

**Zur Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Urbildern  
stationärer, ergodischer Felder**

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten  
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von  
Florian Sobieczky  
aus Aachen

28. Mai 2004

D7

Referent: Prof. H. Hering

Korreferent: PD H. Schulz-Baldes

Tag der mündlichen Prüfung:

## Abstract:

The number of connected components of inverse images of random stationary, ergodic functions with discrete two-dimensional domain is estimated, given only the functions' probability law: bounds for the number of open clusters per vertex ( $\kappa$ ) of inverse images of the interval  $[-\sigma, \sigma]$  for a threshold  $\sigma > 0$  of a random function on the set of nearest neighbours from  $\mathbb{Z}^2$  are derived. Connectedness refers to the ability to join two vertices from  $\mathbb{Z}^2$  by an open path. The existence of  $\kappa$  in the stationary, ergodic case is proved. The method used is that of a random walk on a randomly generated graph with percolative structure. The estimates for  $\kappa$  are tight in the number of steps of the random walk. They involve the expected  $n$ -step return probability, and the expected size of the number of bounding edges of the connected component containing the origin. The spectral properties of the Markov process allow these estimates by means of the Courant-Fischer min-max principle. The shift of the unperturbed eigenvalues of a random walk on the homogeneous, complete graph can be bounded, the perturbation is of finite rank, and the rank equals the number of edges removed. An application is the i.i.d. case of bond percolation.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
1.1	Motivation . . . . .	5
1.2	Allgemeine Definitionen . . . . .	7
1.3	Formulierung des Problems . . . . .	8
1.4	Methode . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Resultat</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung der Methode</b>	<b>14</b>
3.1	Konsequenzen der Stationarität und Ergodizität . . . . .	14
3.2	Konsequenzen des Courant-Fischerschen Min-Max-Prinzips . . . . .	21
3.3	Beweis von Resultat 2.1.2 . . . . .	26
3.4	Beweis von Resultat 2.1.3 . . . . .	30
3.5	Beweis von Resultat 2.2 . . . . .	31
3.6	Beweis von Resultat 2.3 . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>41</b>
4.1	Implikationen des Resultats . . . . .	41
4.2	Perkolations . . . . .	42
4.3	Einfluss der Korrelation . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Abbildungen</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Notation</b>	<b>50</b>
6.1	Symbole . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>

# 1 Einführung

Wieviele homogene Bereiche hat ein Bild ? Wieviele Teilmengen hat der Definitionsbereich einer zufälligen Funktion auf denen sie jeweils (annähernd) konstant ist? Diese Frage wird in Bezug auf einen Zugang zu dem Problem über eine Diskretisierung des Definitionsbereiches der Funktion unter den Voraussetzungen untersucht, welche die Verwendung des (individuellen) Ergodensatzes erlauben.

In der Einleitung werden nach einer informellen Problembeschreibung die mathematische Fragestellung vorgestellt und die erzielten Ergebnisse zusammengefasst. Der zweite Abschnitt enthält die präzise Formulierung des Resultats, während der dritte Abschnitt dem Beweis gewidmet ist. Im ersten Teil des dritten Abschnitts werden die Voraussetzungen der Ergodentheorie und der Theorie der Markovketten bereitgestellt. In der darauf folgenden Diskussion werden verschiedene Konsequenzen des Resultats erläutert. Die Konventionen die Notation betreffend, sowohl das Modell betreffend, als auch allgemeiner Art sind im Anhang verzeichnet. Es gibt insgesamt 6 Abbildungen.

## 1.1 Motivation

Zu einem Graphen  $G = (V, E)$ , dessen Kantenmenge  $E$  durch die Realisierung eines zufälligen Prozesses gegeben ist, gibt es eine zufällige Anzahl  $M$  von Zusammenhangskomponenten. Sei  $\tilde{N}_k$  die Anzahl der Vertices in der Zusammenhangskomponente, die den Vertex  $k \in V$  enthält, so gilt für endliche Graphen mit insgesamt  $N$  Vertices

$$M = \sum_{k \in V} \frac{1}{\tilde{N}_k}. \quad (1)$$

Ein paradigmatisches Beispiel ist die sog. Kantenperkolations in zwei Dimensionen. Mit Wahrscheinlichkeit  $p$  ist jede einzelne Verbindung zweier benachbarter Elemente von  $\mathbb{Z}^2$  entweder Teil der Kantenmenge  $E$  ( $\Leftrightarrow$ : die Kante ist *offen*) oder - mit Wahrscheinlichkeit  $1-p$  - nicht in  $E$  enthalten ( $\Leftrightarrow$ : die Kante ist *geschlossen*). Eine wesentliche Eigenschaft des Perkolationsmodells ist die Unabhängigkeit dieser Ereignisse. Normiert man die Anzahl der dadurch entstehenden Zusammenhangskomponenten durch die Größe  $N$  der Vertexmenge, so ergibt sich [17] ein Limes  $\kappa$  in  $[0, 1]$ . In der vorliegenden Arbeit soll dieser Limes bei Modellen abgeschätzt werden, die dem Perkolationsmodell ähnlich sind, aber in denen die Unabhängigkeit der Offenheit/Geschlossenheit der Kanten nicht unbedingt gegeben ist. An die Stelle der Unabhängigkeit trete hier die Voraussetzung der **Stationarität**: Ein stochastisches Feld auf den nächsten Nachbarn entscheide lokal darüber, ob ein Paar  $\langle k_1, k_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$  mit  $|k_1 - k_2| = 1$  zu  $E$  gehört oder nicht. Dieses Feld sei stationär so, dass Teilgraphen, die durch Translation auf  $\mathbb{Z}^2$  ineinander übergehen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Zusätzlich sei Ergodizität gefordert, damit der Raum der betrachteten Funktionen nicht in ergodische Komponenten von endlichem Maß ungleich eins zerfällt.

Die Methode, die hier verwendet wird, um Abschätzungen von  $M$  zu gewinnen besteht darin, eine **stochastische Irrfahrt** auf den zufällig entstehenden Graphen zu definieren. Zum Beispiel ist zur *einfachen Irrfahrt* auf einem Graphen  $G = (V, E)$ , der keine zweielementigen Zusammenhangskomponenten enthält mit i.A. reduzibler Übergangsmatrix  $A$  (mit  $A_{kl} = 1/d_k$  für  $\{k, l\} \in E$  und  $A_{kl} = 0$  sonst) die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $G$  gegeben durch die Vielfachheit des Eigenwerts 1. Ihre Elemente sind Übergangswahrscheinlichkeiten einer Irrfahrt auf  $V$  mit *Dirichlet*-Randbedingungen [4]. Der Projektor  $P_{\text{inv}}$  in den (links-) invarianten Unterraum  $\mathcal{I} := \{v \in \mathbb{R}^N \mid vA = v\}$  ist im reversiblen, aperiodischen Fall (deshalb dürfen in diesem Beispiel keine zweielementigen invarianten Teilräume existieren) gegeben durch

$$P_{\text{inv}} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \quad (2)$$

so, dass  $M$  über

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sp}[A^n] \quad (3)$$

erhalten werden kann, da  $\dim(\mathcal{I}) = M$ . Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \text{Sp}[A^n]$  ist streng *monoton fallend*. Untere Schranken von  $M$  lassen sich durch Approximationen des Grenzwerts von  $(a_n)$  mit Folgengliedern endlicher  $n \in \mathbb{N}$  demnach *nicht* erhalten.

Im Folgenden sollen untere Schranken für  $M$  untersucht werden, die endliche Potenzen von  $A$  involvieren und damit für Anwendungen nützlich sind. Anstelle von Dirichlet-Randbedingungen wird hier eine symmetrische Irrfahrt betrachtet, deren Randbedingungen die Aperiodizität und damit die Existenz des Limes garantiert. Es stellt sich heraus, dass im Limes großer Zustandsräume ( $N \rightarrow \infty$ ) nur der Erwartungswert der  $n$ -Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeit  $A_{00}^n = \mathbb{P}[X_n^0 = 0]$  der Irrfahrt auf dem Graphen, sowie dessen isoperimetrische Eigenschaften für die Abschätzung entscheidend sind. Diese beiden Größen sind numerisch (z.B. mit Hilfe von Monte-Carlo Methoden) wesentlich einfacher und direkter zugänglich, als das Spektrum der Übergangsmatrix der stochastischen Irrfahrt, vor allem im Falle großer Zustandsräume.

Es ist wohlbekannt, dass bei homogenen Gittern (z.B.  $\mathbb{Z}^2$ ) als Zustandsräumen von stochastischen Irrfahrten die  $n$ -Schritt-Rückkehrwahrscheinlichkeit in Dimension  $d$  asymptotisch proportional zu  $1/n^{d/2}$  ist [44] und auf endlichen Zustandsräumen ein in  $n$  exponentielles Konvergenzverhalten zeigt. Manchmal ist allerdings im endlichen Fall die Bestimmung der Konvergenzrate schwierig, insbesondere, wenn Metastabilitätsphänomene eine Rolle spielen [43]. In diesem Fall ist es nützlich, auf polynomiale Schranken zurückgreifen zu können, um bereits bei kleinen Schrittzahlen ein konvergentes Verhalten auszunützen - auf Kosten der langsamen Konvergenz für große Schrittzahlen.

