Eigenschaften der Filtrationen Brownscher Bewegungen auf Mannigfaltigkeiten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Wolfgang Schwarzwäller
aus
Göttingen

Göttingen 1999

D7

Referent: Prof. Dr. H. Hering

Korreferent: Prof. Dr. M. Denker

Tag der mündlichen Prüfung: 3.11.99

„This page is intentionally left blank.“

Mozart Sound System User’s Guide, Seite C-6

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

„In der Filtration steckt sämtliche Information über den stochastischen Prozeß“ - diese Aussage gilt als allgemein anerkannte Tatsache bei der Behandlung stochastischer Prozesse; schließlich ist die Filtration $\mathcal{F}_t$ gerade definiert als die „Geschichte“ des Prozesses bis zum Zeitpunkt t. Unklar ist hingegen, ob und inwieweit sich diese Information aus der Filtration extrahieren läßt. Nimmt man beispielsweise die Filtration einer Brownschen Bewegung B_t auf $I\!R$, so kann ein „typisches“ Element $\Gamma \in \mathcal{F}_t$ die Form $\{B_t \in [0,1]\}$ haben. Nur ist Γ als $\mathcal{F}_t$-Element zunächst nur eine Teilmenge eines i.a. unbekannten Raumes Ω, d.h. Γ hat die Form $\Gamma = \{\omega_2, \omega_5, \omega_7, \omega_{10}, \ldots\}$ (indiziert durch eine hinreichend große Indexmenge von Ordinalzahlen o.ä.), und diesen ω_i sieht man a priori nicht an, daß die zugehörigen Pfade sich zum Zeitpunkt t im Intervall $[0,1]$ versammeln. Dies ist insbesondere dann problematisch zu erkennen, wenn Ω nicht der Wienerraum $C(I\!R_+, I\!R)$ ist, sondern ein abstrakt gegebener Raum und damit die Elemente $\omega_i \in \Omega$ nicht als Funktionen gegeben sind.

Es ergibt sich daher u.a. folgende Frage: Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ zu einer Brownschen Bewegung B_t auf einer unbekannten Mannigfaltigkeit M. Läßt sich allein anhand der durch B_t erzeugten Filtration $\mathcal{F}_t$ und des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$ herausfinden, auf welcher Mannigfaltigkeit B_t gelebt hat?

Dies führt mittelbar auch zu der Frage nach der Isomorphie von Maßräumen. Im Falle von Markovprozessen mit diskretem Zeitparameter (d.h. $I\!N$) konnte Krickeberg 1965 nachweisen, daß sämtliche Maßräume isomorph sind zum Einheitsintervall $[0,1]$ mit Lebesgue-Maß [Krickeberg]. Insbesondere läßt sich also auch nicht herausfinden, auf welcher Mannigfaltigkeit der Prozeß gelebt hat. Dies ist nicht weiter verwunderlich, wie man bereits im eindimensionalen Fall sehen kann: Ist $(X_t)_{t \in I\!N}$ ein Markovprozeß auf S^1, so trifft dieser fast jeden beliebigen Punkt $x \in S^1$ mit Wahrscheinlichkeit Null. Aber $S^1 - \{x\} \cong I\!R$, und da stochastische Prozesse ohnehin nur bis auf Nullmengen definiert sind, läßt sich X_t damit nicht von einem Prozeß auf $I\!R$ unterscheiden.

Bei Prozessen mit kontinuierlichem Zeitparameter wurde diese Frage bisher noch nicht behandelt. Doch gerade hier läßt sich ein qualitativer Unterschied beobachten: Eine Brownsche Bewegung auf S^1 trifft jeden Punkt mit positiver Wahrscheinlichkeit (in dem Sinne, daß $\forall x \in S^1\ \forall t_0 > 0 : \mathbf{P}[\exists t < t_0 : B_t = x] > 0$), und damit bedeutet das Herausnehmen eines Punktes durchaus einen qualitativen Unterschied für den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, im Falle von ein- und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten die Frage zu beantworten, ob sich anhand der Filtration die topologische Gestalt der Mannigfaltigkeit rekonstruieren läßt.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Kapitel 1 ist die Einleitung. In Kapitel 2 werden die wesentlichen Grundlagen und Hilfsmittel bereitgestellt, die im weiteren Verlauf benötigt werden. Diese umfassen insbesondere Brownsche Bewegungen auf Mannigfaltigkeiten und Cech-Homologie. Im dritten Kapitel werden erste Eigenschaften von $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen vorgestellt und deren Zusammenhänge mit den Eigenschaften der zugrundeliegenden Borel-Mengen auf der Mannigfaltigkeit. Es handelt sich hierbei um im wesentlichen zusammenhängende und im wesentlichen benachbarte Ereignisse. Mit den gewonnenen Ergebnissen läßt sich im nächsten Kapitel der eindimensionale Fall bereits abhandeln. Im fünften Kapitel werden weitere Eigenschaften speziell von $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen, die zu einer Filtration einer Brownschen Bewegung auf einer Fläche gehören, eingeführt und untersucht, und letztendlich wird damit der zweidimensionale Fall geklärt.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. H. Hering für viele fruchtbare Diskussionen bedanken sowie für das Vertrauen, das er mir entgegenbrachte und die Freiheiten, die er mir ließ.

Bei Herrn Prof. M. Denker möchte ich mich für die Übernahme des Korreferates bedanken.

Weiterhin danke ich allen, die mir bei dieser Arbeit geholfen haben und die mich im Institut in jeder Hinsicht unterstützt haben. Dies ist zunächst die Arbeitsgruppe mit Olaf und Jörg, sowie Susanne, Stefan-M., Peter, Paul, Oliver, Brice und Armin.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Notationen und Konventionen

In dieser Arbeit sei $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. nicht notwendigerweise der Wienerraum.
Die Brownsche Bewegung wird stets mit B_t bezeichnet, $\mathcal{F}_t$ ist die natürliche Filtration der Brownschen Bewegung, d.h.

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{B_s^{-1}(A) | s \leq t \ , A \in \mathcal{B}(M)\}.$$

Weiterhin sei

$$\mathcal{F}_{=t} := \sigma\{B_t^{-1}(A) | A \in \mathcal{B}(M)\}$$

die σ-Algebra der Ereignisse, die nur vom Zeitpunkt t abhängen. Die Zeitpunkte t und $t-s$ werden stets als positiv vorausgesetzt, wobei $t-s<t$ gelten soll.
Ein Ereignis $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$ läßt sich schreiben als $\Gamma = \{B_t \in A\}$, $A \in \mathcal{B}(M)$, da $\mathcal{F}_{=t}$ eine zurückgezogene σ-Algebra ist.
Ereignisse $\Gamma \in \mathcal{F}_t$ bzw. $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$ werden stets mit griechischen Buchstaben bezeichnet.
Für $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t)$ ist die bedingte Erwartung $\mathbf{E}[f|\mathcal{F}_{t-s}]$ definiert als die eindeutige L^2-Projektion

$$\mathbf{E}[\cdot|\mathcal{F}_{t-s}] : L^2(\Omega, \mathcal{F}_t) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t-s}).$$

Da die Brownsche Bewegung (auch auf Mannigfaltigkeiten) ein Markovprozeß ist, ist für $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$ die Zufallsvariable $\mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma|\mathcal{F}_{t-s}]$ stets $\mathcal{F}_{=(t-s)}$-meßbar (vgl. [Taira], S. 323).

Eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist in dieser Arbeit entweder $\mathbb{R}$ oder S^1, zweidimensionale Mannigfaltigkeiten sind stets geschlossene, kompakte, vollständige, zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Struktur. Für eine meßbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $\lambda(A)$ das Lebesgue-Maß von A, auf anderen Mannigfaltigkeiten bezeichnet $\lambda(\cdot)$ das durch die Volumenform induzierte Maß. Mit $dist(\cdot,\cdot)$ wird der geodätische bzw. euklidische Abstand bezeichnet, wobei wie üblich für Mengen A, B gilt:

$$dist(A,B) := \inf\{dist(a,b) | a \in A, b \in B\}.$$

2.2 Brownsche Bewegung auf Mannigfaltigkeiten

Sei im folgenden M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik $g : M \to T^*M \otimes T^*M$. In lokalen Koordinaten sei $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, (g^{ij}) die inverse Matrix von (g_{ij}), und Γ^k_{ij} seien die Christoffel-Symbole.
Der Laplace-Operator Δ ist in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\Delta = g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

wobei wie üblich die Einsteinsche Summationskonvention gilt.
Die Brownsche Bewegung auf M ist definiert als die Diffusion auf M, deren Generator gerade $\frac{1}{2}\Delta$ ist (Vgl. [Hsu]).
Äquivalent dazu ist folgende Definition:

Definition 2.1 *Ein stochastischer Prozeß $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to M$ ist eine Brownsche Bewegung auf (M, g), falls es sich um einen stetigen adaptierten Prozeß handelt und für jedes glatte $f : M \to \mathbb{R}$ der Prozeß*

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \Delta f(X_s) ds$$

ein lokales Martingal ist (vgl. [Emery], S. 62).

Die Dichte der Brownschen Bewegung ergibt sich daher ([Hsu]) in lokalen Koordinaten als minimale Fundamentallösung zu

$$\frac{\partial}{\partial t} u = g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u - g^{ij} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} u.$$

2.3 Cech-Homologie

Im folgenden sollen kurz die wesentlichen Punkte über Cech-Homologie zusammengefaßt werden. Als Quelle sei verwiesen auf [Rinow], S. 505ff.

Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit M.
Setze $C_k = \mathbb{Z}/2[\{U_{i_0}, \ldots, U_{i_k} : U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} \neq \emptyset\}]$, d.h. der freie $\mathbb{Z}/2$-Vektorraum über den $(k+1)$-Tupeln von Mengen in $\mathcal{U}$, die nicht-leeren Durchschnitt haben. Setze

$$\begin{aligned} \partial : C_k &\to C_{k-1} \\ [U_{i_0}, \ldots, U_{i_k}] &\mapsto \sum_{j=0}^{k} [U_{i_0}, \ldots, \hat{U}_{i_j}, \ldots, U_{i_k}] \end{aligned}$$

wobei das $\hat{}$ bedeutet, daß die entsprechende Menge weggelassen wird.
Offensichtlich ist $\partial \circ \partial = 0$, daher ist mit

$$Z_k := \text{Kern } \partial, \;\; B_k := \text{Bild } \partial$$

der $\mathbb{Z}/2$-Vektorraum $H_k(\mathcal{U}) := Z_k/B_k$ wohldefiniert.

Ist $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, d.h. zu jedem V_j existiert ein U_i mit $V_j \subset U_i$, so wird durch

$$[V_{j_0}, \ldots, V_{j_k}] \mapsto [U_{i_0}, \ldots, U_{i_k}],\ V_{j_n} \subset U_{i_n} \quad \forall n$$

ein (i.a. nicht eindeutiger) Homomorphismus von $C_k(\mathcal{V})$ nach $C_k(\mathcal{U})$ definiert, der einen eindeutigen Homomorphismus

$$H_k(\mathcal{V}) \to H_k(\mathcal{U})$$

induziert.
Die Cech-Homologiegruppen $\check{H}_k(M;\mathbb{Z}/2)$ sind dann definiert durch

$$\check{H}_k(M;\mathbb{Z}/2) := \lim_{\leftarrow} H_k(\mathcal{U})$$

wobei der projektive Limes über alle endlichen offenen Überdeckungen $\mathcal{U}$ genommen wird. Bei Mannigfaltigkeiten stimmen die Cech-Homologiegruppen mit den üblichen (z.B. singulären oder zellulären) Homologiegruppen überein.

Analog lassen sich die Cech-Homologiegruppen $\check{H}_k(M;\mathbb{Z})$ mit ganzzahligen Koeffizienten bilden. Hier ist C_k der freie $\mathbb{Z}$-Modul über den geordneten (k+1)-Tupeln $[U_0, \ldots, U_k]$, wobei

$$[U_0, \ldots, U_i, U_{i+1}, \ldots, U_k] = -[U_0, \ldots, U_{i+1}, U_i, \ldots, U_k]$$

gilt, und der Randhomomorphismus ∂ definiert wird durch

$$\partial : [U_0, \ldots, U_k] \mapsto \sum_{j=0}^{k} (-1)^j [U_0, \ldots, \hat{U}_j, \ldots, U_k].$$

Definition 2.2 *Ein kofinites (in [Rinow] konfinites) System $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ von offenen Überdeckungen ist ein System derart, daß zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{V} = (V_j)$ ein $\mathcal{U}_i \in (\mathcal{U}_i)$ existiert, das eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$ ist.*

Satz 2.3 *Ist $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ ein kofinites System von offenen Überdeckungen, so ist der projektive Limes über die Homologiegruppen dieses Systems gerade die Cech-Homologie, d.h.*

$$\check{H}_k(M;\mathbb{Z}/2) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i\in I}} H_k(\mathcal{U}_i).$$

Insbesondere sind die Homologiegruppen durch ein beliebiges kofinites System schon bestimmt. □

Eine Leray-Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)$ ist eine offene Überdeckung von M, so daß sämtliche Mengen U_i einfach zusammenhängend sind. Ist dies der Fall, so ist der kanonische Homomorphismus

$$\check{H}_k(M) \to H_k(\mathcal{U})$$

bereits ein Isomorphismus.

