-1}^{-1} \\
&= A_m e_i e_{i-1} X_{i-1}^{-1} X_{i-1}^{-1} \stackrel{(20)}{=} A_m e_i
\end{aligned}$$

(46): $[Y, Y'_1] = [Y, Y'_2] = 0$ ist trivial. Für $i > 1$ folgt die Behauptung durch Induktion: $[Y, Y'_i] = 0 \Rightarrow [Y, Y'_{i+1}] = [Y, X_i Y'_i X_i] = 0$. Im allgemeinen Fall $[Y'_j, Y'_i]$ können wir $j < i$ annehmen. Der Induktionsschritt unter Benutzung von (38) lautet: $[Y'_j, Y'_i] = [X_{j-1} Y'_{j-1} X_{j-1}, Y'_i] = 0$.

(47) ist eine Folge von (41).

(48):

$$Y_i e_{i-1} = X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} e_{i-1} = \lambda^{-1} X_{i-1} Y_{i-1} e_{i-1} = \lambda^{-2} Y_{i-1}^{-1} e_{i-1}$$

(49):

$$\begin{aligned} e_{i-1} Y_i &= e_{i-1} X_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} = \lambda e_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1}^{-1} \\ &= \lambda e_{i-1} Y_{i-1} X_{i-1} - \delta \lambda e_{i-1} Y_{i-1} + \delta \lambda e_{i-1} Y_{i-1} e_{i-1} \\ &= e_{i-1} Y_{i-1}^{-1} - \lambda \delta e_{i-1} Y_{i-1} + \delta \lambda A_1 e_1 \end{aligned}$$

(50,51) werden nach folgendem Schema gezeigt:

$$e_{i-1} Y'_i = e_{i-1} X_{i-1} Y'_{i-1} X_{i-1} = \lambda e_{i-1} Y'_{i-1} X_{i-1} Y'_{i-1} Y_{i-1}^{(1)-1} = e_{i-1} Y_{i-1}^{(1)-1}$$

$$(52): X_i Y_{i+1} = X_i^2 Y_i X_i^{-1} = Y_i X_i^{-1} + \delta Y_{i+1} - \delta \lambda e_i Y_i X_i^{-1} = X_i Y_i - \delta Y_i + \delta Y_i e_i + \delta Y_{i+1} - \delta e_i Y_i^{-1} + \delta^2 \lambda e_i Y_i - \delta^2 \lambda A_1 e_i$$

(53) ist trivial. (55) zeigt man wie (54):

$$\begin{aligned} e_i Y_i^l X_i &= e_i Y_i^l X_i Y_i X_i X_i^{-1} Y_i^{-1} = e_i X_i Y_i X_i Y_i^l X_i^{-1} Y_i^{-1} \\ &= \lambda e_i Y_i X_i Y_i^l X_i^{-1} Y_i^{-1} = e_i Y_i^{l-1} X_i^{-1} Y_i^{-1} \\ &= e_i Y_i^{l-1} X_i Y_i^{-1} - \delta e_i Y_i^{l-1} Y_i^{-1} + \delta e_i Y_i^{l-1} e_i Y_i^{-1} \\ &= e_i Y_i^{l-1} X_i Y_i^{-1} - \delta e_i Y_i^{l-2} + \delta A_{l-1} e_i Y_i^{-1} \end{aligned}$$

(56) und (57) ergeben sich wiederum durch Induktion. Damit ist der Beweis aller Aussagen des Lemmas abgeschlossen.

14 Appendix C: Algebraische Hilfsmittel

Dieser Anhang trägt einige algebraische Aussagen zusammen, die im Haupttext gelegentlich benötigt werden.

Zunächst einige Bemerkungen über die Spezialisierung des Grundringes einer Algebra. Seien R und R' Ringe und $\pi : R \rightarrow R'$ eine Surjektion. Weiter sei S eine Menge von 'Generatoren', und S^* bezeichne die Menge der aus diesem Alphabet gebildeten Wörter. Der freie R -Modul mit Basis S^* , also die freie R -Algebra über S , werden dann als $\langle S \rangle_R$ bezeichnet. Es gibt dann eine induzierte Abbildung

$$\pi_* : \langle S \rangle_R \rightarrow \langle S \rangle_{R'}, \quad \sum_i r_i w_i \mapsto \sum_i \pi(r_i) w_i, \quad r_i \in R, w_i \in S^*.$$