## 1.2 Allgemeine Definitionen

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \quad : \quad \text{Wahrscheinlichkeitsraum} \quad (4)$$

$$E_\infty^{\text{n.N.}} \quad := \quad \{\{k, l\} \subset \mathbb{Z}^2 \quad : \quad |k - l| = 1\} \quad (\text{nächste Nachbarn}) \quad (5)$$

$$g \quad : \quad \Omega \times E_\infty^{\text{n.N.}} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ stationär, ergodisch bez. Shifts aus } \mathbb{Z}^2 \quad (6)$$

$$\sigma \in \mathbb{R}_+, \quad \text{'Schwellenwert'} \quad (7)$$

$$N = 4W^2, \quad (N, W \in \mathbb{N}), \quad \text{Anzahl der Vertizes} \quad (8)$$

$$V_N \quad := \quad \{-(W-1), \dots, W\} \times \{-(W-1), \dots, W\} \quad (9)$$

$$E_N^{\text{n.N.}} \quad := \quad \{\{k, l\} \subset V_N \quad : \quad |k - l| = 1\} \quad (\text{nächste Nachbarn von } V_N) \quad (10)$$

$$g_N \quad : \quad \Omega \times E_N^{\text{n.N.}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_N = g \upharpoonright E_N^{\text{n.N.}} \quad (11)$$

$$E_N(g, \sigma) \quad := \quad \{\{k, l\} \subset E_N^{\text{n.N.}} \quad : \quad |g_N(\cdot, \{k, l\})| < \sigma\} \quad (12)$$

$$E_\infty(g, \sigma) \quad := \quad \{\{k, l\} \in E_\infty^{\text{n.N.}} \quad : \quad |g(\cdot, \{k, l\})| < \sigma\} \quad (13)$$

Zu festen  $\omega \in \Omega, \sigma > 0$  heiße die Menge  $E_N(\omega) := E_N(g(\omega, \cdot), \sigma)$  durch  $g(\omega, \cdot)$  erzeugt, der mengenwertige Prozess  $E_N : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(E_\infty^{\text{n.N.}})$  heiße durch  $g$  erzeugt. Von  $g$  wird als dem *erzeugenden Feld* gesprochen. Die Stationarität und Ergodizität in (6) bezieht sich auf Verschiebungen des Arguments  $e = \{k, l\} \in E_\infty^{\text{n.N.}}$  um Vektoren  $t \in \mathbb{Z}^2 : e \mapsto \{k+t, l+t\}$ .

$|k - l| = 1$  in (5),(10) und (13) bedeute, dass sich die Elemente  $k, l$  von  $\mathbb{Z}^2$  in einer ihrer Komponenten um eins unterscheiden und in der anderen gleich sind.

Zu festem  $\omega \in \Omega$  und Schwellenwert  $\sigma > 0$  heißt das Paar  $G_N(\omega) = \langle V_N, E_N(\omega) \rangle$  *endlicher Graph* mit Vertexmenge  $V_N$  und Kantenmenge  $E_N(\omega) = E_N(g(\omega), \sigma)$ .  $G_N$  ist also ein Graphen-wertiger Prozess.

Die Definition von  $E_N(g, \sigma)$  und  $E_\infty(g, \sigma)$  impliziert  $|g(\omega, \langle k, l \rangle)| = |g(\omega, \langle l, k \rangle)| \Rightarrow \langle k, l \rangle \in E_N(g(\omega), \sigma) \Leftrightarrow \langle l, k \rangle \in E_N(g(\omega), \sigma)$ .  $\langle k, l \rangle$  und  $\langle l, k \rangle$  werden dann als Elemente der 'Kanten von  $G_N(\omega)$ ' identifiziert.  $G_N$  ist damit ein ungerichteter Graph.

Durch  $M_N(\omega)$  seien die Zusammenhangskomponenten von  $G_N(\omega)$  bezeichnet.

### 1.3 Formulierung des Problems

Unter *Zusammenhangskomponente* eines Graphen  $G = (V, E)$  wird eine Teilmenge  $Q \subset V$  verstanden, die entweder ein isolierter Vertex ist, oder für die gilt, dass für alle  $k_1, k_2 \in Q$  eine Zahl  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  und eine Abbildung  $\gamma : \{0, \dots, \bar{n}\} \rightarrow Q$  existiert so, dass

$$\gamma(0) = k_1, \quad (14)$$

$$\gamma(\bar{n}) = k_2, \quad (15)$$

$$\langle \gamma(j-1), \gamma(j) \rangle \in E_N, \quad (j \in \{1, \dots, \bar{n}\}). \quad (16)$$

Sei  $\{Q_l(\omega)\}_{l=1}^{M_N}$  die Menge der Zusammenhangskomponenten von  $G_N(\omega)$ . Gesucht sind möglichst gute Abschätzungen derer Kardinalität  $M_N(\omega)$ , unter Vorgabe des Wahrscheinlichkeitsgesetzes des zufälligen Feldes  $g$ .

Bemerkung: Zu festen  $\omega \in \Omega$  sind die Urbilder zu den Funktionen  $|g_N(\omega, \cdot)|$

$$\mathcal{A}(|g_N|, \sigma)(\omega) := |g_N(\omega, \cdot)|^{-1}([\sigma, \infty)) \subset E_N^{\mathbb{n}, \mathbb{N}}. \quad (17)$$

in der Literatur unter dem Namen *Exkursionsmengen* bekannt. Diese Bezeichnung bezieht sich auf die Verallgemeinerung eines einparametrischen Prozesses (siehe [2]).

Im Folgenden sollen die Komplemente  $E_N(g, \sigma)$  der Exkursionsmengen  $\mathcal{A}(|g_N|, \sigma)$  bezüglich  $E_N^{\mathbb{n}, \mathbb{N}}$  untersucht werden. Gegenstand des Interesses ist die erwartete Anzahl der Zusammenhangskomponenten  $\mathbb{E}[M_N]$  von  $G_N(f, \cdot) := (V_N, E_N(f, \cdot))$  und deren asymptotisches Verhalten für große  $N$ , d.h. für unendlich große Graphen. Darüber hinaus sollen fast-sicher gleichmäßige untere Schranken für  $M_N(\omega), \omega \in \Omega$  ermittelt werden, in welche nur charakteristische Eigenschaften der Verteilung von  $g$  eingehen. (Der Erwartungswert  $(\mathbb{E}[\cdot])$  ist hier die Mittelung über alle Realisierungen des Prozesses (*Environments, Bilder*) aus  $\Omega$ .) Das Leitmotiv für diese Aufgabe sei dabei die Nützlichkeit bei Anwendungen, etwa im Falle von gegebener probabilistischer Information über  $g$  oder bei einer numerischen Auswertung eines Datensatzes, auf den auf Grund seiner Größe bereits asymptotische Resultate angewendet werden können.

Aus lokalen geometrischen Eigenschaften eines Graphen (wie zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit einer offenen, d.h. *nicht blockierten*, also in  $E_N(\omega)$  enthaltenen Kante zwischen nächsten Nachbarn) die Anzahl der Zusammenhangskomponenten nach unten abzuschätzen ist prinzipiell schwieriger als nach oben, da zwei Vertizes über sehr lange Pfade  $\gamma$  (mit  $\bar{n}$  groß) miteinander verbunden sein können. Die lokale Information über die Offenheit der Kanten muss entlang der Spur des Weges überprüft werden. Bei Auftreten sog. 'Flaschenhälse' (das sind Kanten, die als einzige relativ große Teilgraphen miteinander verbinden) kann es entsprechend lange dauern, bis diese Prüfung abgeschlossen wurde.



## 1.4 Methode

Auf dem Graph  $G_N(\omega) = \langle V_N, E_N(\omega) \rangle$  mit  $\omega \in \Omega$  wird eine symmetrische Markovkette definiert, deren Zustandsraum durch die Menge der Vertizes  $V_N$  des Graphen gegeben ist. Ein nichtverschwindendes Nichtdiagonalelement der Übergangsmatrix  $A(\omega) \in [0, 1]^{N \times N}$  sei genau zu jeder Kante in der Kantenmenge  $E_N(\omega)$  gegeben. Die Diagonalelemente werden 'aufgefüllt' so, dass mit  $A(\omega)$  eine stochastische Matrix vorliegt. Dadurch wird die Markovkette zu einer *Irrfahrt* auf den Vertizes, mit Übergängen genau zwischen nächsten Nachbarn, die durch eine Kante aus  $E_N(\omega)$  verbunden sind. Diese Situation werde dadurch bezeichnet, dass *die Markovkette durch den Graphen repräsentiert* sei.

Die i.A. reduzible, d.h. nicht-ergodische Markovkette hat damit eine Anzahl von minimal invarianten Verteilungen, die mit der Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Graphen,  $M_N(\omega)$  übereinstimmt. Dadurch ist es möglich,  $M_N(\omega)$  als Multiplizität des Eigenwerts  $1 \in \mathcal{S}(A(\omega))$  zu bestimmen.