2.4 Dichten meßbarer Mengen

Definition 2.4 *Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, und für jedes $\epsilon > 0$ sei $K_\epsilon(a)$ die offene Einheitskugel um a mit Radius ϵ. Dann heißt*

$$\bar{d}(a, A) := \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\lambda(A \cap K_\epsilon(a))}{\lambda(K_\epsilon(a))}$$

die obere äußere Dichte und

$$\underline{d}(a, A) := \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\lambda(A \cap K_\epsilon(a))}{\lambda(K_\epsilon(a))}$$

die untere äußere Dichte von A in a.
Gilt $\bar{d}(a, A) = \underline{d}(a, A)$, so ist $\rho_A(a) := \bar{d}(a, A)$ die äußere Dichte von A in a.

Definition 2.5 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Dann ist $\tilde{A}$ definiert als*

$$\tilde{A} := \{a \in \mathbb{R}^n | \rho_A(a) = 1\}$$

Satz 2.6 *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, dann gilt $\lambda(A \Delta \tilde{A}) = 0$ (Dichtesatz von Lebesgue).*

Beweis : In [Hahn-Rosenthal], S. 282. □
Näheres ist auch zu finden in [Munroe], S. 287ff., und in [Oxtoby].

Bemerkung 2.7 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Dann gilt:*

1. $\rho_A(a) = \rho_{\tilde{A}}(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$
2. $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$
3. *$\tilde{A}$ besitzt keine isolierten Punkte/Nullmengen*
4. *$\tilde{A}^c$ besitzt keine isolierten Punkte/Nullmengen*
5. *Ist $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann ist $\tilde{A}$ der offene Kern von A*
6. *Ist $B = A \Delta N$, wobei N eine λ-Nullmenge ist, so ist $\tilde{B} = \tilde{A}$*

Beweis : Folgt direkt aus der Definition von $\tilde{A}$. □

Kapitel 3

Eigenschaften von $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen

In diesem Kapitel soll von Eigenschaften von Ereignissen der Form $\{B_t \in A\}$ auf Eigenschaften der Menge A geschlossen werden.
Anschaulich gesehen ist die zugrundeliegende Idee die folgende: Jedes Ereignis $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$ hat die Form $\{B_t \in A\}$, d.h. es besteht aus Pfaden $\omega \in \Omega$, die zum Zeitpunkt t in der (unbekannten) meßbaren Menge A liegen. Wenn man diese ω zum Zeitpunkt $t-s$ betrachtet, so liegen sie zwar überall (da die Brownsche Bewegung mit positiver Wahrscheinlichkeit in beliebig kurzer Zeit beliebig weit läuft), aber die „Mehrzahl" dieser ω hält sich in der Nähe von A auf. Wenn man also ähnlich wie in der Statistik Signifikanzniveaus α wählt und auf diese Weise die eben genannte „Mehrzahl" präzisiert, so erhält man Umgebungen von A, die sich um so weniger von A unterscheiden, je kleiner s ist. Es stellt sich schließlich heraus, daß der Übergang $s \to 0$ in engem Zusammenhang steht mit der (Lebesgue-) Dichte von A in den entsprechenden Punkten.

3.1 Grenzwerte von Markovkernen

Zu jedem Markovprozeß ist in natürlicher Weise eine Halbgruppe P_t assoziiert, für die bekanntlich

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_A(x) \text{ f.s.}$$

gilt. Da für $t > 0$ $P_t \mathbb{1}_A(x)$ jedoch stetig ist, reicht für die Betrachtung der Kurzzeitasymptotik eine fast sichere Aussage nicht aus. Stattdessen muß diese Konvergenz punktweise betrachtet werden.

Bemerkung 3.1 *Die Dichte der Brownschen Bewegung auf S^1 ist in lokalen Koordinaten $\mathbb{C} \supset S^1 \ni x = e^{i\pi\phi} \mapsto \phi \in (-1,1)$, $x \neq -1$ gegeben durch*

$$p_t(x) = \vartheta_3(\pi x, \exp(-2\pi^2 t)).$$

Insbesondere ist $p_t(x)$ monoton steigend für $x < 0$ und monoton fallend für $x > 0$.

Beweis : Ergibt sich durch Lösen der entsprechenden Wärmeleitungsgleichung oder durch Betrachten der universellen Überlagerung von S^1, siehe [Whittaker-Watson], S. 475. $\square$

Satz 3.2 *Sei $p_t(x)$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsdichten derart, daß*

1. *$p_t(x) \to \delta(x)$ im Distributionssinne für $t \downarrow 0$*
2. *$p_t \in C^1$*
3. *p_t ist monoton steigend auf $(-\infty, 0)$ und monoton fallend auf $(0, \infty)$.*

Sei $A \in \mathcal{B}(I\!R)$ derart, daß

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{\lambda([-h,h] \cap A)}{2h} = a$$

ist. Dann gilt:

1. *Ist $a = 0$, so ist $\limsup_{t\downarrow 0} \int_A p_t(x)dx = 0$*
2. *Ist $a < 1$, so ist $\limsup_{t\downarrow 0} \int_A p_t(x)dx < 1$.*

Beweis : Sei zunächst $a = 0$. Es reicht zu zeigen, daß

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_A(x) p_t(x) dx \to 0$$

für $t \downarrow 0$.
Sei $\epsilon > 0$, $\epsilon' = \epsilon/3$, h_o derart, daß $\lambda([0,h] \cap A) \leq h\epsilon' \quad \forall h \leq h_0$. Sei $t_0 > 0$ so gewählt, daß für alle $t \in [0, t_0]$ gilt:

$$\int_{h_0}^\infty p_t(x)dx < \epsilon' \text{ und } p_t(h_0) < 1/h_0.$$

Dann ist für $t \leq t_0$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{1}_A(x)p_t(x)dx &= \int_0^{h_0} \mathbb{1}_A(x)p_t(x)dx + \int_{h_0}^\infty \mathbb{1}_A(x)p_t(x)dx \\
&\leq \int_0^{h_0} \mathbb{1}_A(x)p_t(x)dx + \epsilon' \\
&= \left[\int_0^x \mathbb{1}_A(\xi)d\xi p_t(x)\right]_{x=0}^{h_0} - \int_0^{h_0}\int_0^x \mathbb{1}_A(\xi)d\xi p_t'(x)dx + \epsilon' \\
&\leq \lambda([0,h_0] \cap A)p_t(h_0) - \int_0^{h_0} \epsilon' x p_t'(x)dx + \epsilon' \\
& \text{da } p_t' \leq 0 \text{ auf } (0,\infty) \\
&= \lambda([0,h_0] \cap A)p_t(h_0) - [\epsilon' x p_t(x)]_{x=0}^{h_0} + \epsilon' \int_0^{h_0} p_t(x)dx + \epsilon' \\
&\leq \epsilon' + \epsilon' + \epsilon' = \epsilon.
\end{aligned}$$

Sei nun $0 < a < 1$, $\epsilon > 0$, $\epsilon' = \epsilon/3$. Nach Voraussetzung existiert ein h_0, so daß für alle $h < h_0$ $\lambda([-h,0] \cap A) < h(a + \epsilon')$ oder $\lambda([0,h] \cap A) < h(a+\epsilon')$ gilt. Ohne wesentliche

Einschränkung sei $\lambda([0,h]\cap A) < h(a+\epsilon')$. Sei $b=\int_0^\infty p_t(x)dx$. Es reicht zu zeigen, daß ein $t_0>0$ existiert, so daß für $t<t_0$

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_A(x)p_t(x)dx \le ba+\epsilon'$$

ist.
Sei t_0 derart gewählt, daß für $t<t_0$ gilt

$$\int_{h_0}^\infty p_t(x)dx < \epsilon', \;\; p_t(h_0) < \epsilon'/h_0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{1}_A(x)p_t(x)dx &\le \epsilon' + \int_0^{h_0} \mathbb{1}_A(x)p_t(x)dx \\
&\le \epsilon' + (a+\epsilon')\epsilon' - \int_0^{h_0} \lambda([0,x]\cap A)p_t'(x)dx \\
&\le 2\epsilon' - (a+\epsilon')\int_0^{h_0} xp_t'(x)dx \\
&= 2\epsilon' - (a+\epsilon')h_0p_t(h_0) + (a+\epsilon')\int_0^{h_0} p_t(x)dx \\
&\le 2\epsilon' + b(a+\epsilon') \le ba+\epsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Korollar 3.3 *1. Ist $\underline{d}(0,A)=a$ mit $a=1$ oder $a>0$, so ist auch $\liminf_{t\downarrow 0}\int_A p_t(x)dx = 1$ oder >0.*

2. Ist $\rho_A(0)=a$ mit $a\in\{0,1\}$, so ist $\lim_{t\downarrow 0}\int_A p_t(x)dx = a$.

Beweis :

1. Ergibt sich aus Satz 3.2 durch Betrachtung des Komplements,
2. ist eine Kombination von Satz 3.2 und 1. $\square$

Damit läßt sich die oben gestellte Frage im eindimensionalen Fall bereits beantworten: Auf $\tilde{A}$ konvergiert $P_t\mathbb{1}_A$ gegen 1, auf $\tilde{A}^c$ konvergiert es gegen Null und der $\liminf P_t\mathbb{1}_A$ bzw. der $\limsup P_t\mathbb{1}_A$ ist genau dann gleich Null/gleich Eins/dazwischen, wenn dies für die untere äußere bzw. obere äußere Dichte der Menge A im entsprechenden Punkt gilt. Dies gilt auch im zweidimensionalen Fall, wie im folgenden gezeigt wird.

Satz 3.4 *Sei $p_t(x)$ das zweidimensionale Gaußmaß mit Varianz t, $A\subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt:*

1. Ist $\bar{d}(0,A)=0$ oder <1, so ist

$$\limsup_{t\downarrow 0}\int_A p_t(x)dx = 0 \;\; \text{oder} \;\; <1.$$

2. *Existiert $\rho_A(0)$ und ist gleich 0 oder 1, so ist*

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_A p_t(x)dx = 0 \ \ oder \ \ 1.$$

Beweis : Sei $\epsilon > 0$, h_0 so gewählt, daß $\frac{\lambda(K_h(0)\cap A)}{\lambda(K_h(0))} < a+\epsilon$ gilt für $h < h_0$, wobei $K_h(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < h\}$.
In Polarkoordinaten ist dann

$$\begin{aligned}\int_A p_t(x)dx &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_A(\phi, r) r d\phi \, p_t(r)dr \\ &=: \int_0^\infty \Psi_A(r)p_t(r)dr,\end{aligned}$$

wobei für $h < h_0 \quad \int_0^h \Psi_A(r)dr < a+\epsilon$ nach Voraussetzung. Der Rest des Beweises folgt analog zu Satz 3.2 und Korollar 3.3. □

Korollar 3.5 *Ist p_t der Markovkern zur Brownschen Bewegung auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, so gilt:*

1. $\liminf_{t\downarrow 0}\int_A p_t(x,y)dy = 0/=1/\in(0,1) \Leftrightarrow \underline{d}(x,A) = 0/=1/\in(0,1)$

2. $\limsup_{t\downarrow 0}\int_A p_t(x,y)dy = 0/=1/\in(0,1) \Leftrightarrow \bar{d}(x,A) = 0/=1/\in(0,1)$.

Beweis : Nach [Davies], Korollar 3.2.8 und Theorem 3.3.4 läßt sich p_t nach oben und nach unten abschätzen durch (nicht-normierte) Gaußmaße. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.4. □

Sei im folgenden $\phi_{s,A}(x) := \int_A p_s(x,y)dy$. Dann ist nach dem bisher gezeigten $\mathbb{1}_{\tilde{A}}(x)$ ein natürlicher Kandidat für eine Erweiterung von $\phi_{s,A}(x)$ für $s = 0$.
Nunmehr sollen weitere Eigenschaften dieser Funktion behandelt werden.