Eine alternative Beschreibung von π_* ist durch Tensorproduktbildung möglich, indem man R' mittels π als R -Modul auffaßt. Es gilt dann $\langle S \rangle_R \otimes_R R' = \langle S \rangle_{R'}$. Sei nun eine Menge von Relationen $M = \{\sum_j m_{ij} w_j \mid m_{ij} \in R, w_j \in S^*\}$ gegeben, und \overline{M} bezeichne das davon erzeugte Ideal in $\langle S \rangle_R$. Die Projektionsabbildung sei $p : \langle S \rangle_R \rightarrow \langle S \rangle_R / \overline{M}, a \mapsto a + \overline{M}$. Ferner sei \overline{M}' das von $\pi_*(M)$ erzeugte Ideal, und p' sei die entsprechende Projektionsabbildung. Man sieht dann sofort, daß gilt:

$$\pi_* p = p' \pi_*$$

Für unsere Situation gewinnen wir folgende Erkenntnis:

$$\mathcal{B}_n^k(R/I) = \mathcal{B}_n^k(R) \otimes_R R/I \quad I \text{ Ideal in } R$$

93. Satz. Sei R ein Integritätsbereich. In dem Polynomring $A := R[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ sei ein Ideal I gegeben, das erzeugt wird von n Elementen h_i der Form:

$$h_i := g_i x_i - f_i \quad i \in \{1, \dots, n\}, f_i, g_i \in R[y_1, \dots, y_m]$$

Für jedes i sei f_i teilerfremd zu g_i . Weiter seien die $\{f_1, \dots, f_n\}$ paarweise teilerfremd, und es seien die g_i nicht enthalten in dem Ideal (f_1, \dots, f_n) . Dann ist I ein Primideal.

Beweis: Über dem Quotientenkörper Q von R sei B der rationale Funktionenkörper $B := Q(y_1, \dots, y_m)$. Dann ist B trivialerweise ein Integritätsbereich und $\{0\}$ ein Primideal darin. Wir definieren einen Morphismus $\phi : A \rightarrow B$ durch

$$\phi(y_j) := y_j \quad \phi(x_i) := f_i g_i^{-1}$$

Dann ist auch $\phi^{-1}(\{0\}) = \text{Ker}(\phi) =: K$ ein Primideal. Wegen $\phi(h_i) = g_i f_i g_i^{-1} - f_i = 0$ ist $I \subset K$. Um den Satz zu zeigen, reicht es also $K \subset I$ nachzuweisen.

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$ und lassen den dann immer gleichen Index $i = 1$ weg. Sei $a = \sum_{i=0}^l \beta_i x^i$ mit $\beta_i \in R[y_1, \dots, y_m]$ ein beliebiges Element aus dem Kern K . Dann ist also

$$0 = \sum_{i=0}^l \beta_i g^{l-i} f^i \tag{185}$$

Wir wollen die Existenz eines $h = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j x^j$, $\alpha_j \in R[y_1, \dots, y_m]$ nachweisen, so daß $a = (gx - f)h$, daß also $a \in I$ gilt.

$$\begin{aligned} a = (gx - f)h &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^l \beta_i x^i = \sum_{j=0}^{l-1} g\alpha_j x^{j+1} - f\alpha_j x^j \\ &\Leftrightarrow \beta_0 = -f\alpha_0 \quad \dots \quad \beta_i = g\alpha_{i-1} - f\alpha_i \quad \dots \quad \beta_l = g\alpha_{l-1} \end{aligned}$$

Alle Terme der rechten Seite von (185) bis auf eventuell $\beta_0 g^l$ sind durch f teilbar. Da die linke Seite durch f teilbar ist, folgt aber auch $f \mid \beta_0 g^l$ und damit die Existenz eines α_0 mit $\beta_0 = -f\alpha_0$. Seien nun $\alpha_0, \dots, \alpha_t$ schon so berechnet, daß die Darstellung $\beta_i = g\alpha_{i-1} - f\alpha_i$ (mit $\alpha_{-1} = 0$) gilt. Aus (185) folgt dann, daß f^{t+2} die Summe $\sum_{i=0}^{t+1} \beta_i g^{l-i} f^i$ teilt. Einsetzen der β_i liefert:

$$f^{t+2} \mid \left(\sum_{i=0}^t (g\alpha_{i-1} - f\alpha_i) g^{l-i} f^i + \beta_{t+1} g^{l-t-1} f^{t+1} \right)$$

Die Teleskopsumme reduziert sich bis auf einen Term, so daß bleibt

$$f^{t+2} \mid (-f\alpha_t g^{l-t} f^t + \beta_{t+1} g^{l-t-1} f^{t+1})$$

Wegen $(f, g) = 1$ also weiter $f \mid (-\alpha_t g + \beta_{t+1})$. Das liefert die Existenz eines geeigneten α_{t+1} . Damit ist $I = K$ gezeigt.