Eine Konsequenz der Symmetrie ist hier die Aperiodizität der Markovkette (Lemma 3.3). Damit existiert der Limes (2) und wegen der Rekurrenz bedingt durch die Endlichkeit des Zustandsraumes gibt (3) die Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Für Anwendungen ist es wünschenswert, den Limes mit Elementen der Folge  $n \mapsto \text{Sp}[A^n(\omega)]$  zu approximieren. Um dies auf kontrollierte Weise zu tun, werden Schranken für die Anzahl der Zusammenhangskomponenten  $M_N(\omega)$  angegeben, welche  $\text{Sp}[A^n(\omega)]$  für  $n \in \mathbb{N}$  involvieren. Es zeigt sich, dass für die hier definierte Markovkette die Folge

$$a_n(\omega) = \text{Sp}[A^{2n}(\omega)] = \sum_{j=1}^N (\beta_j(\omega))^{2n} \quad (18)$$

monoton fallend ist. Sie ergibt eine in  $n$  scharfe obere Schranke für  $M_N$  (Satz 3.8).

Wegen der Stationarität des Feldes  $g$ , welches für jedes  $\omega \in \Omega$  den Graphen  $G_N(g(\omega), \sigma)$  induziert, der die Markovkette mit der Übergangsmatrix  $A(\omega)$  repräsentiert, läßt sich bei festem  $n \in \mathbb{N}$  auf die Folge  $N \mapsto \sum_{k=1}^N A_{kk}^n(\omega)$  der Ergodensatz anwenden. Wegen der Ergodizität hat dies zur Folge, dass  $\mathbb{E}[A_{00}^n]$  als Zahl in die Abschätzung eingeht - also die erwartete  $n$ -Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeit.

Für eine untere Schranke werden Eigenschaften von symmetrischen Matrizen betrachtet, die Summe aus einer symmetrischen Matrix mit bekanntem Spektrum und einer positiv semidefiniten Matrix sind. Nach dem Courant-Fischerschen Min-Max-Prinzip verschieben sich die Eigenwerte um einen positiven Wert, der durch den Rang der 'störenden' Matrix bestimmt ist (*Interlacing*). Die Anzahl der Intervalle zwischen den Eigenwerten des bekannten Spektrums, um die sich demgegenüber die exakten Eigenwerte verschieben dürfen ist durch den *Rang* der 'Störung' bestimmt (z.B.[28]). Die Besonderheit an dem hier verwendeten Zugang ist die Beziehung, die zwischen dieser das Spektrum charakterisierenden Größe und den geometrischen Eigenschaften des Graphen besteht: Bei dieser zufälligen Größe handelt sich um die Kardinalität der Exkursionsmenge  $\mathcal{A}(g, \sigma)$ .

Im Folgenden werden Markovketten auf Graphen untersucht [4]. Es sei  $(V, E)$  ein ungerichteter Graph, bei dem Schleifen und Mehrfachkanten erlaubt sind. Dies bedeutet, dass die Kantenmenge  $E$  eine Menge aus zweielementigen Teilmengen aus  $V$  ist (keine Tupel) und auch einelementige Teilmengen der Form  $\{k\}$  in  $E$  enthalten sein können. Die Markovketten, die durch die Graphen repräsentiert werden haben zu den Schleifen (z.B.  $\{k\}$ ) ein nichtverschwindendes Diagonalelement. Jeder Kante sei ein Gewicht, d.h. eine Zahl aus der Menge  $\{1, 2, 3, \dots\}$  zugeordnet, die bestimmt, wie oft sie vorkommt.

Eine Markovkette mit Zustandsraum  $V$  wird durch ein Quadrupel  $\langle \widehat{\Omega}, \widehat{F}, \nu, X \rangle$  festgelegt, wobei  $(\widehat{\Omega}, \widehat{F}, \nu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X_n : \Omega \rightarrow V$  für  $n \in \mathbb{N}$  ein Prozess mit bezüglich  $\mathcal{F}$  messbaren Koordinatenfunktionen ist, festgelegt durch eine Anfangsverteilung und eine stochastische Übergangsmatrix  $A \in [0, 1]^{|V| \times |V|}$ . Die Irrfahrt nach Pólya [40] auf einem  $d$ -dimensionalen Gitter ist die Markovkette mit Zustandsraum  $\mathbb{Z}^d$  mit Übergängen zwischen nächsten Nachbarn, die jeweils die Wahrscheinlichkeit  $1/(2d)$  haben. Die Irrfahrt auf einem Graphen  $\langle V, E \rangle$ , der keine homogene, d.h. translationsinvariante Struktur hat, bei dem aber auch jeweils die Kanten die erlaubten Übergänge und damit die nichtverschwindenden Übergangswahrscheinlichkeiten während eines Einheitszeitintervalls anzeigen kann - durch Wahl geeigneter Randbedingungen so definiert werden, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten symmetrisch bezüglich Anfangs- und Endpunkt des Überganges sind. Mit anderen Worten, es läßt sich eine reversible Markovkette angeben, die darüber hinaus **symmetrisch** ist, also für die gilt,

$$\nu[X_{n+1} = l \mid X_n = k] = \nu[X_{n+1} = k \mid X_n = l]. \quad (19)$$

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten ist in diesem Fall eine symmetrische Matrix. Aus der Reversibilitätsbedingung mit der (Dichte der) invarianten Verteilung  $\pi \in L^1(V)$

$$\nu[X_{n+1} = k \mid X_n = l]\pi(l) = \nu[X_{n+1} = l \mid X_n = k]\pi(k) \quad (20)$$

folgt daraus die Konstanz von  $\pi$  auf den ergodischen Komponenten der i.A. nicht-ergodischen Markovkette. Die Wahl der Randbedingungen, welche die Symmetrie der Übergangsmatrix  $A \in [0, 1]^{|V| \times |V|}$  erzielt ist durch die Forderung festgelegt, dass sie eine stochastische Matrix sei: Zu

$$A_{kl} = A_{lk} := \frac{1}{2d} \quad \Leftrightarrow \{k, l\} \in E \quad (21)$$

werden die Diagonalelemente durch die Forderung  $\sum_{l=1}^{|V|} A_{kl} = 1$  bestimmt, d.h. sie ergeben sich aus

$$A_{kk} = 1 - \sum_{j:\{j,k\} \in E} \frac{1}{2d}. \quad (22)$$

Wird etwa zu  $d = 2$  ein ebener Graph  $(V, E)$  dadurch konstruiert, dass die Vertizes  $V \subset \mathbb{Z}^2$  gewählt und zwischen nächsten Nachbarn von  $\mathbb{Z}^2$  Verbindungen ausgewählt und die Paare der beteiligten Vertizes in die Menge der Kanten  $E$  aufgenommen werden, so bestimmt Forderung (22), dass in  $E$  auch Schleifen enthalten sind, d.h. Verbindungen von Vertizes zu sich selbst, jeweils mit dem Gewicht  $4 - z$ , mit  $z$  der Anzahl der von dem Vertex (zu nächsten Nachbarn) abgehenden Verbindungen.

In diesem Kontext läßt sich die **symmetrische Irrfahrt** (vergl.: [24, S.119]) definieren, welche die Eigenschaften

1. Die Übergangsmatrix der Markovkette ist symmetrisch.
2. Alle auftretenden Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen unterschiedlichen Zuständen sind für alle Vertizes gleich.<sup>1</sup>

erfüllt. Insbesondere muss der Zustandsraum  $V$  der Kette keine Gitterstruktur haben.

Die Markovkette, die im Folgenden hier auf dem zweidimensionalen Gitter als Zustandsraum betrachtet wird, ist die symmetrische Irrfahrt. Eine ihrer Besonderheiten ist die Eigenschaft, dass Ihre Übergangsmatrix  $A \in [0, 1]^{|V| \times |V|}$  sich als Summe symmetrischer Matrizen

$$A = A_0 + S \tag{23}$$

schreiben läßt, wobei  $A_0$  eine Irrfahrt mit bekannten Eigenschaften (z.B. mit bekanntem Spektrum) ist und  $S$  **positiv semidefinit** ist.

Das Courant-Fischersche Min-Max-Prinzip besagt, dass unter diesen Umständen die (reellen) Eigenwerte von  $A$  gegenüber jenen von  $A_0$  jeweils wenn überhaupt nur nach oben verschoben sein können. Darüber hinaus ist klar, dass der Spektralradius von  $A$  und  $A_0$  wegen der Stochastizität gleich eins ist und der verschobene Eigenwert das Intervall  $[-1, 1]$  nicht verlassen haben kann.

Im Rahmen der Untersuchung der Konsequenzen solcher Eigenschaften lassen sich Abschätzungen der spektralen Eigenschaften angeben, welche zu Schranken der Anzahl der Zusammenhangskomponenten der Graphen  $(V, E)$  führen, welche die Markovkette repräsentieren. Eine besondere Rolle spielt dabei die Eigenschaft von Störungen  $S$  mit bekanntem Rang.

Neben diesen spektralen Methoden wird die Betrachtung auf Graphen eingeengt, die durch stationäre Funktionen erzeugt werden. Dies hat die Konsequenz, dass auf die Spur der Übergangsmatrix für den Limes großer Zustandsräume  $V_N$  der Ergodensatz angewendet werden kann. (Satz 3.1) Die Bedeutung der zusätzlich geforderten besonderen Ergodizitätseigenschaft wird in Abschnitt 3.1 erläutert.