Lemma 3.6 *Sei $A \in \mathcal{B}(M)$ mit $\lambda(A) > 0$. Dann gilt für alle $s > 0$, daß $\phi_{s,A}(x)$ stetig ist in x.*

Beweis : Ohne wesentliche Einschränkung sei $\phi_{s,A}(\cdot)$ in lokalen Koordinaten gegeben. Dann ist

$$\phi_{s,A}(x) = \int_A p(x,y,s)dy.$$

Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.
Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\phi_{s,A}(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\int_A p(x_n,y,s)dy \\ &= \int_A \lim_{n\to\infty} p(x_n,y,s)dy = \phi_{s,A}(x)\end{aligned}$$

nach dem Satz über majorisierte Konvergenz, da $p(\cdot,\cdot,s)$ stetig und beschränkt ist. □

Lemma 3.7 *Für alle $x \in M$ ist $\phi_{s,A}(x)$ stetig in $s \in (0,T]$ für ein $T > 0$.*

Beweis : Ohne wesentliche Einschränkung sei $\phi_{s,A}$ wieder in lokalen Koordinaten gegeben. Sei $s > 0$ und $\{s_n\}_{n\in I\!N}$ eine Cauchy-Folge mit $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$, $s_n > 0 \quad \forall n$. Dann gibt es ein Intervall $I = [s-\epsilon, s+\epsilon]$ mit $s - \epsilon > 0$, und ein $n_0 > 0$, so daß $s_n \in I \quad \forall n > n_0$.
Da I kompakt ist und $\phi_{s,A}(\cdot)$ beschränkt ist für alle s, ist $\phi_{s,A}(x)$ gleichmäßig beschränkt für $s \in I$. Damit gilt $\lim_{n\to\infty} \phi_{s_n,A}(x) = \phi_{s,A}(x)$ wegen majorisierter Konvergenz. □

Korollar 3.8 *1. Sei $x \in \tilde{A}$ oder $x \in \tilde{A}^c$. Dann ist die (kanonische) Erweiterung von $\phi_{s,A}(x)$ stetig in $s \in [0,T]$.*

2. Sei $x \in M$ so, daß $\underline{d}(x,A) \geq a > 0$ gilt. Dann gilt für jede (sinnvolle) Erweiterung $\tilde{\phi}_{s,A}$, daß $\tilde{\phi}_{s,A}(x) \geq b > 0$ ist. □

Schließlich ist noch eine Abschätzung vonnöten, mithilfe derer die Formulierung „in der Nähe“ am Anfang dieses Kapitels präzisiert wird:

Lemma 3.9 *Seien $x, y \in M$, $x \neq y$ und $\rho(x,y)$ der (geodätische) Abstand zwischen x und y. Dann gilt:*

$$\lim_{t\downarrow 0} t \log p(t,x,y) = -\frac{1}{2}\rho(x,y)^2.$$

Beweis : In [Hsu], Abschnitt 5. □

Korollar 3.10 *Seien A, B Borel-Mengen mit positivem Maß, $dist(A,B) \geq a > 0$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $s_0 > 0$, so daß für alle $s < s_0$ gilt: $\phi_{s,A}|_B < \epsilon$* □

3.2 Struktur von $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen

Im vorhergehenden Abschnitt wurden die Funktionen $\phi_{s,\cdot} : M \to I\!R$ untersucht, die jedoch im konkreten Fall nicht gegeben sind. Es stellt sich aber heraus, daß diese Funktionen mit Zufallsvariablen, d.h. Funktionen $\Phi_{s,\cdot} : \Omega \to I\!R$ korrespondieren, die auf natürliche Weise mithilfe der bedingten Erwartung gegeben sind. Durch diese Korrespondenz ist es möglich, von Aussagen über Ereignisse der Form $\{B_t \in A\}$, also $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignisse, auf Eigenschaften der zugrundeliegenden Menge A zu schließen.
Sei $0 < s < t$, $A, B \in \mathcal{B}(M)$ meßbare Mengen mit positivem Maß. Dann ist (in lokalen Koordinaten)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[\{B_{t-s} \in A\} \cap \{B_t \in B\}] &= \int_A \int_B p(x_0, x, t-s)\ p(x,y,s)\ dydx \\
&= \int_A \left[\int_B p(x,y,s)dy\right]\ p(x_0,x,t-s)dx \\
&=: \int_A \phi_{s,B}(x) p(x_0,x,t-s)dx,
\end{aligned}$$

wobei x_0 der Startpunkt der Brownschen Bewegung ist. $\phi_{s,B}(x)$ ist also die Radon-Nikodym-Dichte zu

$$\mathbf{P}[\{B_{t-s} \in \cdot\} \cap \{B_t \in B\}],$$

die für alle $s > 0$ existiert, da die Wahrscheinlichkeit für Brownsche Bewegung, in einer beliebigen positiven Zeit zu einer Menge positiven Maßes zu gelangen, stets größer als Null ist.
Weiterhin gilt nach Korollar 3.8

$$\phi_{s,B} \xrightarrow{s \downarrow 0} \mathbb{1}_{\tilde{B}}(x).$$

Sei weiterhin $\Gamma = \{B_t \in B\} \in \mathcal{F}_{=t}$. Da die Brownsche Bewegung ein Markovprozeß ist, ist

$$\Phi_{s,\Gamma} := \mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma | \mathcal{F}_{t-s}]$$

eine $\mathcal{F}_{=(t-s)}$-meßbare Zufallsvariable ([Taira], S.323).
Für $\Theta = \{B_{t-s} \in A\} \in \mathcal{F}_{=(t-s)}$ ist

$$\begin{aligned}
\int_\Theta \Phi_{s,\Gamma}(\omega) d\mathbf{P}(\omega) &= \int_\Omega \mathbb{1}_\Theta \mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma | \mathcal{F}_{t-s}] d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma \mathbb{1}_\Theta | \mathcal{F}_{t-s}] d\mathbf{P}(\omega) \\
& \text{da } \Theta \in \mathcal{F}_{=(t-s)}, \text{ also } \mathbb{1}_\Theta \ \ \mathcal{F}_{t-s}\text{-meßbar ist} \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma \mathbb{1}_\Theta | \mathcal{F}_{t-s}]] = \mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma \mathbb{1}_\Theta] = \mathbf{P}[\Theta \cap \Gamma].
\end{aligned}$$

Insbesondere kann $\Phi_{s,\Gamma}$ also als Dichte zu $\mathbf{P}[\cdot \cap \Gamma]$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{=(t-s)})$ aufgefaßt werden, d.h. für $\mathcal{F}_{=(t-s)}$-Ereignisse ergibt sich das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "B_{t-s}"] \arrow[dr, "\Phi_{s,\Gamma}"'] & & M \arrow[dl, "\phi_{s,B}"] \\
& {[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

Dies ist die oben beschriebene Korrespondenz. Als erste Folgerung ergibt sich aus der Stetigkeit von $\phi_{s,A}$, daß für ein $\mathcal{F}_{=(t+s)}$-Ereignis Θ das $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignis

$$\Gamma = \Phi_{s,\Theta}^{-1}((a,b))$$

bis auf Nullmengen von der Form $\{B_t \in A\}$ ist, wobei A eine offene Menge ist. Umgekehrt läßt sich auch jedes derartige Ereignis auf diese Weise erhalten:

Lemma 3.11 *Sei $A \subset M$ offen, $\Gamma = \{B_{t-s} \in A\}$. Dann existiert eine meßbare Menge $C \subset M$, so daß für $\Theta = \{B_t \in C\}$*

$$\mathbf{P}[\Gamma \Delta \Phi_{\Theta,s}^{-1}((a,b))] = 0.$$

Beweis : Da A offen ist, ist $\tilde{\Omega} = \Gamma$ ein $\mathcal{F}_t$-Ereignis mit positivem Maß. Für $D \subset M$, $\lambda(D) > 0$ ist also

$$\tilde{\mathbf{P}}[\{B_t \in D\}] := \mathbf{P}[\{B_t \in D\}|\Gamma] > 0.$$

Es existiert also eine Radon-Nikodym-Dichte ϑ auf M mit $\tilde{\mathbf{P}}[\{B_t \in D\}] = \int_D \vartheta(x)dx$. Damit erfüllt $C := \vartheta^{-1}((\mathbf{P}[\Gamma]a, \mathbf{P}[\Gamma]b))$ die gewünschten Bedingungen. □

Daher kann im weiteren stets angenommen werden, daß bei Ereignissen der Form $\{B_t \in A\}$ die Menge A offen ist.

Definition 3.12 *1. Seien $\Xi, \Theta \in \mathcal{F}_{=t}$ Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit, $\mathbf{P}[\Xi \cap \Theta] = 0$.*
Ξ und Θ heißen im wesentlichen benachbart, falls gilt:
$\forall \epsilon > 0 : \exists s_0 > 0 : \forall s \in (0, s_0)$:

$$\mathbf{P}\left[\Phi^{-1}_{s,\Xi}((\frac{1}{2} - \epsilon, 1]) \cap \Phi^{-1}_{s,\Theta}((\frac{1}{2} - \epsilon, 1])\right] > 0.$$

2. Sei $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$, $\mathbf{P}[\Gamma] > 0$. Γ heißt im wesentlichen zusammenhängend, falls gilt: Sind $\Xi, \Theta \in \mathcal{F}_{=t}$ Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit, so daß $\mathbf{P}[\Xi \cap \Theta] = 0$ und $\mathbf{P}[\Gamma \Delta (\Xi \cup \Theta)] = 0$, so sind Ξ und Θ notwendigerweise im wesentlichen benachbart.

In dieser Definition lassen sich Ξ und Θ beliebig durch Nullmengen verändern, ohne daß die beschriebenen Eigenschaften verlorengehen. Es handelt sich also um eine „fast sicher“-Eigenschaft. Nur sind topologische Eigenschaften im allgemeinen keine „fast sicher“-Eigenschaften: Das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist zusammenhängend, $[0, 1] - \mathbb{Q}$ ist jedoch total unzusammenhängend, obwohl sich beide Mengen nur durch Nullmengen unterscheiden. Daher kommt es auf die Wahl des richtigen Repräsentanten modulo Nullmengen an, und es stellt sich heraus, daß dieser gerade die Menge der Lebesgue-Punkte ist: $(\widetilde{[0, 1] - \mathbb{Q}})$ ist tatsächlich zusammenhängend. Aus diesem Grunde wurde auch nicht die Formulierung „fast sicher zusammenhängend“ gewählt, da sie topologisch unsinnig ist, sondern „im wesentlichen“, die sich auf den richtigen Repräsentanten bezieht.

Satz 3.13 *Sei $A \in \mathcal{B}(M)$ mit $\lambda(A) > 0$. Dann gilt: Ist $\tilde{A}$ (weg-)zusammenhängend, so ist $\{B_t \in A\}$ im wesentlichen zusammenhängend.*

Beweis : Sei $\tilde{A}$ zusammenhängend, $\epsilon > 0$. Sei $\Gamma = \{B_t \in B\}$, $\Theta = \{B_t \in C\}$ eine Zerlegung von $\{B_t \in A\}$, d.h.
$\mathbf{P}[\Gamma] > 0$, $\mathbf{P}[\Theta] > 0$, $\mathbf{P}[\Gamma \cap \Theta] = 0$ und $\mathbf{P}[\{B_t \in A\}\Delta(\Gamma \cup \Theta)] = 0$. Dann folgt, daß auch $\lambda(A\Delta(B \cup C)) = 0$, $\lambda(B \cap C) = 0$, $\lambda(B) > 0$, $\lambda(C) > 0$. Bis auf Nullmengen gilt also $B \cup C = A$ und daher ist nach Bemerkung 2.7 $\widetilde{B \cup C} = \tilde{A}$.
Da $\tilde{A}$ zusammenhängend ist, gibt es einen Weg $w : [0, 1] \to \tilde{A}$, so daß