Sei nun die Aussage schon erwiesen für $n - 1$. Wir betrachten den Morphismus $\phi' : A \rightarrow Q(y_1, \dots, y_m)[x_n]$, $x_n \mapsto x_n, y_j \mapsto y_j, x_i \mapsto f_i g_i^{-1}, i \leq n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\text{Ker}(\phi') = (h_1, \dots, h_{n-1}) = I'$. Das Bild von ϕ' liegt sogar im Unterring $B' := R[x_n, y_1, \dots, y_m, g_1^{-1}, \dots, g_{n-1}^{-1}] \subset Q(y_1, \dots, y_m)[x_n] \subset B$. Es sei $\phi'' : B' \rightarrow B$ der Morphismus, der als Identität wirkt, abgesehen von $x_n \mapsto f_n g_n^{-1}$. Dann ist offensichtlich $\phi = \phi'' \circ \phi'$.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß der Kern von ϕ'' das in B' von $x_n g_n - f_n$ erzeugte Hauptideal ist. Dazu nehmen wir ähnlich wie oben ein beliebiges Element $a = \sum_{i=0}^l \hat{\beta}_i x_n^i \in \text{Ker}(\phi'')$ und zeigen die Existenz eines $h = \sum_{i=0}^{l-1} \hat{\alpha}_i x_n^i$ mit $a = (g_n x_n - f_n)h$. Dabei sind $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i \in R[y_1, \dots, y_m, g_1^{-1}, \dots, g_{n-1}^{-1}]$. Mit $G := \prod_{i=0}^{n-1} g_i$ kann man schreiben $\hat{\beta}_i = \tilde{\beta}_i G^{-\mu_i}$ mit

$\mu_i \in \mathbb{N}_0, \tilde{\beta}_i \in R[y_1, \dots, y_m]$. Wir setzen $\mu := \max\{\mu_i\}$. Die Gleichung $a = (g_n x_n - f_n)h$ ist dann äquivalent zu:

$$0 = \sum_{i=0}^l \tilde{\beta}_i G^{\mu-\mu_i} g_n^{l-i} f_n^i$$

Mit der Setzung $\beta_i := \tilde{\beta}_i G^{\mu-\mu_i}$ erhalten wir ein Problem, das zu dem oben gelösten äquivalent ist. Es gibt also eine Lösung $\tilde{\beta}_i G^{\mu-\mu_i} = \beta_i = g_n \alpha_{i-1} - f_n \alpha_i$. Folglich ist $\hat{\beta}_i = g_n \alpha_{i-1} G^{-\mu} - f_n \alpha_i G^{-\mu}$. Die von uns gesuchten Koeffizienten sind also $\hat{\alpha}_i = \alpha_i G^{-\mu}$. Damit ist $\text{Ker}(\phi'') = (x_n g_n - f_n)$ gezeigt.

Der Kern von ϕ ist $\phi'^{-1}(\text{Ker}(\phi'')) = \phi'^{-1}((x_n g_n - f_n))$. Wir betrachten nun den von ϕ' induzierten injektiven Morphismus $\hat{\phi}' : A/I' \rightarrow B'$ von Polynomringen in x_n . Ein Element $b(x_n g_n - f_n)$ im Schnitt des Hauptideals $(x_n g_n - f_n)$ mit dem Bild von ϕ' hat dann genau ein Urbild $a + I' \in A/I'$. Damit gilt also die Beziehung $\hat{\phi}'(a + I') = b \hat{\phi}'(g_n x_n - f_n + I') = g(g_n x_n - f_n)$. Wenn b im Bild von $\hat{\phi}'$ liegt (also $\hat{\phi}'(a' + I') = b$), sind wir fertig, denn dann ist $\hat{\phi}'(a - a'(g_n x_n - f_n) + I') = 0$. Wegen der Injektivität von $\hat{\phi}'$ ist dann $a \in I' + (g_n x_n - f_n) = I$.