---

<sup>1</sup>Im Gegensatz hierzu steht die Irrfahrt mit reflektierenden- d.h. Dirichlet-Randbedingungen [4].

## 2 Resultat

Es gelten die Definitionen des vorangehenden Abschnitts 1.2.

**Satz 2.1.** *Zu  $\omega \in \Omega, \sigma > 0$  sei der Graph  $G_N(\omega) := G_N(g(\omega, \cdot), \sigma) := \langle V_N, E_N(g(\omega, \cdot), \sigma) \rangle$  mit der Anzahl  $M_N(g(\omega, \cdot), \sigma) =: M_N(\omega) =: M$  der Zusammenhangskomponenten  $\{Q_l(\omega)\}_{l=1}^M$  mit  $N \in \mathbb{N}$  gegeben. Die zufällige Menge der Kanten  $E_N(g, \sigma)$  mit  $\sigma \in \mathbb{R}_+, N \in \mathbb{N}$  sei erzeugt durch ein Feld  $g : \Omega \times E_\infty^{n.N} \rightarrow \mathbb{R}$ , das bezüglich Verschiebungen der Form  $g(\omega, \{k, l\}) \mapsto g(\omega, \{k+t, l+t\})$  mit  $t \in \mathbb{Z}^2$  stationär und ergodisch ist.*

*Zu jedem festen  $\omega \in \Omega, N = 4W^2 \in \mathbb{N}$  und  $\sigma > 0$  sei das Quadrupel  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \nu^\omega, X(\omega))$  (kurz:  $X_n(\omega, \cdot)$ ) die reversible, i.a. reduzible, zeitlich homogene Markovkette in der Umgebung  $\omega$  mit Zustandsraum  $V_N$  in diskreter Zeit, mit beliebiger Anfangsverteilung  $\mu_0$  und Dichte des Übergangskerns (bez. Zählmaß)  $A_{..}(\omega) : \{1, \dots, N\}^2 \rightarrow [0, 1]$*

$$A_{kl}(\omega) = \nu^\omega[X_{n+1}(\omega, \cdot) = l \mid X_n(\omega, \cdot) = k] := \begin{cases} \frac{1}{4} & \{k, l\} \in E_N(\omega), \\ 1 - \sum_{\substack{j: \\ \{j, k\} \in E_N(\omega)}} \frac{1}{4} & k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (24)$$

*Es sei  $\bar{A}_{..}(\omega) : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ , mit  $\sum_{l=1}^\infty \bar{A}_{kl}(\omega) = 1$  der Übergangskern der Irrfahrt, die durch  $G_\infty(\omega) := \langle \mathbb{Z}^2, E_\infty(\omega) \rangle$  repräsentiert wird. Dann:*

1. *Sei  $n \in \mathbb{N}$  gerade. Dann gilt für  $\mu$ -fast alle  $\omega \in \Omega$*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N} \leq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]. \quad (25)$$

2. *Der Generator  $\bar{L}(\omega) = \mathbb{I} - \bar{A}(\omega)$  zur Halbgruppe der Irrfahrt auf  $\mathbb{Z}^2$  habe einen spektralen Gap  $\lambda > 0$ , d.h. das Spektrum von  $L$  enthalte Null als isolierten Eigenwert und  $\mathcal{S}(L) \cap (0, \lambda) = \emptyset$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und eine beliebige Kante  $e \in E_\infty^{n.N}$ .*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N} \geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \frac{\pi}{4} \frac{1}{n} - \pi n \exp(-(n-1)\lambda) \mu[e \notin E_\infty]. \quad (26)$$

3. *Es sei  $\bar{N}_0 := |\bar{Q}_0|$  die (zufällige) Kardinalität der Zusammenhangskomponente  $\bar{Q}_0$  von  $G_\infty(\omega)$ , welche den Ursprung enthält. Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \geq n_0, e \in E_\infty^{n.N}$ .*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N} \geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \frac{\pi}{4} \frac{1}{n} - \pi n \mathbb{E}[\exp(-n/\bar{N}_0^2)] \mu[e \notin E_\infty]. \quad (27)$$

Bemerkung: Die Voraussetzung, dass das Feld  $g$  bez. des *Subshifts* auf  $\mathbb{Z}^2$  (echte Teilmenge der Menge der Schwerpunkte der Kanten aus  $E_\infty^{n,N}$ ) stationär ergodisch sei ist in Bezug auf die Stationarität eine schwächere-, in Bezug auf die Ergodizität eine stärkere Forderung als die entsprechende Forderung für Shifts aus der Menge  $\mathbb{Z}^2 \cup (\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)$ , die sich als natürliche Menge von Translationen des Feldes  $g$  ergibt (siehe Abschnitt 3.1). Sie wird erhoben, um diese Eigenschaften auf den Prozess der Matrixelemente  $A_{kl}^n$  der Übergangsmatrix zu übertragen (Gleichung (40)).

Beispiel: Diskrete Gradientenfelder  $g(\omega, \{k, l\}) = f(\omega, k) - f(\omega, l)$  erfüllen die Forderung für stationäre, ergodische 'Potentiale'  $f : \Omega \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Beispiel: Im Falle der 2-d Kantenperkolation ergibt sich die Ergodizität bez. der Subshifts aus der Unabhängigkeit der Koordinatenfunktionen.

**Satz 2.2.** *Sei  $\bar{K}_0$  die (zufällige) Kardinalität des Randes der Zusammenhangskomponente von  $G_\infty(\omega)$ , die den Ursprung enthält, d.h. es gelte  $\bar{K}_0(\omega) = |\partial\bar{Q}_0(\omega)|$  für  $\omega \in \Omega$  mit*

$$\partial\bar{Q}_0(\omega) := \{ \{k_1, k_2\} \subset \mathbb{Z}^2 : \{k_1, k_2\} \in E_\infty^{n,N} \setminus E_\infty(\omega), (k_1 \in \bar{Q}_0(\omega) \vee k_2 \in \bar{Q}_0(\omega)) \}.$$

*Wenn der Erwartungswert  $\mathbb{E}[\bar{K}_0]$  existiert, dann gilt  $\mu$ -fast sicher:*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N} \geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \frac{1}{2n} \mathbb{E}[\bar{K}_0]. \quad (28)$$

Bemerkung: Die Größe  $\mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]$  ist die  $\mu$ -erwartete n-Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeit eines Irrwanderers auf  $\mathbb{Z}^2$ , der dem Gesetz  $\nu^\omega$  für jede Realisierung  $\omega \in \Omega$  gehorcht. Zu einer festen Realisierung  $\omega \in \Omega$  gilt

$$A_{00}^n(\omega) = \nu^\omega[X_n^0 = 0]. \quad (29)$$

**Satz 2.3.** *Mit den Definitionen des vorangehenden Abschnitts gilt: Es existiert der Limes  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N}$   $\mu$ -fast sicher und ist  $\mu$ -fast-sicher unabhängig von  $\omega \in \Omega$ . Es gilt:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]. \quad (30)$$

Bemerkung: Für den Fall von Feldern mit unabhängigen, identisch verteilten Koordinatenfunktionen zeigt Grimmet [17] die Existenz des Limes. Der dort verwendete Beweis (siehe auch [18]) basiert auf der Verwendung des Ergodensatzes und läßt sich damit auf den Fall stationärer, ergodischer Felder  $g$  verallgemeinern. Die hier gewählte, alternative Beweismethode mit Hilfe einer Markovkette hat den Vorteil, dass die Schranken 2.1(1-3) und 2.2 für den Limes abfallen.

### 3 Durchführung der Methode

Der Beweis des Resultats beruht auf verschiedenen Eigenschaften der Felder, deren Urbilder über die geometrischen Eigenschaften der Graphen  $G_N(\omega), \omega \in \Omega$  entscheiden. Die wichtigste ist die Stationarität (Homogenität) im Sinne der Unabhängigkeit der endlich-dimensionalen Verteilungen gegenüber Translationen auf dem Gitter. Die Ergodizität garantiert, dass wegen des Ergodensatzes eine deterministische Größe bei der Mittelungen über die Verschiebungen des Feldes resultiert. Obwohl die den Graph induzierende Funktion  $g$  den Parameterbereich  $E_\infty^{n.N.}$  hat, wird die Ergodizität bezüglich des Shifts auf  $\mathbb{Z}^2$  gefordert, da dieser bei der Spurbildung der Matrix  $A$  (und  $A^n$ ) auftritt.

Des Weiteren werden spektrale Eigenschaften der zufälligen Matrix  $A$  zur Abschätzung der Anzahl der Zusammenhangskomponenten herangezogen. Besondere Eigenschaften der speziellen Irrfahrt (24) führen auf die Möglichkeit, das Courant-Fischersche Min-Max-Prinzip anzuwenden.