$$w(0) \in \tilde{B} \text{ und } w(1) \in \tilde{C}.$$

Da $Bild(w) \subset \tilde{A}$ ist, gilt für alle $q \in [0,1] : \rho_{\tilde{A}^c}(w(q)) = 0$. Da $\phi_{s,\tilde{A}^c}$ stetig ist für $(s,x) \in (0,\infty) \times M$ und $\lim_{s\downarrow 0} \phi_{s,\tilde{A}^c}|_{Bild(w)}$ existiert und stetig ist, gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{\phi}_{s,\tilde{A}^c}$ auf $Bild(w)$, die stetig ist für $(s,x) \in [0,\infty) \times Bild(w)$.
Sei $x \in Bild(w)$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{\phi}_{s,\tilde{A}^c}$ auf $Bild(w)$ und da $\tilde{\phi}_{0,\tilde{A}^c} = 0$, gibt es eine Umgebung (bezüglich der Teilraumtopologie von $Bild(w)$) $U(x)$ und ein $s_x > 0$, so daß für alle $s < s_x$ gilt: $\tilde{\phi}_{s,\tilde{A}^c}|_{U(x)} < \frac{\epsilon}{4}$. Da $Bild(w)$ kompakt ist, gibt es somit ein $s_1 > 0$, so daß für $s < s_1$ gilt: $\tilde{\phi}_{s,\tilde{A}^c}|_{Bild(w)} < \frac{\epsilon}{4}$.
Sei weiterhin $x \in Bild(w)$, $s < s_1$. Wegen der Stetigkeit von $\phi_{s,\tilde{A}^c}(x)$ gibt es eine offene Umgebung $U(x)$ in M, so daß $\phi_{s,\tilde{A}^c}|_{U(x)} < \frac{\epsilon}{2}$. Also gibt es für jedes $s < s_1$ eine offene Umgebung U_s von $Bild(w)$ mit $\phi_{s,\tilde{A}^c}|_{U_s} < \frac{\epsilon}{2}$.
Da $\phi_{s,B}+\phi_{s,C}+\tilde{\phi}_{s,\tilde{A}^c} = 1$ gilt, ist $(\phi_{s,B}+\phi_{s,C})|_{U_s} > 1-\frac{\epsilon}{2}$. Da weiterhin $\lim_{s\downarrow 0} \phi_{s,B}(w(0)) = 1$ und $\lim_{s\downarrow 0} \phi_{s,C}(w(1)) = 1$ gilt, gibt es ein $s_0 \leq s_1$, so daß für alle $s < s_0$ gilt:
$\phi_{s,B}(w(0)) > 1 - \frac{\epsilon}{2}$, $\phi_{s,C}(w(1)) > 1 - \frac{\epsilon}{2}$. Insbesondere gibt es für $s < s_0$ nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in Bild(w)$, so daß $\phi_{s,B}(x_0) = \phi_{s,C}(x_0) > \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Stetigkeit der ϕ und da $\phi_{s,\tilde{A}^c} < \frac{\epsilon}{2}$ in einer Umgebung von x_0 ist, gibt es eine offene Umgebung $V(x_0)$ mit $\phi_{s,B}|_{V(x_0)} > \frac{1}{2} - \epsilon$ und $\phi_{s,C}|_{V(x_0)} < \frac{1}{2} - \epsilon$.
Damit ist

$$\lambda(\phi_{s,B}^{-1}((\frac{1}{2} - \epsilon, 1]) \cap \phi_{s,C}^{-1}((\frac{1}{2} - \epsilon, 1])) > 0$$

und somit auch

$$\mathbf{P}\left[\Phi_{s,\Gamma}^{-1}((\frac{1}{2} - \epsilon, 1]) \cap \Phi_{s,\Theta}^{-1}((\frac{1}{2} - \epsilon, 1])\right] > 0. \qquad \square$$

Satz 3.14 *Sei M eine eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Maß λ, $A \in \mathcal{B}(M)$ mit $\lambda(A) > 0$. Dann gilt:*
Ist $\{B_t \in A\}$ im wesentlichen zusammenhängend, so ist $\tilde{A}$ zusammenhängend.

Beweis : Angenommen, $\tilde{A}$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $\tilde{A} = B \cup C$ in Zusammenhangskomponenten mit positivem Maß. Nun gilt: $dist(B,C) > 0$. Denn sonst gäbe es einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) \in B$, $\gamma(1) \in C$, so daß $\lambda(\gamma^{-1}((B \cup C)^c)) = 0$ wäre. Das würde bedeuten, daß B und C nur durch eine Nullmenge $N \in A^c$ getrennt würden. Da aber $\tilde{N} = \emptyset$ gilt, müßte $N \subset \tilde{A}$ sein, d.h. die Zerlegung wäre keine echte Zerlegung in Zusammenhangskomponenten.
Sei also $a = dist(B,C) > 0$. Nach Korollar 3.10 existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $s_0 > 0$, so daß für alle $s < s_0$ gilt:

$$\phi_{s,B}^{-1}((\epsilon, 1]) \subset U_{\frac{a}{3}}(B),$$

dabei ist $U_{\frac{a}{3}}(B)$ eine offene Umgebung von B mit Breite $\leq \frac{a}{3}$, d.h.

$$\sup_{x \in (U_{\frac{a}{3}}(B) - B)} dist(x, U_{\frac{a}{3}}(B)^c) \leq \frac{a}{3}.$$

Entsprechendes s_1 existiert auch für C, d.h. die Ereignisse $\{B_t \in B\}$ und $\{B_t \in C\}$ sind nicht im wesentlichen zusammenhängend. $\square$

Für $dim(M) \geq 2$ gilt nur eine Abschwächung vom letzten Satz:

Satz 3.15 *Sei M eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit mit Maß λ, $A \in \mathcal{B}(M)$ mit $\lambda(A) > 0$. Weiterhin sei $\{B_t \in A\}$ im wesentlichen zusammenhängend. Dann gilt:*
Ist $\{B_t \in B\} \cup \{B_t \in C\}$ eine Zerlegung von $\{B_t \in A\}$ mit $\mathbf{P}[\{B_t \in B\} \cap \{B_t \in C\}] = 0$, $\mathbf{P}[\{B_t \in B\}] > 0$, $\mathbf{P}[\{B_t \in C\}] > 0$, so ist $dist(\tilde{B}, \tilde{C}) = 0$, und für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma^{-1}([0, \frac{1}{2})) \subset \tilde{B}$, $\gamma^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \subset \tilde{C}$ und $\underline{d}(\gamma(\frac{1}{2}), A) > 1 - \epsilon$.

Beweis : Ist $dist(B, C) > 0$, so ist nach Korollar 3.10 $\{B_t \in A\}$ nicht im wesentlichen zusammenhängend (vgl. den Beweis von Satz 3.14). Ohne wesentliche Einschränkung sei $\tilde{A}$ in lokalen Koordinaten gegeben.
Sei also $dist(B, C) = 0$, aber für jeden derartigen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ sei
$\underline{d}(\gamma(\frac{1}{2}), A) \leq \delta < 1$.
Dann folgt nach Korollar 3.5, daß

$$\liminf_{s \downarrow 0} \phi_{s,A}(\gamma(\frac{1}{2})) \leq \delta' < 1$$

für alle derartigen Wege γ. Also ist

$$\limsup_{s \downarrow 0} \phi_{s,A^c}(\gamma(\frac{1}{2})) \geq 1 - \delta' > 0. \tag{3.1}$$

Setze $\epsilon = \frac{1-\delta}{5}$, $s_0 > 0$ beliebig, aber fest.
Wegen (3.1) existiert eine stetige injektive Abbildung $\psi : D^2 \to M$ so daß $\tilde{B}$ im Inneren von $\psi(D^2)$ liegt, $\lambda(\psi(D^2) \cap \tilde{C}) = 0$ gilt und $\limsup_{s \downarrow 0} \phi_{s,\tilde{A}^c}(x) > 5\epsilon$ für alle $x \in \psi(\partial D^2) = \psi(S^1)$.
Da $\psi(S^1)$ kompakt ist und $\phi_{s,A^c}|_{\psi(S^1)}$ stetig ist für alle $s > 0$, gibt es für jedes $x \in \psi(S^1)$ ein $s_1(x) < s_0$, so daß $\phi_{s,A^c}(x) > 4\epsilon$ für unendlich viele $s < s_1(x)$. Wegen der Stetigkeit gibt es dann eine Umgebung $U(x)$, offen in der Teilraumtopologie von $\psi(S^1)$, so daß $\phi_{s,A^c}|_{U(x)} > 3\epsilon$ für unendlich viele $s < s_1(x)$.
Aufgrund der Kompaktheit von $\psi(S^1)$ reichen bereits endlich viele derartige Umgebungen aus, und es gibt damit ein $s_1 > 0$, $s_1 < s_0$, so daß $\phi_{s,A^c}|_{\psi(S^1)} > 3\epsilon$ für unendlich viele $s < s_1$ ist.
Wegen der Stetigkeit von ϕ_{s,A^c} gibt es dann eine Umgebung $U(\psi(S^1))$, offen in M, so daß $\phi_{s,A^c}|_{U(\psi(S^1))} > 2\epsilon$ für unendlich viele $s < s_1$. Für $x \in (B \cup U(\psi(S^1)))^c$ ergibt Korollar 3.10, daß $\phi_{s,B}(x) < \frac{1}{2} - \epsilon$ für s hinreichend klein ist. Auf $U(\psi(S^1))$ bleibt ϕ_{s,A^c} größer als 2ϵ, daher ist dann $\{B_t \in A\}$ nicht im wesentlichen zusammenhängend. □

Korollar 3.16 *Seien $\{B_t \in B\}$ und $\{B_t \in C\}$ im wesentlichen benachbart. Dann gilt: Sind U und V zwei beliebige offene Umgebungen von B und C, d.h. $B \subset U$ und $dist(B, U^c) > 0$, $C \subset V$, $dist(C, V^c) > 0$, so ist $U \cap V \neq \emptyset$.* □

Kapitel 4

Der eindimensionale Fall

Mit den im vorigen Kapitel eingeführten Zusammenhängen zwischen $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen und den zugrundeliegenden Borel-Mengen läßt sich bereits die Filtration einer Brownschen Bewegung auf $I\!R$ von der einer Brownschen Bewegung auf S^1 unterscheiden. Diese Unterscheidung beruht auf einer einfachen Beobachtung: Überdeckt man S^1 (bis auf Nullmengen) durch disjunkte Intervalle, so ist jedes dieser Intervalle mit genau zwei anderen benachbart. Auf $I\!R$ hingegen sind die Intervalle $(-\infty, x)$ und (y, ∞) nur mit jeweils einem anderen Intervall benachbart.

Sei im folgenden $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ der Wahrscheinlichkeitsraum zu einer Brownschen Bewegung $B_t : \Omega \times I\!R_+ \to M$, wobei M eine eindimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, d.h. $M = S^1$ oder $M = I\!R$.

Lemma 4.1 *Sei $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$ ein im wesentlichen zusammenhängendes Ereignis, $\Gamma = \{B_t \in A\}$, $\mathbf{P}[\Gamma] > 0$, $\mathbf{P}[\Gamma^c] > 0$. Dann ist $\tilde{A}$ (homöomorph zu) ein offenes Intervall.*

Beweis : Sei zunächst $A \subset I\!R$. Da Γ im wesentlichen zusammenhängend ist, gilt für jede Zerlegung $\tilde{A} = B \cup C$ von A: $dist(\tilde{B}, \tilde{C}) = 0$ nach Satz 3.14. Ist insbesondere $\inf(\tilde{C}) \geq \sup(\tilde{B})$, so muß Gleichheit gelten, und $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ werden höchstens durch einen Punkt $x = \inf(\tilde{C}) \in A^c$ getrennt. Damit gilt aber $\rho_A(x) = 1$, d.h. $x \in \tilde{A}$. Für $y = \sup(\tilde{A})$ und $z = \inf(\tilde{A})$ gilt gerade $\rho_A(y) = \rho_A(z) = \frac{1}{2}$, d.h. $\tilde{A}$ ist ein offenes Intervall.
Für $M = S^1$ ist der Beweis analog nach zweimaligem Zerschneiden von S^1 an verschiedenen Stellen und nachfolgendem Betrachten in lokalen Koordinaten. □

Satz 4.2 *(1-dimensionale Klassifikation): Seien $\Gamma_1, \dots \Gamma_n \in \mathcal{F}_{=t}$ im wesentlichen zusammenhängende Ereignisse mit $n \geq 3$, $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0$, $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0 \quad \forall i \neq j$, $\mathbf{P}[\bigcup \Gamma_i] = 1$.
Dann gilt: Gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein j und ein $k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k \neq i \neq j$, so daß Γ_i und Γ_j sowie Γ_i und Γ_k im wesentlichen benachbart sind, so ist $M = S^1$.
Ist hingegen mindestens eins der Ereignisse $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ nur mit einem anderen Ereignis im wesentlichen benachbart, so ist $M = I\!R$.*

Beweis : Jedes Γ_i hat die Form $\{B_t \in A_i\}$, wobei $\tilde{A}_i$ nach Lemma 4.1 ein offenes Intervall ist. Weiterhin gilt nach Satz 3.14
Γ_i und Γ_j im wesentlichen benachbart $\Leftrightarrow \quad dist(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = 0$.