Es bleibt somit nur noch zu zeigen, daß b im Bild von $\hat{\phi}'$ liegt, wenn $b(g_n x_n - f_n)$ darin liegt. Wir schreiben $b = \sum_{i=0}^l \sum_{\nu} c_{i,\nu} x_n^i g_1^{-\nu_1} \cdots g_{n-1}^{-\nu_{n-1}}$ mit $c_{i,\nu} \in R[y_1, \dots, y_m], \nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$. Dabei wird vorausgesetzt, daß $c_{i,\nu}$ von keinem der g_i geteilt wird. Es sei b_1 die Summe aller Monome $c_{i,\nu} x_n^i g_1^{-\nu_1} \cdots g_{n-1}^{-\nu_{n-1}}$, die nicht im Bild von ϕ' liegen. Es ist unter den im Satz genannten Forderungen an die g_i möglich, daß verschiedene Exponenten ν zu den selben Nennern führen. Äquivalenzklassen von Multiindizes mit dieser Eigenschaft werden mit $[\nu]$ bezeichnet, und wir wählen in jeder Klasse einen Repräsentanten $\hat{\nu}$. Der Nenner jeder Klasse sei $G([\hat{\nu}]) := \prod_{j=0}^{n-1} g_j^{-\hat{\nu}_j}$. Weiter sei i_0 die niedrigste Potenz in x_n eines nicht verschwindenden Monoms von b_1 . Damit kann b_1 geschrieben werden als

$$b_1 = \sum_{i=i_0}^l x_n^i \sum_{[\hat{\nu}]} G([\hat{\nu}]) \sum_{\nu \in [\hat{\nu}]} c_{i,\nu}^{(1)}$$

Dabei ist $c_{i,\nu}^{(1)} = c_{i,\nu}$, wenn das Monom nicht im Bild liegt, 0 sonst. Der Koeffizient z von $x_n^{i_0}$ in $b_1(g_n x_n - f_n)$ liegt dann im Bild:

$$z := -f_n \sum_{[\hat{\nu}]} G([\hat{\nu}]) \sum_{\nu \in [\hat{\nu}]} c_{i_0,\nu}^{(1)}$$

Nach der Voraussetzung des Satzes liegt keines der g_i in dem von f_n erzeugten Ideal, so daß keine Kürzung auftritt. Es treten also genau die Nenner auf, die auch in b_1 vorkommen. Es liegt z im Bild von ϕ' , da dieser Morphismus die durch x_n gegebene Graduierung respektiert.

Da keine Kürzung eintritt, liegen sogar für jede Klasse $[\hat{\nu}]$ die Summen $f_n G([\hat{\nu}]) \sum_{\nu \in [\hat{\nu}]} c_{i,\nu}^{(1)}$ im Bild. Da die f_i paarweise teilerfremd sind, folgt, daß bereits $G([\hat{\nu}]) \sum_{\nu \in [\hat{\nu}]} c_{i_0,\nu}^{(1)}$ im Bild liegt. Dann umfaßt b_1 aber auch, im Widerspruch zu seiner Definition, Monome, die im Bild liegen. Demnach muß $b_1 = 0$ sein, b also im Bild von ϕ' liegen. \square