#### 3.1 Konsequenzen der Stationarität und Ergodizität

Der Menge  $E_\infty^{n.N.}$  kann mit der Struktur des  $\mathbb{Z}^2$  versehen werden. Wird zu jedem Element  $e = \{k, l\}$  der Schwerpunkt  $j(\{k, l\}) := \frac{1}{2}(k + l) \in \mathbb{R}^2, \{k, l\} \in E_\infty^{n.N.}$  betrachtet, wobei  $k, l$  als Elemente des  $\mathbb{R}^2$  aufgefasst werden, so ist der Wertebereich  $\mathcal{W}(j) = (\langle \frac{1}{2}, 0 \rangle + \mathbb{Z}^2) \cup (\langle 0, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)$ . Die Abbildung  $j$  ist bijektiv und  $j^{-1}$  ordnet dem Element im  $\mathbb{R}^2$  die zweielementige Menge der euklidisch nächstgelegenen Elemente von  $\mathbb{Z}^2$  zu.

Wird über die Matrix  $A$  die Spur gebildet, so läßt sich die Summe über die Diagonalelemente als Summe über Koordinatenfunktionen von einem jeweils um den Summationsindex (hier  $\in \mathbb{Z}^2$ ) verschobenen ('geshifteten') Feld  $(A_{\cdot}(\omega))$  auffassen. Daß die Summe hier nur über eine Teilmenge von  $(\langle \frac{1}{2}, 0 \rangle + \mathbb{Z}^2) \cup (\langle 0, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)$  geht, führt auf die Forderung nach der Ergodizität bezüglich des *Subshifts* über die Translationsvektoren aus  $\mathbb{Z}^2$ . Zunächst werden die Begriffe 'stationär' und 'ergodisch' definiert:

**Definition:** Hat das Feld  $g : \Omega \times E_\infty^{n.N.} \rightarrow \mathbb{R}$  die Eigenschaft, dass zu einer endlichen Folge  $\{I_j\}_{j=1}^N$  mit  $I_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und  $e_j \in E_\infty^{n.N.}$  gilt

$$\mu[\{\omega \in \Omega : g(\omega, e_j) \in I_j\}_{j=1}^N] = \mu[\{\omega \in \Omega : g(\omega, T(e_j)) \in I_j\}_{j=1}^N], \quad (31)$$

mit beliebiger Translation  $E_\infty^{n.N.} \ni e = \{v_1, v_2\} \mapsto T(v_1, v_2) := \{v_1 + t, v_2 + t\}$  zu  $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^2$  für alle Verschiebungsvektoren  $t \in \mathbb{Z}^2 \cup (\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)^2$ , dann heißt  $g$  (stark) **stationär**.

---

<sup>2</sup> $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2 = \{ \langle t_1 + \frac{1}{2}, t_2 + \frac{1}{2} \rangle : \langle t_1, t_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2 \}$

Zu den Funktionen  $h : E_\infty^{\text{n.N.}} \rightarrow \mathbb{R}$  auf der Parametermenge kann man damit den **Shift**  $\mathcal{T}_t$ , ( $t \in \mathbb{Z}^2 \cup (\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)$ ) definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t : (E_\infty^{\text{n.N.}} \rightarrow \mathbb{R}) &\rightarrow (E_\infty^{\text{n.N.}} \rightarrow \mathbb{R}), \\ h &\mapsto h(j^{-1}(j(\cdot) - t)). \end{aligned} \quad (32)$$

Zum Beispiel geht zu  $\omega \in \Omega$   $g(\omega, \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\})$  durch  $\mathcal{T}_t$  mit  $t = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$  über in  $g(\omega, \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\})$ .

Wenn die Mengen von Funktionen  $g(B, \cdot)$ ,  $B \in \mathcal{F}$  sei jeweils das Urbild dieser Menge, die bezüglich der Shifts  $\mathcal{T}_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}^2 \cup (\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)$  invariant sind, also die Eigenschaft

$$\mathcal{T}_t g(B, \cdot) = g(B, \cdot) \quad (33)$$

gilt im Sinne von Mengen von Funktionen  $E_\infty^{\text{n.N.}} \rightarrow \mathbb{R}$  (sie bilden eine Untersigmaalgebra) und erfüllen

$$\mu(B) = 0 \quad \text{oder} \quad \mu(B) = 1, \quad (34)$$

dann heißt das Feld  $g$  **ergodisch**.

Zu gegebener stationärer Funktion  $g$  sind zufällige Funktionen  $h : \Omega \times E_\infty^{\text{n.N.}} \rightarrow \mathbb{R}$ , die aus Komposition einer dritten Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g$  hervorgehen,

$$h(\omega, e) = F \circ g(\omega, e), \quad (35)$$

ebenfalls stationär: Zum Zylinder  $\{\{k_j, l_j\}, I_j\}_{j=1}^n$ ,  $N \in \mathbb{N}$  gilt für  $t \in \mathbb{Z}^2 \cup (\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)$

$$\begin{aligned} \mu\left[\bigcap_{j=1}^N \{\omega \in \Omega : f(g(\omega, \{k_j, l_j\})) \in I_j\}\right] &= \mu\left[\bigcap_{j=1}^N \{\omega \in \Omega : g(\omega, \{k_j, l_j\}) \in f^{-1}(I_j)\}\right] \quad (36) \\ &= \mu\left[\bigcap_{j=1}^N \{\omega \in \Omega : g(\omega, \{k_j + t, l_j + t\}) \in f^{-1}(I_j)\}\right] \\ &= \mu\left[\bigcap_{j=1}^N \{\omega \in \Omega : f(g(\omega, \{k_j + t, l_j + t\})) \in I_j\}\right]. \end{aligned}$$

Die Matrixelemente  $\bar{A}_{kl}(\omega)$ ,  $\{k, l\} = e \in E_\infty^{\text{n.N.}}$  werden als Funktionen von  $\omega \in \Omega$  durch Komposition der Koordinatenfunktionen  $g$  nach ihrer Definition (24) mit einer Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$  erzeugt und sind mithin im obigen Sinne stationär: z.B. gilt  $\mu(\{\bar{A}_{kl}\}) = \mu(\{\bar{A}_{(k+t)(l+t)}\})$ . Dagegen sind die Diagonalelemente von

$\bar{A}(\omega) : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$  und  $\omega \in \Omega$  (Definition wie in (24) mit  $E_\infty(g, \omega)$  anstelle von  $E_N(\omega) = E_N(g, \omega)$ ) als Funktion von einer Menge von Koordinatenfunktionen  $\{g(\omega, e_j)\}_{j=1}^n$  (also als Funktional von  $g$ ) stationär und ergodisch bezüglich der Verschiebungen im Argument  $e_j$  um Translationsvektoren  $k \in \mathbb{Z}^2$ , wenn dies zuvor von  $g$  gefordert wurde. Gleiches gilt für die Matrixprodukte  $\bar{A}_{kl}^n$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wird für stationäre Funktionen  $g$  zusätzlich die Annahme der Ergodizität gemacht, so gilt bei der Anwendung des **Birkhoffschen (od. individuellen) Ergodensatzes**: Zur Menge der Verschiebungsvektoren  $\mathcal{I}_N := V_N \cup (\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + V_N) \setminus (\{(W, l) : l \in \{-W + 1, \dots, W\}\} \cup \{(k, W) : k \in \{-W + 1, \dots, W\}\})$  wobei  $W^2 = 4N$  und  $|\mathcal{I}| = 2(N - W)$  mit  $e_0 := \{(0, 0), (1, 0)\}$  ergibt sich die Zahl

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2(N - W)} \sum_{t \in \mathcal{I}_N} \mathcal{T}_t g(\omega, \cdot)(e_0) = \mathbb{E}[g(\cdot, e_0)], \quad (\text{für } \mu - f.a.\omega \in \Omega). \quad (37)$$

Wird die Forderung nach Stationarität und Ergodizität bez. der Indexmenge  $\mathcal{I} = \mathbb{Z}^2$  gefordert, ergibt sich dagegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{T}_t g(\omega, \cdot)(e_0) = \mathbb{E}[g(\cdot, e_0)], \quad (\text{für } \mu - f.a.\omega \in \Omega). \quad (38)$$

Bemerkung: Es wird hier gesondert darauf hingewiesen, da die natürliche Definition des Graphen  $G_N(\omega)$  die zufälligen Funktionen  $g$  auf  $E_\infty^{n.N}$  fordert. Andererseits ist die Forderung nach Ergodizität bezüglich einer echten Untermenge von  $\mathbb{Z}^2 \cup (\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2)$  eine stärkere Forderung, da es für weniger Translationen mehr invariante Mengen gibt für die alle die Eigenschaft (34) gezeigt werden muss.