Seien nun B_i zusammenhängende offene Intervalle, so daß gilt:

1. $\tilde{A}_i \subset B_i$ und $dist(x, B_i^c) > 0 \ \ \forall x \in \tilde{A}_i$

2. $dist(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) > 0 \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

Dann gilt für Γ_i und Γ_j, daß $B_i \cap B_j = \emptyset$ genau dann, wenn Γ_i und Γ_j nicht im wesentlichen benachbart sind, vgl. Korollar 3.16.
Da die B_i zusammenhängende Intervalle sind, bilden sie eine Leray-Überdeckung von M, d.h. ihre Cech-Homologie ist die Homologie von M. Nun gilt $\check{H}_1(S^1; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, d.h. es muß mindestens einen Erzeuger für Z_1 geben. Dies ist nur dann möglich, wenn jedes B_i mit mindestens zwei anderen (B_j und B_k) nicht-leeren Schnitt hat. Nach Konstruktion der B_i bedeutet das aber gerade, daß Γ_i mit mindestens zwei weiteren Ereignissen (Γ_j und Γ_k) im wesentlichen benachbart sein muß.
Weiterhin hat nach Konstruktion jedes B_i mit höchstens zwei anderen Überdeckungsmengen nicht-leeren Schnitt, und es gibt keine drei B_i, B_j, B_k mit $B_i \cap B_j \cap B_k \neq \emptyset$ für $i \neq j \neq k \neq i$, daher ist C_2 und damit auch $B_1 = \{0\}$.
Da $H_1(\mathbb{R}) = \{0\}$ ist, muß also für $M = \mathbb{R}$ auch $Z_1 = \{0\}$ sein, d.h. es darf keinen 1-Zykel geben. Dies bedeutet, daß mindestens ein B_i nur mit einem anderen B_j nicht-leeren Schnitt haben darf, und dies entspricht gerade der geforderten Bedingung. $\square$

Kapitel 5

2-dimensionale Klassifikation

Im Fall von Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 2 ist die Unterscheidung anhand von $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen nicht so einfach wie im eindimensionalen Fall. Dies liegt vor allem daran, daß Punkte auf der Mannigfaltigkeit zu mehr als zwei (offenen) Mengen verschwindenden Abstand haben können. Daher reicht es nicht mehr aus, nur Paare von benachbarten Mengen zu betrachten. Im zweidimensionalen Fall ist es im allgemeinen notwendig, daß Punkte in der Mannigfaltigkeit zu drei verschiedenen Mengen verschwindenden Abstand haben; dies entspricht gerade der Tatsache, daß bei geschlossenen 2-Mannigfaltigkeiten die zweite Cech-Homologiegruppe nicht verschwindet. Dies führt zum Begriff der im wesentlichen 3-benachbarten Ereignisse.

Sei im folgenden M stets eine kompakte, geschlossene, zusammenhängende Riemannsche 2-Mannigfaltigkeit, $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ der Wahrscheinlichkeitsraum zu einer Brownschen Bewegung auf M.
Ereignisse $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$ seien stets von der Form $\Gamma = (\mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{B_{t+s} \in A\}} | \mathcal{F}_t])^{-1}((a,b))$, d.h. bis auf Nullmengen ist jedes Γ von der Form $\Gamma = \{B_t \in C\}$ mit einer offenen Menge $C \subset M$.

Definition 5.1 *Seien Γ_1, Γ_2, Γ_3 drei $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignisse derart, daß $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0 \quad \forall i$, $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0 \quad \forall i \neq j$ gilt.*
Die Ereignisse Γ_1,Γ_2,Γ_3 heißen im wesentlichen 3-benachbart, falls gilt:
$\forall \epsilon > 0 : \exists s_0 > 0 : \forall s < s_0 :$

$$\mathbf{P}\left[\Phi^{-1}_{s,\Gamma_1}((\frac{1}{3} - \epsilon, 1]) \cap \Phi^{-1}_{s,\Gamma_2}((\frac{1}{3} - \epsilon, 1]) \cap \Phi^{-1}_{s,\Gamma_3}((\frac{1}{3} - \epsilon, 1])\right] > 0.$$

Satz 5.2 *Sei $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$, A_i zusammenhängend für $i \in \{1, \ldots, 3\}$. Angenommen, es existiert ein $x_0 \in M$ und eine offene Umgebung U von x_0 derart, daß für jede offene Umgebung V von x_0 mit $V \subset U$ gilt: $\lambda(V \cap A_i) > 0$ und $\lambda(V \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 0$, dann sind die Γ_i im wesentlichen 3-benachbart.*

Beweis : Sei $\epsilon > 0$, $A := A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung U von x_0 mit kompaktem Abschluß $\bar{U}$,

die einfach zusammehängend ist, da M als lokal-euklidischer Raum lokal einfach zusammenhängend ist derart, daß gilt:

1. $dist(\bar{U}, A^c) > 0$
2. $\lambda(U \cap A_i) > 0 \quad \forall i.$

Aus 1. folgt, daß ein $s_0 > 0$ existiert, so daß

$$\forall s < s_0 \quad \forall x \in \bar{U}: \quad \phi_{s,A^c}(x) < \epsilon$$

wegen der Stetigkeit von ϕ_{s,A^c} und der Kompaktheit von $\bar{U}$. Aus 2. folgt:

$$\forall a < 1: \quad \exists s_i > 0: \quad \forall s < s_i: \quad \exists x_i \in U: \quad \phi_{s,A_i}(x_i) > a.$$

Daraus folgt, daß ein s_U existiert, so daß für alle $s < s_U$ gilt, daß die $C_{i,s} := U \cap \phi_{s,A_i}^{-1}((\frac{1}{3} - \epsilon, 1])$ nicht-leer sind und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von U bilden. Sei nun $B_{i,s}$ eine Zusammenhangskomponente von $C_{i,s}$. Durch Wahl eines geeigneten $s_4 < s_U$ ergibt sich für alle $s < s_4$, daß aus $B_{i,s} \cap B_{j,s} \neq \emptyset$ für $i \neq j$ folgt, daß ein $B_{k,s}$ existiert mit $i \neq k \neq j$ und $B_{i,s} \cap B_{k,s} \neq \emptyset$. Insbesondere sind damit die $B_{i,s}$ einfach zusammenhängend, bilden also eine Leray-Überdeckung von U.
Nun ist $[C_{1,s}, C_{2,s}] + [C_{2,s}, C_{3,s}] + [C_{3,s}, C_{1,s}]$ ein Zykel in $Z_1(\mathcal{U})$, und da die B_i eine Leray-Überdeckung bilden und U einfach zusammenhängend ist, muß $C_{1,s} \cap C_{2,s} \cap C_{3,s} \neq \emptyset$ gelten.
Da die drei Mengen offen sind, ist ihr Schnitt ebenfalls offen, d.h. $\lambda(C_1 \cap C_2 \cap C_3) > 0.$ □

Satz 5.3 *Seien $\Gamma_i \in \mathcal{F}_{=t}$, $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben, so daß $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0$, $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0$ für $i \neq j$ und Γ_1, Γ_2, Γ_3 im wesentlichen 3-benachbart sind. Dann existiert ein $x_0 \in M$, so daß gilt:*

1. *Für alle offenen Umgebungen U von x_0 ist $\lambda(U \cap A_i) > 0$*
2. *Ist $A := A_1 \cup A_2 \cup A_3$, so ist $\rho_{A^c}(x_0) = 0$, d.h. $\rho_A(x_0) = 1$.*

Beweis : Ohne wesentliche Einschränkung kann angenommen werden, daß eine Umgebung von A innerhalb einer Karte liegt, d.h. das Phänomen kann in lokalen Koordinaten betrachtet werden.
Wenn kein x_0 existiert, so daß $dist(x_0, \tilde{A}_i) = 0$ für alle i ist, so können die Γ_i nicht im wesentlichen 3-benachbart sein. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Satz 3.15. Insbesondere ist dann x_0 für hinreichend kleines s zumindest Randpunkt der offenen Menge

$$\phi_{s,A_1}^{-1}((\frac{1}{3} - \epsilon, 1]) \cap \ldots \cap \phi_{s,A_3}^{-1}((\frac{1}{3} - \epsilon, 1]),$$

die nach Voraussetzung nicht leer ist.
Da dies für jedes ϵ und alle $s > 0$ hinreichend klein gelten muß, muß $\phi_{s,A^c}(x_0) \xrightarrow{s \downarrow 0} 0$ gelten, d.h. $\rho_{A^c}(x_0) = 0$. □

Die Definition von im wesentlichen 3-benachbarten Ereignissen und die damit verbundenen Eigenschaften sind analog zu den entsprechenden Aussagen für im wesentlichen benachbarte Ereignisse. Sie beschreiben das Phänomen, daß drei Mengen sich in einem Punkt berühren. Im zweidimensionalen Fall läßt sich dies jedoch nicht auf mehr als drei Mengen verallgemeinern. Um daher den Fall zu behandeln, in dem vier oder mehr Mengen – etwa wie die Stücke einer zerschnittenen Torte – sich in einem Punkt berühren, müssen andere Methoden verwendet werden. Zu diesem Zwecke werden zunächst im wesentlichen einfach zusammenhängende Ereignisse eingeführt.

Satz 5.4 *Sei $\Gamma = \{B_t \in A\}$ ein im wesentlichen zusammenhängendes $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignis mit $\mathbf{P}[\Gamma] > 0$ und $\mathbf{P}[\Gamma^c] > 0$. Dann gilt:*
Folgt für jede Zerlegung $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ von im wesentlichen zusammenhängenden $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$, so daß $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0$, $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0$ für $i \neq j$ und Γ_i und Γ_j im wesentlichen benachbart $\forall i \neq j$, daß Γ_1, Γ_2, Γ_3 im wesentlichen 3-benachbart sind, so ist $\tilde{A}$ einfach zusammenhängend.

Beweis : Ohne wesentliche Einschränkung sei $\tilde{A}$ in lokalen Koordinaten gegeben. Sei $\tilde{A}$ nicht einfach zusammenhängend. Da A eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, gilt für die Homologiegruppen (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$) $H_n(\tilde{A}) = 0$ für $n \geq 2$. Demnach muß also $H_1(\tilde{A}) \neq 0$ sein. Es existiert also eine Leray-Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)$ von in $\tilde{A}$ offenen Mengen U_i, so daß gilt:

1. $H_1(\mathcal{U}) \neq 0$
2. $\forall i : \exists x \in \tilde{A}$ und eine Umgebung V von x, so daß $V \subset U_i$, aber $V \cap U_j = \emptyset \quad \forall j \neq i$
3. $U \cap V = \emptyset \Rightarrow dist(U, V) > 0$.

Bedingung 2. verhindert nur eine Redundanz der Überdeckung, d.h. jedes U_i wird auch zum Überdecken gebraucht.
Da nach 1. $H_1(\mathcal{U}) \neq 0$ gilt, existiert also ein Zykel $\sigma \in Z_1(\mathcal{U})$ mit $\sigma \notin B_1(\mathcal{U})$. Dieses σ hat die Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i [U_{1,i}, U_{2,i}] \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{Z}, a_i \neq 0, \partial\sigma = 0.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{a_i > 0} \sum_{j=1}^{a_i} [U_{1,i}, U_{2,i}] + \sum_{a_i < 0} \sum_{j=1}^{-a_i} [U_{2,i}, U_{1,i}] \\ &=: \sum_{k=1}^{N} [U_{1,k}, U_{2,k}] \end{aligned}$$

und die Bedingung $\partial\sigma = 0$ wird zu

$$\sum_{k=1}^{N} ([U_{1,k}] - [U_{2,k}]) = 0.$$

Dies bedeutet, daß jedes U_k an erster Stelle genauso häufig auftreten muß wie an zweiter Stelle. Daher läßt sich σ schreiben als $\sigma = \sum \sigma_i$ mit

$$\sigma_i = [U_{1,i}, U_{2,i}] + [U_{2,i}, U_{3,i}] + \ldots + [U_{n,i}, U_{1,i}].$$

Da σ ein Zykel in $C_1(\mathcal{U})$, aber kein Rand ist, muß dies zumindest auch für eines der σ_i gelten, also ohne wesentliche Einschränkung für σ_1, das nach Umnumerierung geschrieben wird als

$$\sigma_1 = [U_1, U_2] + [U_2, U_3], + \ldots + [U_n, U_1].$$

Weiterhin kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß der Zykel σ_1 minimal in dem Sinne ist, daß $U_1 \cap U_k = \emptyset$ gilt für $k < n$. Falls nämlich $U_1 \cap U_k = \emptyset$ für $k > 2$ und $k < n$ gälte, so zerfiele σ_1 in

$$([U_1, U_2] + \ldots + [U_k, U_1]) + ([U_1, U_k] + [U_k, U_{k+1}] + \ldots + [U_n, U_1]),$$

wobei mindestens einer dieser beiden Zykel kein Rand sein dürfte. Sei nun $n \geq 4$ und die Überdeckung werde erweitert durch $U_2 \cup U_3$. Dann ist

$$\sigma_1 = [U_1, U_2] + [U_2, U_3] + \ldots + [U_n, U_1]$$

weiterhin ein Zykel, bleibt es also auch durch Addition des Randes

$$\partial([U_1, U_2 \cup U_3, U_2] + [U_2 \cup U_3, U_4, U_3] + [U_2 \cup U_3, U_2, U_3]),$$

wobei natürlich sämtliche drei Summanden Elemente von $C_2(\mathcal{U} \cup \{U_2 \cup U_3\})$ sind. Nach Addition hat σ_1 die Gestalt

$$\sigma_1 = [U_1, U_2 \cup U_3] + [U_2 \cup U_3, U_4] + \ldots + [U_n, U_1]$$

und ist damit auch wieder ein Zykel nach Entfernen von U_2 und U_3 aus der Überdeckung (die danach nicht notwendigerweise eine Leray-Überdeckung zu sein braucht).
Durch sukzessives Wiederholen dieser Prozedur läßt sich σ_1 auf die Gestalt

$$\sigma_1 = [U_1, U_2] + [U_2, U_3] + [U_3, U_1]$$

mit neuen Mengen U_i bringen.
Da σ_1 ein Zykel, aber kein Rand ist, gibt es keine Menge U aus der verbleibenden Überdeckung, die nicht-leeren Schnitt mit sämtlichen der drei Mengen U_1,U_2,U_3 hat. Angenommen, ein $U \in \mathcal{U}$ habe nicht-leeren Schnitt mit U_2. Durch Wiederholen der oben angeführten Prozedur läßt sich σ_1 verändern zu

$$\sigma_1 = [U_1, \hat{U}_2] + [\hat{U}_2, U_3] + [U_3, U_1],$$

wobei $\hat{U}_2 := U_2 \cup U$.
Am Ende erhält man damit eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ von $\tilde{A}$ durch offene Mengen, die paarweise nicht-leeren Schnitt haben, für die aber $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$ gilt.
Setze nun $A_1 := U_1$, $A_2 := U_2 - U_1$ und $A_3 := U_3 - (U_1 \cup U_2)$. Nach Bedingung 2. sind die A_i nicht-leer und besitzen innere Punkte bezüglich der Teilraumtopologie von $\tilde{A}$.