Literatur

- [1] S. Ariki, K.Koike: A Hecke Algebra of $(\mathbb{Z} \wr r\mathbb{Z}) \wr \mathcal{S}_n$ and Construction of its Irreducible Representations, Adv. in Math. 106 (1994), 216
- [2] S. Ariki: On the Semisimplicity of the Hecke Algebra of $(\mathbb{Z} \wr r\mathbb{Z}) \wr \mathcal{S}_n$, Journal of Algebra 169 (1994), 216
- [3] G. Burde, H.Zieschang: Knots, de Gruyter 1986
- [4] V. Chari, A. Pressley: A Guide to Quantum Groups, Cambridge 1994
- [5] Y. Cheng et al.: New Solutions of YBE and new Link Polynomials, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 1,1 (1992), 31
- [6] T. tom Dieck: Knotentheorien und Wurzelsysteme I, Math. Gottingensis 21 (1993)
- [7] T. tom Dieck: Knotentheorien und Wurzelsysteme II, Math. Gottingensis 44 (1993)
- [8] T. tom Dieck: On tensor representations of knot algebras, Math. Gottingensis 45 (1995) und Manuscripta Math. 93 (1997) 163
- [9] T. tom Dieck: Categories of rooted cylinder ribbons and their representations, J. reine angew. Math. 494 (1998) 35
- [10] T. tom Dieck: Cylinder algebras, Manuskript 18.8.97
- [11] T. tom Dieck, R. Häring-Oldenburg: Quantum Groups and Cylinder Braiding, erscheint in Forum Math.
- [12] R. Dipper, G. James: Representations of Hecke-Algebras of Type B, Journal of Algebra 146, 454 (1992)
- [13] R. Häring-Oldenburg: Reconstruction of weak quasi Hopf algebras, Journal of Algebra 194 (1997) 14
- [14] R. Häring-Oldenburg: Global Quantum Gauge Symmetry from Reconstruction Theorems, J. Phys. Math. Gen A 29 (1996) 8041
- [15] R. Häring-Oldenburg: New solutions of the Reflection Equation derived from Type B BMW Algebras, J. Phys. A. Math. Gen. 29 (1996) 5945
- [16] R. Häring-Oldenburg: Tensor Categories of Coxeter Type B and QFT on the Half Plane, J. Math. Phys. 38 (1997) 5371
- [17] R. Häring-Oldenburg: The Potts Model with a Reflecting Boundary, Journal of Knot theory and its Ram. 6, 6 (1997) 809
- [18] R. Häring-Oldenburg: A morphism from to the rotation algebra, Rep. Math. Phys. 39 (1997), 153
- [19] R. Häring-Oldenburg: Knot Theory of Coxeter Type B and some of its Physical Applications, in: Doebner, H.-D., Dobrev, V. K.: Quantum Group Symposium at Group 21, Proceedings of the 21th Int. Conf. on Group Theoretical Methods in Physics, Heron Press, Sofia 1997
- [20] Ch. Kassel: Quantum Groups, Springer, New York 1995
- [21] L. Kauffman: An Invariant of Regular Isotopy, Trans. AMS 318, 417
- [22] S. Lambropoulou: Solid torus links and Hecke algebras of B-type, in: D. N. Yetter (Ed.) : Proceedings of the Conference on Quantum Topology, World Scientific, 1994
- [23] S. Lambropoulou: Knot Theory related to generalized and cyclotomic Hecke algebras of type B, Math. Gottingensis 25 (1997)
- [24] D. Levy, P. Martin: Hecke Algebra Solutions of the Reflection Equation, J. Phys. A. Math. Gen 27 (1994) L521
- [25] I. G. Macdonald: Symmetric Functions and Hall polynomials, 2. Auflage, Oxford Clarendon Press
- [26] S. Majid: Foundations of quantum group theory, Cambridge University Press, Cambridge 1995
- [27] J. H. Przytycki: Persönliche Mitteilung
- [28] H. Reich: Symmetrische Braueralgebren, Diplomarbeit, Göttingen 1994
- [29] A. B. Sossinsky: Preparation Theorems for isotopy invariants of links in 3-manifolds, in: P. P. Kulish (Ed.): Quantum Groups, Proceedings Leningrad Workshop 1990, Springer LNM 1510, Berlin 1992

- [30] E. K. Sklyanin, J. Phys. A Math. Gen. 21 (1988), 2375
- [31] V. G. Turaev: Conway and Kauffman modules of a solid torus, Journal of Soviet Math (1990), 2799
- [32] V. G. Turaev: Quantum Invariants of knots and 3-manifolds, de Gruyter, Berlin 1994
- [33] H. Wenzl: On the structure of Brauer's centralizer algebras, Annals of Math. 128 (1988), 173
- [34] H. Wenzl: Quantum Groups and Subfactors of Type B, C, and D, Comm. Math. Ph. 133 (1990) 383

Lebenslauf

Reinhard Häring-Oldenburg, geb. Häring
Merkelstr. 14, 37085 Göttingen, 0551 / 55956

- 27.8.1967 : in Bensheim geboren als zweiter Sohn der kaufmännischen Angestellten Maria Häring und des Schreiners Anton Häring
- 1974-78 : Grundschule Zwingenberg
- 1978-87 : Goethe-Gymnasium Bensheim
- Mai 1987 : Abitur
- 8.87-3.89 : Zivildienst
- April 1989 : Beginn des Studiums der Physik und Mathematik in Frankfurt
- Jan. 1990 : Aufnahme in die Studienstiftung d. dt. Volkes
- Okt. 1990 : Vordiplom in Physik
- März 1991 : Vordiplom in Mathematik
- April 1991 : Wechsel an die Universität Heidelberg
- April 1992 : Wechsel an die Universität Frankfurt und Beginn der Diplomarbeit bei Prof. Constantinescu
- Nov. 1993 : Diplomprüfung in Mathematik
- Seit Feb. 1994 : Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Math. Institut bei Prof. tom Dieck
- Juli 1995 : Einschreibung zum Lehramtsstudiengang der Fächer Mathematik, Physik mit Erweiterungsfach Informatik
- 29.9.1995 : Heirat mit Felicitas Oldenburg
- 6.12.1996 : Geburt von Jakob Felix Oldenburg
- 9.6. 1998 : Erstes Staatsexamen LG Math/Phys