Bemerkung: Mit dieser Formulierung lassen sich nicht nur zufällige Funktionen betrachten, sondern auch Abbildungen dieser Funktionen, auf die sich der Ergodensatz überträgt (wie im Fall der Matrixelemente, s.o.). Voraussetzung dafür ist, dass die Eigenschaft der Stationarität und Ergodizität respektiert wird. Hiefür gibt es einen Satz:

Wird zu einem beliebigen messbaren Raum  $(E, \mathcal{E})$  (hier:  $E = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ) und einer Indexmenge  $\mathcal{I}$  mit der Struktur des  $\mathbb{Z}^d$  (hier  $\mathcal{I} := E_\infty^{n.N}$  ist über  $\mathbb{J}$  isomorph auf  $(\langle \frac{1}{2}, 0 \rangle + \mathbb{Z}^2) \cup (\langle 0, \frac{1}{2} \rangle + \mathbb{Z}^2) \sim \mathbb{Z}^2$  abbildbar) ein Feld  $\tilde{g}(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathcal{I}$  (hier  $\langle \omega, k \rangle \mapsto \bar{A}_{k,k}^n(\omega)$ ) erhalten als Shift  $(\mathbf{T}_t : (E^{\mathcal{I}} \rightarrow E) \rightarrow (E^{\mathcal{I}} \rightarrow E))$  einer  $\mathcal{E}$ -meßbaren Abbildung ( $h : E^{\mathcal{I}} \rightarrow E$ ) angewendet auf ein stationäres, ergodisches Feld (hier:  $g : \Omega \times E_\infty^{n.N}$ ), also

$$\tilde{g}(\omega, t) = \mathbf{T}_t(h(g(\omega, \{\langle 0, 0 \rangle + \cdot\}, \langle 1, 0 + \cdot\}))) = h(g(\omega, \{\langle 0, 0 \rangle + \cdot\}, \langle 1, 0 + \cdot\})), \quad (39)$$

zu ( $\omega \in \Omega, t \in \mathcal{I}$ ), so ist es seinerseits stationär und ergodisch. Ein Beweis ist für den eindimensionalen unilateralen (d.h.  $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ ) Fall in [29] gegeben. Im Falle von  $E, \mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$  spricht man von einer *stationären Codierung*. Wichtig ist dabei, dass das 'shiften' der abgebildeten Funktion sich durch die Translation des ursprünglichen Feldes definiert, also



$\mathbf{T}_t(h(g(\omega, \cdot))) = h(\mathcal{T}_t(g(\omega, \cdot)))$  [41]. Dass sich der individuelle Ergodensatz auch auf den Fall  $\mathcal{I} = \mathbb{Z}^2$  übertragen läßt ist zum Beispiel in [33] gezeigt. Grundlegende Arbeiten zu diesen Erweiterungen sind z.B. [38] und [32].

An dieser Stelle sei aber auf das Beispiel nach Satz 2.1 hingewiesen, in dem  $g(\omega, \{k, l\}) = f(\omega, k) - f(\omega, l)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $\{k, l\} \in E_\infty^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  ist, für ein stationäres, ergodisches  $f$ . Die Definition (39) lautet für die Diagonalelemente von  $A^n$

$$\bar{A}_{kk}^n(\omega) = \mathcal{T}_k(\bar{A}_{(0+\cdot)(0+\cdot)}^n(\omega)), \quad (k \in \mathbb{Z}^2), \quad (40)$$

Wie man sieht ist  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathcal{I}$  nur die 'halbe Menge' der Translationen des Feldes  $g$ . Um zu garantieren, dass die Diagonalelemente bez. dieser kleineren Menge von Verschiebungen - damit größeren Menge von invarianten Mengen - noch ergodisch ist, wird eine Voraussetzung gefordert, die die Ergodizität bereits für Verschiebungen aus  $\mathbb{Z}^2$  garantiert:  $f$  sei bezüglich Verschiebungen aus  $\mathbb{Z}^2$  stationär und ergodisch. Also weist diese Eigenschaften auch  $g$ , das diskrete Gradientenfeld von  $f$  auf.

Es ist nun wünschenswert, den Ergodensatz im Zusammenhang mit der Spur von  $A^n(\omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  asymptotisch für große  $N$  anwenden zu können. Die Matrixelemente des Matrixprodukts  $A_{kk}^n(\omega)$  der endlichen Matrix  $A(\omega)$  hängen aber von  $N$  ab. *Finite size effects* spielen hier eine Rolle, indem die Endlichkeit des Zustandsraums  $V_N$  der Markovkette Einfluss z.B. auf die  $n$ -Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeit  $A_{00}^n$  (hier des Vertex 0) nimmt. Bereits die Diagonalelemente  $A_{kk}(\omega)$  sind, wenn  $k \in V_N$  ein Vertex am Rand des Quadrats liegt, nie gleich Null und haben also nicht die gleiche Verteilung wie im Falle von Vertices entfernt vom Rand. Dies liegt daran, dass die Schleifen des Graphen am Rand deterministisch vorgegeben sind und entsprechend mit Wahrscheinlichkeit mindestens 1/4 am Rand während eines diskreten Zeitschrittes am gleichen Vertex verharret wird. Deshalb gilt der Ergodensatz zunächst nicht für die Abbildung  $k \mapsto A_{kk}^n(\omega)$  für  $\omega \in \Omega$ .

**Satz 3.1.** *Sei  $\bar{A}(\omega) \in \mathcal{B}(l^1(\mathbb{Z}^2), l^1(\mathbb{Z}^2))$  der beschränkte, lineare, positivitätserhaltende Operator mit  $\|\bar{A}(\omega)\|_1 = 1$ , dessen Matrixelemente die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette mit abzählbar unendlichem Zustandsraum  $\mathbb{Z}^2$  darstellen. D.h., zu  $E_\infty(\omega) := E_\infty(g(\omega), \sigma)$*

$$E_\infty(\omega) := \{ \{k, l\} \subset \mathbb{Z}^2 : |k - l| = 1, |g_N(\omega, \{k, l\})| \leq \sigma \} \quad (41)$$

gelte

$$\bar{A}_{kl}(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{4}, & \{k, l\} \in E_\infty(\omega), \\ 1 - \frac{1}{4} \sum_j \chi_{E_\infty(\omega)}(\{k, j\}), & k = l, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (42)$$

Dann, mit der Definition (24) von  $A(\omega)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^n(\omega) = \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n], \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{für } \mu - f.a. \omega \in \Omega. \quad (43)$$

*Beweis:* Mit  $N, n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega$  und  $A_{kl}^{(N,n)}(\omega) := A_{kl}^n(\omega)$ , wobei  $k, l \in V_N$  gilt

$$\bar{A}_{kl}^{(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_{kl}^{(N,n)}, \quad k, l \in \mathbb{Z}^2, \quad (44)$$

und zu  $\overset{\circ}{V}_{N,n} := \left\{ k \in V_N : \bigwedge_{l \in \mathbb{Z}^2 \setminus V_N} |k - l| \geq n/2 + 1 \right\}$  und  $\partial V_{N,n} := V_N \setminus \overset{\circ}{V}_{N,n}$

$$\bar{A}_{kl}^{(n)} = A_{kl}^{(N,n)}, \quad k, l \in \overset{\circ}{V}_{N,n}. \quad (45)$$

Zu  $N' := |\overset{\circ}{V}_{N,n}| = (W - n - 2)^2 = (\sqrt{N} - n - 2)^2$  für  $n$  gerade,  $N' := (W - n - 3)^2$  für  $n$  ungerade und  $N'' = N - N'$  erhält man wegen  $A_{kk}^n \geq 0$

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^n = \frac{N'}{N} \frac{1}{N'} \sum_{k \in \overset{\circ}{V}_{N,n}} A_{kk}^n + \frac{N''}{N} \frac{1}{N''} \sum_{k \in \partial V_{N,n}} A_{kk}^n \quad (46)$$

$$\stackrel{(45)}{=} \frac{N'}{N} \frac{1}{N'} \sum_{k \in \overset{\circ}{V}_{N,n}} \bar{A}_{kk}^n + \frac{N''}{N} \frac{1}{N''} \sum_{k \in \partial V_{N,n}} A_{kk}^n. \quad (47)$$

Wegen der Stationarität und Ergodizität von  $g$  bezüglich der Shifts aus  $\mathbb{Z}^2$ , die sich auf die Matricelemente  $A_{kk}$  überträgt (s.o.), kann der Ergodensatz (die Summanden der ersten Summe sind nun unabhängig von  $N$ ) angewendet werden,

$$\frac{1}{N'} \sum_{k \in \overset{\circ}{V}_{N,n}} \bar{A}_{kk}^n \rightarrow \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n], \quad (48)$$

wegen  $N'/N \rightarrow 1, N''/N \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$  und weil  $\frac{1}{N''} \sum_{k \in \partial V_{N,n}} A_{kk}^n \leq 1$  beschränkt ist.  $\square$

Im Falle der Funktion  $\chi_{e \notin E_\infty^{n.N.}}$ , die offensichtlich stationär ist und bezüglich Verschiebungen aus  $\mathbb{Z}^2$  ergodisch gibt es keine 'Randeffekte'. Hier kann der Ergodensatz direkt

angewendet werden (siehe (115)).