Sei x_i innerer Punkt (bezüglich der Teilraumtopologie) von $\tilde{A}_i$. Da $\rho_{\tilde{A}}(x_i) = 1$ gilt, ist auch $\rho_{A_i}(x_i) = 1$, insbesondere also $\lambda(A_i) > 0$ und damit

$$\mathbf{P}[\{B_t \in A_i\}] > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Nach Konstruktion sind sämtliche $\Gamma_i := \{B_t \in A_i\}$ im wesentlichen benachbart, aber sind nach Bedingung 3. nicht im wesentlichen 3-benachbart. Dies bedeutet einen Widerspruch.
□

Satz 5.5 *Sei $\Gamma = \{B_t \in A\}$ ein $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignis, $\mathbf{P}[\Gamma] > 0$. Seien weiterhin $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ drei $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignisse mit $\mathbf{P}[\Gamma\Delta(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)] = 0$, $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0 \ \ \forall i \neq j$ und $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0 \ \ \forall i$, so daß zusätzlich Γ_i und Γ_j im wesentlichen benachbart sind und Γ_i und Γ^c im wesentlichen benachbart sind. Dann gilt:*
Ist $\tilde{A}$ einfach zusammenhängend und $\tilde{A} \cap \partial\tilde{A} = \emptyset$, so sind die Γ_i im wesentlichen 3-zusammenhängend.

Beweis : Da $\tilde{A}$ einfach zusammenhängend und offen ist, ist es nach dem Riemannschen Abbildungssatz biholomorph abbildbar auf die offene Einheitskreisscheibe:

$$f : \tilde{A} \overset{\cong}{\to} D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Da die Γ_i und Γ^c im wesentlichen benachbart sind, gibt es Punkte $x_i \in \partial D^2$, so daß $\rho_{A_i \cup A^c}(f^{-1}(x_i)) > 1 - \epsilon$. Angenommen, es gäbe ein x_4 auf dem Kreisbogen zwischen x_1 und x_3, auf dem x_2 nicht liegt, so daß $dist(f^{-1}(x_4), \tilde{A}_2) = 0$ gälte, dann müßte für $f^{-1}(x_4) = y$ gelten, daß $\rho_{A_1 \cup A_3}(y) = 1$, da ansonsten Γ_1 und Γ_3 nicht im wesentlichen benachbart wären. Insbesondere gilt damit auch $\rho_A(y) = 1$. Da aber $\tilde{A} \cap \partial\tilde{A} = \emptyset$, kann dieses x_4 nicht existieren. Durch Vertauschen der Indizes ergibt sich, daß ein Punkt $x_0 \in \tilde{A}$ existieren muß, so daß $dist(x_0, \tilde{A}_i) = 0 \ \ \forall i$ gilt. Da $\tilde{A}$ offen ist, ergibt sich $dist(x_0, \tilde{A}^c) > 0$, und damit sind die Γ_i im wesentlichen 3-benachbart. □

Definition 5.6 *Ein Ereignis $\Gamma \in \mathcal{F}_{=t}$ wie im vorhergehenden Satz heißt im wesentlichen einfach zusammenhängend.*

Bemerkung 5.7 *Aus dem letzten Satz folgt: Ist $x \in M$, U eine offene Umgebung von x, dann existiert eine offene Umgebung A von x mit $A \subset U$ so, daß $\{B_t \in A\}$ im wesentlichen einfach zusammenhängend ist. Es gibt demnach genug im wesentlichen einfach zusammenhängende Ereignisse.* □

Mit Hilfe der im wesentlichen einfach zusammenhängenden Ereignisse ist es nun möglich, den Fall zu erkennen, in dem mehr als drei Mengen sich in einem Punkt x_0 berühren: Man legt einfach eine hinreichend kleine offene Umgebung U um x_0, und die Schnitte $U \cap A_i$ liegen in U wie die oben genannten Tortenstücke: Jedes ist mit genau zwei anderen benachbart.

Satz 5.8 *Seien* $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\} \in \mathcal{F}_{=t}$, $i \in \{1,\ldots,k\}$ k *im wesentlichen zusammenhängende* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignisse,* $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0 \;\; \forall i$, $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0 \;\; \forall i \neq j$ *und*
$\Gamma = \{B_t \in A\} \in \mathcal{F}_{=t}$ *ein im wesentlichen einfach zusammenhängendes Ereignis mit* $\mathbf{P}[\Gamma] > 0$, *so daß gilt*

1. $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma] > 0 \;\; \forall i$ *und* $\Gamma_i \cap \Gamma$ *ist im wesentlichen zusammenhängend*
2. $\Gamma_i \cap \Gamma$ *und* $\Gamma_j \cap \Gamma$ *sind im wesentlichen benachbart genau dann, wenn* $i - j \equiv \pm 1 \mod k$
3. $\Gamma_i \cap \Gamma$ *und* Γ^c *sind im wesentlichen benachbart.*

Dann gilt: Es existiert ein $x_0 \in \tilde{A}$ *so, daß* $dist(x_0, \tilde{A}_i) = 0 \;\; \forall i$.

Beweis : Sei zunächst $k = 4$. Seien U_i offene Umgebungen von $\widetilde{A_i \cap A}$ in $\tilde{A}$. Nach Voraussetzung gilt $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ für $i - j \equiv \pm 1 \bmod k$. Daher ist

$$z = [U_1, U_2] + [U_2, U_3] + [U_3, U_4] + [U_4, U_1]$$

ein Zykel auf $\tilde{A}$, d.h. $z \in Z_1(\mathcal{U})$, wobei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \leq 4}$. Da $\tilde{A}$ einfach zusammenhängend ist, ist es homotopieäquivalent zu einem Punkt. Sei $\tilde{\mathcal{U}}$ die Überdeckung des einpunktigen Raumes durch vier Mengen, d.h. $\tilde{\mathcal{U}} = \{\{x\}, \{x\}, \{x\}, \{x\}\} = \{\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_4\}$. Nach [Rinow], (51.7), induziert die Abbildung $\tilde{A} \to \{x\}$, $U_i \mapsto \tilde{U}_i$ denselben Homomorphismus auf $H_1(\mathcal{U})$ wie $id_{\{x\}}$. Da aber $H_1(\tilde{\mathcal{U}}) = 0$, muß auch $H_1(\mathcal{U}) = 0$ sein, d.h. $Z_1(\mathcal{U}) = B_1(\mathcal{U})$. Demnach muß z auch ein Rand sein, das heißt (eventuell nach Umnumerierung) ist

$$z = \partial([U_1, U_2, U_3] + [U_3, U_4, U_1]).$$

Insbesondere haben also U_1,U_2,U_3 nicht-leeren Schnitt. Durch Verkleinern der Umgebungen erhält man ein x_0, so daß $dist(x_0, \tilde{A}_i) = 0$ für $i \leq 3$. Da A_1,A_2,A_3 nach Voraussetzung nicht im wesentlichen 3-zusammenhängend sind, muß auch $dist(x_0, \tilde{A}_4) = 0$ gelten. Sei nun $k > 4$. Dann ist $z = [U_1, U_2] + [U_2, U_3] + \ldots + [U_k, U_1]$ ein Zykel für Umgebungen U_i von $\widetilde{A_i \cap A}$ in $\tilde{A}$. Dann ist aber (nach Umnumerieren)

$$z = \partial([U_1, U_2, U_3]) + [U_1, U_3] + [U_3, U_4] + \ldots + [U_k, U_1],$$

und damit ist das Problem auf den Fall $k - 1$ zurückgeführt. □

Wie sieht es aus bei einfach zusammenhängenden Mengen $\tilde{A}$, bei denen $\partial \tilde{A} \cap \tilde{A} \neq \emptyset$ ist? Sei x_0 ein Randpunkt von $\tilde{A}$ mit $\rho_A(x_0) = 1$. Dann existieren Mengen A_1,A_2,A_3, so daß $\rho_{A_1 \cup A_2}(x_0) = 1$ ist und sämtliche $\Gamma_i := \{B_t \in A_i\}$ im wesentlichen benachbart sind, aber für jedes $y \neq x_0$ mit $dist(y, \tilde{A}_1) = 0$ automatisch $dist(y, \tilde{A}_2) > 0$ ist.

Satz und Definition 5.9 *Sei* $\Gamma = \{B_t \in A\} \in \mathcal{F}_{=t}$ *im wesentlichen einfach zusammenhängend. Für jedes Tripel* $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\} \in \mathcal{F}_{=t}$ *im wesentlichen zusammenhängender Ereignisse mit*

1. $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0$ *und* $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0$ *für* $i \neq j$

2. $\mathbf{P}[\Gamma \Delta (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)] = 0$

3. Γ_i *und* Γ_j *sind im wesentlichen benachbart für* $i \neq j$

4. Γ_i *und* Γ^c *sind im wesentlichen benachbart für alle* i

gelte: Sind $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{F}_{=t}$ *zwei im wesentlichen zusammenhängende* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignisse mit* $\mathbf{P}[\Theta_i] > 0$, $\mathbf{P}[\Theta_1 \cap \Theta_2] = 0$, $\mathbf{P}[\Gamma_1 \Delta (\Theta_1 \cup \Theta_2)] = 0$, *so sind* Θ_1 *und* Θ_2 *im wesentlichen benachbart, und jedes* Θ_i *ist entweder mit* Γ_2 *oder* Γ_3 *im wesentlichen benachbart.*
Dann gilt: $\tilde{A} \cap \partial \tilde{A} = \emptyset$.
In diesem Falle heißt Γ *ein zulässiges im wesentlichen einfach zusammenhängendes Ereignis.*

Im wesentlichen einfach zusammenhängende Ereignisse werden im folgenden stets als zulässig vorausgesetzt.

Beweis : Sei $\tilde{A}$ wie in der Vorbemerkung, d.h. $x_0 \in \partial \tilde{A}$, $\rho_A(x_0) = 1$, mit entsprechenden Mengen A_i. Zerlege $A_1 = A_{1,1} \cup A_{1,2}$ derart, daß $\rho_{A_{1,1} \cup A_2}(x_0) < 1$, $\rho_{A_{1,2} \cup A_2}(x_0) < 1$ und setze $\Theta_i = \{B_t \in A_{1,i}\}$. Dann sind die beiden Θ_i nicht mehr mit Γ_2 im wesentlichen benachbart und nur eines der Θ_i ist mit Γ_3 im wesentlichen benachbart. □

Definition 5.10 *Seien* $\Gamma_i \in \mathcal{F}_{=t}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ k *im wesentlichen zusammenhängende* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignisse,* $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0$, $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0$ *für* $i \neq j$, $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$.
Die Γ_i *heißen im wesentlichen k-benachbart, falls ein zulässiges im wesentlichen einfach zusammenhängendes* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignis* Θ *existiert, so daß gilt*

1. $\mathbf{P}[\Theta \cap \Gamma_i] > 0$

2. *Nach Umnumerieren gilt:* $\Theta \cap \Gamma_i$ *und* $\Theta \cap \Gamma_j$ *sind genau dann im wesentlichen benachbart, wenn gilt* $i - j \equiv \pm 1$ *mod* k.

Satz 5.11 *Seien* $\Gamma_i \in \mathcal{F}_{=t}$ *wie in Definition 5.10. Ferner seien die* Γ_i *im wesentlichen k-benachbart. Dann gilt: Es existiert ein* $x_0 \in M$ *mit* $dist(x_0, \tilde{A}_i) = 0 \;\; \forall i$,
$dist(x_0, (\widetilde{\bigcup A_i})^c) > 0$.