Die Zufallsgröße  $\tilde{N}_k, k \in V_N$  ist die Kardinalität der Zusammenhangskomponente (die  $k$  enthält) des **endlichen** Graphen  $G_N$ . Da  $\bar{N}_k$ , die Kardinalität der Zusammenhangskomponente von  $G_\infty(\omega) := \langle \mathbb{Z}^2, E_\infty(\omega) \rangle$  stationär und ergodisch ist bez. Shifts aus  $\mathbb{Z}^2$ , ist es möglich zu Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  den Ergodensatz in der Form

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) = \mathbb{E}[f(\bar{N}_0)] \quad (49)$$

anzuwenden. Insbesondere ist es wünschenswert, dass die Identität auch für  $f(\tilde{N}_k)$  gilt. Hier gilt der

**Satz 3.2.** *Es existiere  $\lim_{N \rightarrow \infty} f(N) =: C$ . Sei*

$$\tilde{N}_k = |\tilde{Q}_k| = |\bar{Q}_k \cap V_N|. \quad (50)$$

Dann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) = \mathbb{E}[f(\bar{N}_0)]. \quad (51)$$

*Beweis:* Sei  $\bar{N}_k = |\bar{Q}_k|$  die Größe der Zusammenhangskomponente  $\bar{Q}_k$  des unendlich großen Graphen, welche den Vertex  $k \in \mathbb{Z}^2$  enthält. Sei  $M(\infty)$  die Anzahl der unendlich großen Zusammenhangskomponenten von  $G_\infty(\omega)$ . Dann gilt für ein beliebiges  $N_0 \in \mathbb{N}$  und  $\mu$ -fast jedes  $\omega \in \Omega$

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k(\omega)) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \tilde{N}_k < N_0}} f(\tilde{N}_k) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \tilde{N}_k \geq N_0}} f(\tilde{N}_k) \quad (52)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \bar{Q}_k \subset V_N}} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} < N_0\}}(k) \quad (53)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \bar{Q}_k \cap V_N^c \neq \emptyset}} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} < N_0\}}(k) \quad (54)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}(k). \quad (55)$$

Im Term (53) kann man die Kardinalitäten  $\tilde{N}_k$  jeweils durch  $\bar{N}_k$  ersetzen. Es folgt wegen des Ergodensatzes

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \bar{Q}_k \subset V_N}} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} < N_0\}}(k) = \mathbb{E}[f(\bar{N}_0) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} < N_0\}}]. \quad (56)$$

Der Betrag des zweiten Terms (54) verschwindet für  $N \rightarrow \infty$  bei festgehaltenem  $N_0$ , da wegen der Beschränktheit von  $f$  (Folge der Voraussetzung)

$$0 \leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \bar{Q}_k \cap V_N^c \neq \emptyset}} |f(\tilde{N}_k)| \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} < N_0\}}(k) \leq \frac{1}{N} 4\sqrt{N} N_0 \max_{k \in \mathbb{Z}^2} f(k) \rightarrow 0, \quad (N \rightarrow \infty). \quad (57)$$

Schließlich läßt sich der dritte Term (55) beschränken:

$$\min_{n \geq N_0} f(n) \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}(k) \leq \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}(k) \quad (58)$$

und

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}(k) \leq \max_{n \geq N_0} f(n) \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}(k). \quad (59)$$

Führt man zuerst den Limes  $N \rightarrow \infty$  aus, resultiert

$$\min_{n \geq N_0} f(n) \mathbb{E}[\chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}] \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}(k) \quad (60)$$

und

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}(k) \leq \max_{n \geq N_0} f(n) \mathbb{E}[\chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} \geq N_0\}}]. \quad (61)$$

Läßt man  $N_0$  gegen Unendlich gehen konvergiert die linke Seite von (60) gegen die rechte Seite von (61). Damit ist unterer und oberer Häufungspunkt (der Folge in  $N_0$ ) gleich so, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \bar{N}_k = \infty}} f(\tilde{N}_k) = C \mu[\bar{N}_0 = \infty]. \quad (62)$$

Zusammen mit (56) ergibt das wegen  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} f(\tilde{N}_k) = \mathbb{E}[f(\bar{N}_0) \chi_{\{k' | \bar{N}_{k'} < \infty\}}] + C \mu[\bar{N}_0 = \infty] = \mathbb{E}[f(\bar{N}_0)]. \quad (63)$$

□

### 3.2 Konsequenzen des Courant-Fischerschen Min-Max-Prinzips

Als stochastische Matrix hat  $A$  Spektralradius 1. Das Spektrum des Generators der Halbgruppe,  $L = \mathbb{I} - A$ , ist somit Teilmenge des Intervalls  $[0, 2]$ . Dass 2 selbst nicht Element von  $\mathcal{S}(L)$  ist, hängt mit der speziellen Wahl der Randbedingungen zusammen, bzw. mit der speziellen Definition der Markovkette:

**Lemma 3.3.** *Die symmetrische Irrfahrt (24) ist aperiodisch.*<sup>3</sup>

*Beweis:* Da  $A$  symmetrisch, kann es höchstens eine Periodizitätsklasse mit Periode 2 geben. Also, zu zeigen ist:  $-1 \notin \mathcal{S}(A)$ . Es gilt  $A = D + \tilde{A}$  mit der Inzidenzmatrix  $4\tilde{A}$  und einer Diagonalmatrix  $D$ . Wenn  $D = 0$ , die Nullmatrix ist, dann handelt es sich um die homogene Irrfahrt  $A_0$  auf  $\{-W + 1, \dots, W\}^2$ , mit wohlbekanntem Spektrum ([43], Seite 354)

$$\beta_{i_1, i_2} = \frac{1}{2}(\cos(\pi i_1 / \sqrt{N}) + \cos(\pi i_2 / \sqrt{N})), \quad i_1, i_2 \in \{0, \dots, \sqrt{N} - 1\}, \quad (64)$$

so, dass  $-1 \notin \mathcal{S}(A)$ . Ist  $D \neq 0$ , so gilt  $A = A_0 + \sum_j S_j$  mit  $\mathcal{S}(S_j) = \{0, 0.5\}$ , also  $S_j \geq 0$  ist positiv semidefinit. Das Spektrum von  $A$  kann sich gegenüber dem von  $A_0$  nur in positive Richtung verschieben [30], denn

$$\bigwedge_{\beta \in \mathcal{S}(A)} \beta \geq \min_{v \in \mathbb{R}^N} (v, (D + \frac{1}{4}A_0)v) \geq \min_{v \in \mathbb{R}^N} (v, A_0v) + \sum_j \min_{w \in \mathbb{R}^N} (w, S_j w) \geq -\cos(\frac{\pi}{W}) > -1. \quad \square$$

Wegen der Aperiodizität (Lemma 3.3) und Reversibilität (Symmetrie) existiert also zu festem  $\omega \in \Omega$

$$M_N(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sp}[A^n(\omega)], \quad N \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega. \quad (65)$$

Dies folgt aus dem Spektralsatz, da  $A$  symmetrisch ist. Alle Eigenwerte kleiner als 1 sind dem Betrage nach kleiner als eins und konvergieren mit der Potenz  $n$  gegen Null.

Das Spektrum der Irrfahrt auf dem homogenen Gitter, d.h. auf dem Graphen mit  $N$  Vertizes und allen  $2N - 2\sqrt{N}$  Kanten (die  $4\sqrt{N}$  Schleifen am Rand entsprechen den Randbedingungen, die den irrfahrenden Wanderer einen Schritt am Platz verharren lassen, wenn er versucht über den Rand zu wandern) hat die Form (64) und ist bis auf den Perron-Frobenius Eigenwert 1 symmetrisch zur Null verteilt (Siehe Abb. 1). Durch die (nicht kleine) Störung werden die Eigenwerte nach oben verschoben. Die Verschiebung ist aber insofern beschränkt, als der (neue) Eigenwert seinerseits im Intervall  $(-1, 1]$  enthalten sein muss. Das Spektrum  $\mathcal{S}(A)$  ist also bei  $+1$  stärker konzentriert. Die Multiplizität vom Eigenwert 1 ist dabei die gesuchte Größe  $M$  (siehe Abb. 2).

---

<sup>3</sup>Mit **symmetrischer Irrfahrt** ist hier die symmetrische Irrfahrt mit immer gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten auf nicht notwendig homogenen Gittern gemeint (siehe Abschnitt 1.4).

**Lemma 3.4.** Sei  $L_0 = \mathbb{I} - A_0$  der Generator der Halbgruppe zur homogenen Irrfahrt auf  $(V_N, E_N^{n,N})$ , d.h. alle Kanten sind offen ('leitend'). Zu  $\omega \in \Omega$ , gelte  $L^{(n)}(\omega) = \mathbb{I} - A^n(\omega)$  mit Eigenwerten  $\{\lambda_j^{(n)}(\omega)\}$ .