Beweis : Sei $\Theta = \{B_t \in A\}$ und U_i Umgebungen von $\widetilde{A_i \cap A}$, offen bezüglich der Teilraumtopologie von $\tilde{A}$. Nach Voraussetzung ist dann $c := [U_1, U_2] + [U_2, U_3] + \ldots + [U_k, U_1]$ ein Zykel in $H_1(A)$, und da $\tilde{A}$ einfach zusammenhängend ist, muß c auch ein Rand sein. Daher existieren mindestens drei Indizes i_1, i_2, i_3, so daß $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap U_{i_3} \neq \emptyset$ für sämtliche offenen Umgebungen U_{i_j} von $\widetilde{A \cap A_{i_j}}$ in $\tilde{A}$. Durch Verkleinern dieser Umgebungen erhält man ein $x_0 \in M$, so daß $dist(x_0, \tilde{A}_{i_j}) = 0$ für $j \leq 3$ ist. Da Θ zulässig war, ist auch $dist(x_0, \tilde{A}^c) > 0$. Wäre schließlich $dist(x_0, \tilde{A}_{i_0}) > 0$ für einen Index i_0, so wären $\Gamma_{i_0 - 1}$ und $\Gamma_{i_0 + 1}$ im wesentlichen benachbart im Widerspruch zu den Voraussetzungen. □

Definition 5.12 *Seien* $\Gamma_i, i \in \{1, \ldots, k\}$ *im wesentlichen k-benachbart wie im vorigen Satz. Ein virtuelles Ereignis* Γ_0 *ist ein formales* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignis, so daß*

1. Γ_0 *und* Γ_i *im wesentlichen benachbart sind für alle* $i \leq k$

2. Γ_0 *und* $(\bigcup \Gamma_i)^c$ *nicht im wesentlichen benachbart sind.*

Der Sinn der virtuellen Ereignisse ist folgender: Sind $\{B_t \in A_i\}$ im wesentlichen k-benachbart und U_i offene Umgebungen von $\tilde{A}_i$, so gilt $\bigcap U_i \neq \emptyset$. Zu jeder offenen Überdeckung von M gibt es jedoch eine Verfeinerung, bei der nicht mehr als drei Mengen nicht-leeren Schnitt haben. Im konkreten Fall würde die Verfeinerung aus Teilmengen der U_i bestehen sowie einer zusätzlichen Menge $U_0 \subset \bigcap U_i$. Diese Menge U_0 entspricht dann gerade dem virtuellen Ereignis.

Definition 5.13 *1. Eine Überdeckung* $\mathbf{U} = \{\Gamma_i\}_{i \leq N}$ *von* Ω *durch* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignisse besteht aus einer Familie von* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignissen* Γ_i*, so daß gilt:*

1. $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0 \quad \forall i \leq N$
2. $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0 \quad \forall i \neq j$
3. $\mathbf{P}[\bigcup \Gamma_i] = 1$
4. *Jedes* Γ_i *ist im wesentlichen zusammenhängend*

2. Eine Überdeckung $\mathbf{U} = \{\Gamma_i\}_{i \leq N}$ *heißt zulässig, falls gilt:*
Sind $\Gamma_i \in \mathbf{U}, i \in \{1, \ldots, k\}, k \geq 4$ *gegeben und* $\Theta_i^j, i \leq k, j \leq l_i$ *ist eine Zerlegung der* Γ_i*, d.h.*

$$\mathbf{P}[\Theta_i^j \cap \Theta_i^m] = 0 \text{ für } j \neq m,\ \mathbf{P}[\Gamma_i \Delta \bigcup_{j=1}^{l_i} \Theta_i^j] = 0,$$

so daß die Θ_i^j *im wesentlichen* $k \cdot l_i$*-zusammenhängend sind, so sind bereits die* Γ_i *im wesentlichen k-zusammenhängend.*

Im folgenden seien die virtuellen Ereignisse ebenfalls Elemente der zulässigen Überdeckungen.

Bemerkung 5.14 *Ist* $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}, \Theta_i^j = \{B_t \in A_i^j\}$*, so besagt die Bedingung gerade, daß wenn sämtliche* $\tilde{A}_i^j$ *Abstand Null zu einem Punkt* x_0 *haben, damit also auch sämtliche* $\tilde{A}_i$*, dies für die* Γ_i *auch erkannt wird, in anderen Worten:* $\rho_{A_i}(x_0) > 0$ *für mindestens drei* A_i *oder zwei benachbarte* A_i*.*

Lemma 5.15 *Zu jeder Überdeckung* $\mathbf{U}$ *gibt es eine Verfeinerung* $\mathbf{V}$*, die eine zulässige Überdeckung ist.*

Beweis : Ist $\mathbf{U} = \{\{B_t \in A_i\}\}$ und für ein $x_0 \in M$ ist $dist(x_0, \tilde{A}_i) = 0$ für $i \leq k \geq 3$, dann zerlege die A_i in A_i^j, so daß $\rho_{A_i^j}(x_0) < \frac{1}{2} \quad \forall i, j$. $\square$

Für die zulässigen Überdeckungen lassen sich nun Homologiegruppen definieren, und es stellt sich heraus, daß diese gerade mit in natürlicher Weise dazu assoziierten Cech-Homologiegruppen der Mannigfaltigkeit übereinstimmen.

Definition 5.16 *Sei* $\mathbf{U} = \{\Gamma_i\}_{i \leq N}$ *eine zulässige Überdeckung von* Ω *durch im wesentlichen zusammenhängende* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignisse.*

1. *Die zweite Kettengruppe* $C_2(\mathbf{U})$ *ist definiert als der freie* $\mathbb{Z}/2$*-Vektorraum, der erzeugt wird von*
   1. ungeordneten Tripeln $[\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k]$, *wobei* $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k$ *im wesentlichen 3-benachbart sind, und*
   2. ungeordneten Tripeln $[\Gamma_i, \Gamma_{i+1}, \Gamma_0]$, *wobei* Γ_i, Γ_{i+1} *zu einer Menge* $\{\Gamma_i\}_{i \leq k}$ *von im wesentlichen k-benachbarten Ereignissen gehören, wobei* $k \geq 4$ *ist, und* Γ_0 *das zugehörige virtuelle Ereignis ist.*

2. *Die erste Kettengruppe* $C_1(\mathbf{U})$ *ist definiert als der freie* $\mathbb{Z}/2$*-Vektorraum, der erzeugt wird von ungeordneten Paaren* $[\Gamma_i, \Gamma_j]$, *wobei* Γ_i *und* Γ_j *im wesentlichen benachbarte Ereignisse sind, von denen maximal eines ein virtuelles Ereignis ist.*

3. *Die nullte Kettengruppe* $C_0(\mathbf{U})$ *ist der freie* $\mathbb{Z}/2$*-Vektorraum, erzeugt von* $[\Gamma_i]$, *wobei* Γ_i *ein (evtl. virtuelles) Ereignis ist.*

4. *Der Randhomomorphismus* $\partial_2 : C_2(\mathbf{U}) \to C_1(\mathbf{U})$ *ist definiert auf Erzeugern durch* $[\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k] \mapsto [\Gamma_i, \Gamma_j] + [\Gamma_j, \Gamma_k] + [\Gamma_k, \Gamma_i]$.

5. *Der Randhomomorphismus* $\partial_1 : C_1(\mathbf{U}) \to C_0(\mathbf{U})$ *ist definiert auf Erzeugern durch* $[\Gamma_i, \Gamma_j] \mapsto [\Gamma_i] + [\Gamma_j]$.

6. *Die Homologiegruppen der Überdeckung* $\mathbf{U}$ *sind definiert als*
   $H_k(\mathbf{U}) = 0$ *für* $k \geq 3$
   $H_2(\mathbf{U}) = ker\ \partial_2$
   $H_1(\mathbf{U}) = ker\ \partial_1 / Bild\ \partial_2$
   $H_0(\mathbf{U}) = C_0(\mathbf{U}) / Bild\ \partial_1$

Bemerkung 5.17 *Der Homomorphismus* ∂_2 *ist wohldefiniert, denn sind* $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_3}$ *im wesentlichen 3-benachbart, so sind auch* Γ_{i_j} *und* Γ_{i_k} *im wesentlichen benachbart für* $j \neq k$. *Dies gilt nach Definition auch dann, wenn* Γ_{i_j} *ein virtuelles Ereignis ist.* □

Satz 5.18 *Sei* $\mathbf{U} = \{\Gamma_i\}_{i \leq N}$ *eine zulässige Überdeckung von* Ω *durch* $\mathcal{F}_{=t}$*-Ereignisse. Dann existiert eine offene Überdeckung* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \leq N}$ *von* M, *so daß die zugehörige Cech-Homologie mit Koeffizienten in* $\mathbb{Z}/2$ *kanonisch isomorph ist zur Homologie von* $\mathbf{U}$:

$$H_k(\mathbf{U}) \cong \check{H}_k(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2) \quad \forall k.$$

Beweis : Sei $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$, dabei sei A_i ohne wesentliche Einschränkung offen, ferner sei im folgenden alles in lokalen Koordinaten gegeben.
Zu konstruieren ist die Überdeckung $\mathcal{U}$. Sei $x \in M$.

1. Existiert ein Index $i \leq N$, so daß $dist(x, \tilde{A}_i^c) = a > 0$, so setze $U_i(x) = B_{a/2}(x)$, $U_j(x) = \emptyset$ für $j \neq i$. Dabei ist $B_{a/2}(x)$ eine offene Kugel mit Radius $a/2$ und Mittelpunkt x.

2. Existieren zwei Indizes $i, j \leq N, i \neq j$, so daß $dist(x, \tilde{A}_i) = 0, dist(x, \tilde{A}_j) = 0$ und $dist(x, \tilde{A}_k) \geq a > 0$ für alle $k \neq i, j$, so sei $U_i(x) = U_j(x) = B_{a/2}(x)$ und $U_k(x) = \emptyset$ für $k \neq i, j$.

3. Existieren drei Indizes $i, j, k \leq N, i \neq j \neq k \neq i$ so daß $dist(x, \tilde{A}_i) = dist(x, \tilde{A}_j) = dist(x, \tilde{A}_k) = 0, dist(x, \tilde{A}_l) \geq a > 0$ für $l \neq i, j, k$ (i.a.W.: $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k$ sind im wesentlichen 3-benachbart), so setze $U_i(x) = U_j(x) = U_k(x) = B_{a/2}(x), U_l(x) = \emptyset$ für $l \neq i, j, k$.

4. Seien ansonsten $i_1, \ldots, i_k$ Indizes, $k \geq 4$, so daß $dist(x, \tilde{A}_{i_j}) = 0$ für $j \leq k$, $dist(x, (\widetilde{\bigcup_{j=1}^k A_{i_j})}^c) \geq a > 0$. Die Ereignisse Γ_{i_j} sind demnach im wesentlichen k-benachbart (da $\mathbf{U}$ eine zulässige Überdeckung war). Setze $U_i(x) = \emptyset\ \forall i \leq N$ und definiere ein weiteres $U_{N+y} = B_{a/2}(x)$. Diese Menge entspricht dann dem zugehörigen virtuellen Ereignis.

Definiere $U_i := \bigcup_{x \in M} U_i(x), \mathcal{U} := \{U_i, U_{N+y}\}$. Nach Konstruktion sind sämtliche U_i offen und sie bilden eine Überdeckung von M.
Schließlich gilt auch Γ_i, Γ_j im wesentlichen benachbart $\Leftrightarrow U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k$ im wesentlichen 3-benachbart $\Leftrightarrow U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ nach Konstruktion der U_i. Im Falle von im wesentlichen k-benachbarten Ereignissen für $k \geq 4$ entsprechen nicht-leere Schnitte mit der entsprechenden Menge U_{N+y} gerade dem Verhalten der virtuellen Ereignisse. $\square$

Somit lassen sich die Homologiegruppen der Überdeckung von Ω durch $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignisse berechnen. Um nun Informationen über die Mannigfaltigkeit zu erhalten, muß daher entsprechend der Cech-Homologietheorie noch der projektive Limes über sämtliche zulässigen Überdeckungen gebildet werden.

Definition 5.19 *Sei $\mathbf{V} = \{\Theta_j\}$ eine zulässige Verfeinerung der zulässigen Überdeckung $\mathbf{U} = \{\Gamma_i\}$ von $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignissen.*

1. *Jedem $\Theta_j \in \mathbf{V}$ wird in folgender Weise ein $\Gamma_i(\Theta_j) \in \mathbf{U}$ zugeordnet.*
   Ist Θ_j kein virtuelles Ereignis, so sei $\Gamma_i(\Theta_j)$ ein Ereignis, so daß $\mathbf{P}[\Theta_j - \Gamma_i(\Theta_j)] = 0$ gilt. Ist Θ_j ein virtuelles Ereignis gehörend zu den im wesentlichen k-benachbarten Ereignissen $\Theta'_1, \ldots, \Theta'_k$, die (bis auf $\mathbf{P}$-Nullmengen) Teilereignisse der im wesentlichen l-benachbarten Ereignisse $\Gamma_1^{(\Theta'_1)}, \ldots, \Gamma_l^{(\Theta'_k)}, l \leq k$ sind, so wird Θ_j auf das zugehörige virtuelle Ereignis Γ_0 abgebildet. Ist Θ_j ein virtuelles Ereignis zu $\Theta'_1, \ldots, \Theta'_k$, aber die zugehörigen Ereignisse Γ_i sind nur im wesentlichen 3-benachbart, im wesentlichen benachbart oder es existiert nur ein Ereignis $\Gamma = \Gamma_i(\Theta'_1) = \ldots = \Gamma_i(\Theta'_k)$, so wird Θ_j auf eines dieser Ereignisse bzw. auf das eine Ereignis abgebildet.

2. *Die Abbildung $i_n : C_n(\mathbf{V}) \to C_n(\mathbf{U})$ ist definiert durch*
   $[\Theta_0, \ldots, \Theta_n] \mapsto [\Gamma_0(\Theta_0), \ldots, \Gamma_n(\Theta_n)]$.

Bemerkung 5.20 *Die Abbildungen i_n sind wohldefiniert.*

Beweis : Wohldefiniertheit ist klar nach Konstruktion: ist $[\Theta_0, \ldots, \Theta_k]$ ein Element in $C_k(\mathbf{V})$, so sind auch die $\Gamma_0(\Theta_0), \ldots, \Gamma_k(\Theta_k)$ im wesentlichen 3-benachbart für $k = 3$ bzw. im wesentlichen benachbart für $k = 2$. □

Satz 5.21 *Seien* $\mathbf{V}$ *und* $\mathbf{U}$ *gegeben wie in Definition 5.19. Dann gilt: Die Abbildungen i_n induzieren eindeutige Homomorphismen $i_{n*} : H_n(\mathbf{V}) \to H_n(\mathbf{U})$, und für die zugehörigen offenen Überdeckungen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{U}$ von M kommutiert das folgende Diagramm:*

$$
\begin{array}{llcl}
i_{n*}: & H_n(\mathbf{V}) & \longrightarrow & H_n(\mathbf{U}) \\
 & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
 & \check{H}_n(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \check{H}_n(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2)
\end{array}
$$

Beweis : Nach Konstruktion der zu $\mathbf{V}$ und $\mathbf{U}$ gehörigen offenen Überdeckungen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{U}$ (vgl. den Beweis von Satz 5.18) folgt sofort, daß eine zu $\Theta \in \mathbf{V}$ gehörige Überdeckungsmenge $V \in \mathcal{V}$ in der entsprechenden zu $\Gamma(\Theta) \in \mathbf{U}$ gehörigen Überdeckungsmenge $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist. Daher korrespondieren die Abbildungen i_n zu den durch die Inklusionen definierten Abbildungen $j_n : \check{C}_n(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/2) \to \check{C}_n(\mathcal{U}, Z/2)$ und diese induzieren nach [Rinow], 42.2, S. 506 eindeutige Homomorphismen $j_{n*} : \check{H}_n(\mathcal{V}, \mathbb{Z}/2) \to \check{H}_n(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2)$. □

Damit läßt sich das Hauptresultat formulieren, mit dem man allein anhand der Filtration $\mathcal{F}_t$ erkennen kann, auf welcher 2-Mannigfaltigkeit die Brownsche Bewegung gelebt hat.

Satz 5.22 *Es existiert ein kofinites System Σ von zulässigen $\mathcal{F}_{=t}$-Überdeckungen von Ω, so daß gilt:*

1. *Ist $\mathbf{U} \in \Sigma, \mathbf{U} = \{\Gamma_i\}, \Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$ (bis auf virtuelle Ereignisse), so sind die $\tilde{A}_i$ in lokalen Koordinaten darstellbar.*

2. *Das System der durch Σ induzierten offenen Überdeckungen von M ist ein kofinites System aller offenen Überdeckungen von M.*

Insbesondere gilt damit:

$$\lim_{\overleftarrow{\mathbf{U}\in\Sigma}} H_n(\mathbf{U}) \cong \check{H}_n(M; \mathbb{Z}/2).$$

Beweis : 1. Ist $\Gamma = \{B_t \in A\}$ ein $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignis, so läßt sich dieses in die $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignisse $\Gamma_i = \{B_t \in A_i\}$, $i \leq n < \infty$ zerlegen, wobei jedes $\tilde{A}_i$ in lokalen Koordinaten darstellbar ist.
2. Sei $\mathcal{U} = \{U_n\}$ eine offene Überdeckung von M. Zu finden ist eine zulässige $\mathcal{F}_{=t}$-Überdeckung $\mathbf{V}$ von Ω, so daß die von $\mathbf{V}$ induzierte Überdeckung $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Sei deswegen $\mathcal{W} = \{W_n\}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ mit den Eigenschaften

1. $W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap W_{i_3} \cap W_{i_4} = \emptyset$ für alle paarweise verschiedenen Indizes i_1, i_2, i_3, i_4.

2. Für jeden Index i_0 gilt
$\bigcup_{i \neq i_0} W_i \neq M$ und $(\bigcup_{i \neq i_0} W_i)^c$ enthält innere Punkte.

3. Jedes W_i ist zusammenhängend und $\bar{W}_i$ ist kompakt.

Eigenschaft 1. läßt sich erreichen durch Einführung von weiteren offenen Mengen W_0 (entsprechend den virtuellen Ereignissen), falls mehr als drei offene Mengen $W_{i_1}, \ldots, W_{i_k}$ nicht-leeren Schnitt haben, so daß $W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_k} \supset W_0$ und durch Verkleinern der W_{i_j}.
Eigenschaft 2. läßt sich erzielen durch Entfernen von redundanten offenen Mengen und ggf. Verkleinern weiterer Mengen: Da $\{W_i\}$ eine offene Überdeckung von M ist, gilt für jedes $x \in \partial W_i : dist(x, W_i - \bigcup_{j \neq i} W_j) > 0$. Da ∂W_i kompakt ist, ist damit auch
$a_i := \inf_{x \in \partial W_i} dist(x, W_i - \bigcup_{j \neq i} W_j) > 0$. Sei $W_i' := \{x \in W_i : dist(x, \partial W_i) > b_i\}$, wobei $b_i \in (\frac{a_i}{3}, \frac{2a_i}{3})$ so gewählt ist, daß $dist(W_i', W_j') = 0 \Leftrightarrow W_i \cap W_j \neq \emptyset$ gilt. Wegen $b_i < a_i$ ist $\{W_i'\}$ dann wieder eine offene Überdeckung von M.
Schließlich gilt Eigenschaft 3. für die Zusammenhangskomponenten, wobei $\bar{W}_i'$ beispielsweise dann kompakt ist, wenn man $W_i \cong D^2$ wählt. Setze nun $\Gamma_1 := \{B_t \in W_1'\}, \ldots,$
$\Gamma_n = \{B_t \in W_n' - (W_1' \cup \ldots \cup W_{n-1}')\}$.
Aus 2. ergibt sich daß $W_i' - (W_1' \cup \ldots \cup W_{i-1}')$ für alle i innere Punkte enthält, daher ist $\mathbf{P}[\Gamma_i] > 0 \ \ \forall i$.
Weiterhin bilden die W_i' eine Überdeckung, und $\tilde{W}_i' := W_i' - (W_1' \cup \ldots \cup W_{i-1}')$ und $W_j' - (W_1' \cup \ldots \cup W_{j-1}')$ sind disjunkt für $i \neq j$. Also ist $\mathbf{P}[\Gamma_i \cap \Gamma_j] = 0$ und $P[\bigcup \Gamma_i] = 1$, d.h. $\mathbf{V} = \{\Gamma_i\}$ ist eine $\mathcal{F}_{=t}$-Überdeckung. Aus Eigenschaft 1. folgt, daß für jedes
$x \in M$ höchstens drei Indizes i_1, i_2, i_3 existieren, so daß $dist(x, \tilde{W}_i') = 0$. Weiterhin ist wegen $dist(W_i', W_j') = 0 \Leftrightarrow W_i' \cap W_j' \neq \emptyset$ auch Γ_i und Γ_j genau dann im wesentlichen benachbart, wenn $W_i' \cap W_j' \neq \emptyset$, und $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k$ genau dann im wesentlichen 3-benachbart, falls $W_i' \cap W_j' \cap W_k' \neq \emptyset$.
Durch Zerlegen der Γ_i entsprechend den Zusammenhangskomponenten der $\tilde{W}_i'$ erhält man somit eine zulässige $\mathcal{F}_{=t}$-Überdeckung $\mathbf{V}$ mit $H_i(\mathbf{V}) \cong \check{H}_i(\{W_i'\}; \mathbb{Z}/2)$, wobei $\{W_i'\}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. $\square$

5.1 Schlußbemerkung

Die Unterscheidung zwischen ein- und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten hat lediglich methodische Gründe; im zweidimensionalen Fall bedarf es eines wesentlich höheren Aufwandes. Natürlich lassen sich die eindimensionalen Mannigfaltigkeiten problemlos anhand der Filtration der Brownschen Bewegung von den zweidimensionalen unterscheiden: Im eindimensionalen Fall gibt es keine im wesentlichen 3-benachbarten Ereignisse.
Damit läßt sich die eingangs gestellte Frage zumindest für Dimensionen $n \leq 2$ positiv beantworten: Die (topologische) Struktur der Mannigfaltigkeit läßt sich allein anhand der Filtration bestimmen. Dies liegt daran, daß in diesen Dimensionen der Homöomorphietyp bereits eindeutig durch die ($\mathbb{Z}/2$-) Homologie bestimmt ist. Natürlich lassen sich auch Homologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten definieren; man müßte lediglich noch Orientierungen der $\mathcal{F}_{=t}$-Ereignisse berücksichtigen. Da dies im zweidimensionalen Falle jedoch keinen weiteren Erkenntnisgewinn bedeutete, wurde in dieser Arbeit auf den damit verbundenen technischen Mehraufwand verzichtet.
Die hier vorgestellten Methoden lassen sich prinzipiell auch auf höhere Dimensionen anwenden. Nur reicht dann die Kenntnis der Homologiegruppen allein nicht mehr für die topologische Bestimmung der Mannigfaltigkeit aus. Hier wären dann weitere Methoden vonnöten, die sich mit dem hier vorgestellten Ansatz wohl nicht realisieren lassen.

Literaturverzeichnis

[Davies] Davies, E.B.: *Heat kernels and spectral theory.* Cambridge University Press, Cambridge 1989

[Emery] Emery, M.: *Stochastic Calculus in Manifolds.* Springer, 1989

[Hahn-Rosenthal] Hahn, H. und Rosenthal, A.: *Set Functions.* The University of New Mexico Press, Albuquerque, New Mexico 1948

[Hsu] Hsu, P.: *Brownian Motion and Riemannian Geometry.* In: Geometry of Random Motion. Proceedings of a Summer Research Conference held July 19-25, 1987. Contemporary Mathematics, Vol. 73, 95-104 (1988)

[Krickeberg] Krickeberg, K.: *Strong mixing properties of Markov chains with infinite invariant measure.* In: Proc. of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, Part II, S. 431-449 (1966)

[Munroe] Munroe, M.E.: *Introduction to measure and integration.* Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge 1953

[Oxtoby] Oxtoby, J.C.: *Maß und Kategorie.* Springer 1971

[Rinow] Rinow, W.: *Lehrbuch der Topologie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975

[Taira] Taira, K: *Diffusion Processes and Partial Differential Equations.* Academic Press, San Diego 1988

[Whittaker-Watson] Whittaker, E.T., Watson, G.N.: *A Course of Modern Analysis*, 4. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge 1973

Lebenslauf

9.1.1968	Geboren in Göttingen
1974 - 1978	Besuch der Janusz-Korczak-Grundschule in Göttingen
1978 - 1987	Besuch des Theodor-Heuss-Gymnasiums in Göttingen
Juni 1988 - Februar 1990	Zivildienst im Klinikum Göttingen
Oktober 1987	Beginn des Mathematikstudiums an der Georg-August-Universität Göttingen
Februar 1991	Diplomvorprüfung
Ab Mai 1992	Diplomarbeit bei Prof. Bauer (Bielefeld) Arbeitsgebiet: Algebraische Topologie
September 1994	Diplomprüfung in Mathematik
seit November 1994	Promotionsstudium bei Prof. H. Hering am Institut für Mathematische Stochastik
Oktober 1998 - Juli 1999	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematische Stochastik