Die Eigenwerte von  $L$  sind jeweils gegenüber den Eigenwerten von  $L_0$  nach unten verschoben, d.h., mit einer geeigneten Nummerierung gilt für alle  $j \in \{1, \dots, N\}, n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_j(\omega) \leq \lambda_{0,j}. \quad (66)$$

*Beweis:* Es gilt  $A(\omega) = A_0 + S(\omega)$  mit  $S(\omega) = \sum_j S_j(\omega)$  und ('...' deutet Eintrag Null an)

$$S_j(\omega) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & +1 & \dots & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & \dots & +1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (67)$$

also  $\text{Rang}(S_j(\omega)) = 1$ , und  $\mathcal{S}(S_j(\omega)) = \{0, \frac{1}{2}\}$ , damit  $S(\omega) \geq 0$ . Für den Generator  $L(\omega) = \mathbb{I} - A(\omega)$  gilt mit diesen Definitionen

$$L(\omega) = \mathbb{I} - (A_0 + \sum_l S_l(\omega)) = L_0 - S(\omega). \quad (68)$$

Nach dem Courant-Fischer Min-Max-Prinzip gilt mit  $\mathcal{W}_j^0 := \text{span}(v_{j+1}^0, \dots, v_N^0)$  zu den Eigenvektoren  $v_j^0 \in \mathbb{C}^N$  und Eigenwerten  $\lambda_{0,j}$  von  $L_0$  ( $\omega$  wird nun weggelassen:)

$$\lambda_j = \min_{\substack{\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim(\mathcal{W})=j-1}} \max_{v \perp \mathcal{W}} \frac{\langle v, (L_0 - S)v \rangle}{\|v\|^2} \quad (69)$$

$$\leq \min_{\substack{\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^n \\ \dim(\mathcal{W})=j-1}} \left( \max_{v \perp \mathcal{W}} \frac{\langle v, L_0 v \rangle}{\|v\|^2} + \max_{v \perp \mathcal{W}} \frac{\langle v, (-S)v \rangle}{\|v\|^2} \right) \quad (70)$$

$$\leq \max_{v \perp \mathcal{W}_j^0} \frac{\langle v, L_0 v \rangle}{\|v\|^2} + \max_{v \perp \mathcal{W}_j^0} \frac{\langle v, (-S)v \rangle}{\|v\|^2} \quad (71)$$

$$\leq \max_{v \perp \mathcal{W}_j^0} \frac{\langle v, L_0 v \rangle}{\|v\|^2} + \max_v \frac{\langle v, (-S)v \rangle}{\|v\|^2} \quad (72)$$

$$\leq \lambda_{0,j} + \min_v \frac{\langle v, Sv \rangle}{\|v\|^2} \quad (73)$$

$$\leq \lambda_{0,j} + 0, \quad (74)$$

wegen der positiven Semidefinitheit von  $S(\omega)$ . Das Spektrum von  $L(\omega)$  verschiebt sich (vergl. (65)) also gegenüber dem von  $L_0$  nach unten. Die analoge Aussage für  $\lambda_j^{(n)}(\omega)$  ist i.A. nicht wahr. Was gilt ist

**Lemma 3.5.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  ungerade. Dann*

$$\lambda_j^{(n)}(\omega) \leq \lambda_{0,j}^{(n)}. \quad (75)$$

*Beweis:* Die Funktion  $w : x \mapsto 1 - (1 - x)^n$  ist streng monoton wachsend. Es gilt  $\lambda_j^{(n)}(\omega) = w(\lambda_j)$ . Wenn also  $\lambda_j(\omega) \leq \lambda_{0,j}$ , dann  $w(\lambda_j(\omega)) \leq w(\lambda_{0,j})$ .  $\square$

Für die Spur von  $A$  gilt dann

**Lemma 3.6.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  ungerade. Dann zu  $\omega \in \Omega$*

$$Sp[A^n(\omega)] \geq Sp[A_0^n(\omega)]. \quad (76)$$

*Beweis:*  $\beta_j^n(\omega) - \beta_{0,j}^n = 1 - \beta_{0,j}^n - (1 - \beta_j^n(\omega)) = \lambda_{0,j}^{(n)} - \lambda_j^{(n)}(\omega)$ .

Also  $Sp[A^n](\omega) - Sp[A_0^n] = \sum_{j=1}^N (\beta_j^n(\omega) - \beta_{0,j}^n) = \sum_{j=1}^N (\lambda_{0,j}^{(n)} - \lambda_j^{(n)}(\omega)) \geq 0$ .  $\square$

**Lemma 3.7.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  gerade. Dann ( $\omega \in \Omega$ )*

$$Sp[A^n(\omega)] \geq Sp[A^{n+1}(\omega)]. \quad (77)$$

*Beweis:*  $Sp[A^{n+1}(\omega)] = \sum_{j=1}^N \beta_j^n(\omega)\beta_j(\omega) \leq \sum_{j=1}^N \beta_j^n(\omega) \leq Sp[A^n(\omega)]$ .  $\square$

Bemerkung: Die erwartete  $n$ -Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeit  $\mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]$  zum Ursprung der Irrfahrt ist im Fall der Stationarität beim homogenen Gitter bei ungerader Schrittanzahl  $n$  kleiner als beim Vorhandensein von 'Obstacles', also bei herausgenommenen Kanten. Dies folgt aus Satz 3.1. Genauso ist es für gerades  $n \in \mathbb{N}$  wahrscheinlicher, in  $n + 1$  Schritten vermittelt der 'gestörten' Irrfahrt zum Ursprung zurückzufinden, als in  $n$  Schritten auf dem homogenen Gitter (da ist die Wahrscheinlichkeit gleich Null) oder auf einem weniger gestörten Gitter - mit weniger 'Hindernissen'.

Im Folgenden werden die Spektren von  $A_0$ , der Irrfahrt auf dem homogenen Gitter (ab jetzt kurz: 'homogene Irrfahrt') und  $A$  der Irrfahrt auf dem Gitter mit herausgenommenen Kanten und entsprechend hinzugefügten Schleifen ( $\Leftrightarrow$ : 'gestörte Irrfahrt') verglichen.

Im Folgenden sei die Konvention gültig, dass die Eigenwerte  $\beta_j \in \mathcal{S}(A)$ , ( $j \in \{1, \dots, N\}$ ) in **absteigender** Reihenfolge angeordnet sind ( $\omega \in \Omega$ ):

$$1 = \beta_1 \geq \beta_2(\omega) \geq \beta_3(\omega) \geq \dots \beta_N(\omega). \quad (78)$$

Dies gelte auch für das ungestörte Spektrum  $\mathcal{S}(A_0)$ , das 1 als Eigenwert nur einmal enthält:

$$1 = \beta_{0,1} > \beta_{0,2} = \beta_{0,3} > \dots \beta_{0,N}. \quad (79)$$

**Satz 3.8.** (*Obere Schranke - Resultat 2.2.1*)

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} M_N(\omega)/N \leq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n}], \quad (n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega). \quad (80)$$

Notation: Die Abhängigkeit von  $\omega$  wird im Weiteren zum Zweck der Übersicht weggelassen.

*Beweis:* Es gilt für  $\omega \in \Omega$  fest

$$\frac{1}{N} \text{Sp}[A^{2n}] = \frac{M_N}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=M_N+1}^N \beta_j^{2n} \quad (81)$$

und

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N}{N} + \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=M_N+1}^N \beta_j^{2n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Sp}[A^{2n}] = \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n}]. \quad (82)$$

Die letzte Gleichung gilt wegen Satz 3.1. Dies beweist Aussage 2.1.1.  $\square$

Sei  $\mathbb{P}_{\text{inv}}$  der Projektor in den invarianten ( $M_N$ -dimensionalen) Unterraum von  $A$ .

Für die untere Schranke sei die Zufallsvariable  $M_N$  in der folgenden Form betrachtet:

$$\begin{aligned} M_N &= \text{Sp}[P_{\text{inv}}] = \text{Sp}[P_{\text{inv}} A^n] \\ &= \text{Sp}[A^n] - \text{Sp}[P^\perp A^n] \end{aligned} \quad (83)$$

mit  $P^\perp := \mathbb{I} - P_{\text{inv}}$ . Es gilt

$$\text{Sp}[P^\perp A^n] = \sum_{j=M+1}^N \beta_j^n \quad (84)$$

und zu jeder Zusammenhangskomponente  $Q_l$ ,  $l \in \{1, \dots, M_N\}$  des Graphen  $G_N$  gibt es einen Unterraum  $\mathcal{V}_l$  mit orthogonalem Projektor  $P_{\mathcal{V}_l}$  der Dimension  $N_l := |Q_l|$  (= Anzahl der Vertices in  $Q_l$ ) mit der Eigenschaft, dass das Spektrum der Matrix  $P_{\mathcal{V}_l} A P_{\mathcal{V}_l}$  den Eigenwert 1 genau einmal enthält. (Die Abhängigkeit von  $\omega \in \Omega$  wurde hier auch weggelassen).

Es gibt dann die Darstellung der stochastischen Matrix der gestörten Irrfahrt in Form einer direkten Summe:

$$A = \bigoplus_{l=1}^{M_N} P_{\mathcal{V}_l} A P_{\mathcal{V}_l}, \quad (85)$$



(wobei alle Größen von  $\omega \in \Omega$  und  $N \in \mathbb{N}$  abhängen).

Die minimal invarianten Verteilungen der Irrfahrt mit Übergangsmatrix  $A$  auf dem endlichen Zustandsraum  $V_N$  sind wegen der Symmetrie ( $A_{km} = A_{mk}$ ,  $k, m \in \{1, \dots, N\}$ ) gerade die Gleichverteilungen auf  $Q_l$  (siehe z.B. [4]).

An dieser Stelle kann man wieder das Courant-Fischer Variationsprinzip verwenden:

**Satz 3.9.** (*Rayleigh, Routh, Cauchy*) Wenn  $A, A_0, S$  selbstadjungierte  $N \times N$ -Matrizen sind, dann gilt in  $A = A_0 + S$  mit  $\text{Rang}(S) = R_N$ , dass jeder Eigenwert  $\beta_j \in \mathcal{S}(A)$  aus jeweils einem Eigenwert  $\beta_{0,j} \in \mathcal{S}(A_0)$  durch Verschiebung hervorgeht, wobei die Verschiebung um nicht mehr als  $R_N$  sukzessive (d.h. fortlaufend benachbarte) Intervalle des ungestörten Spektrums betragen darf, d.h.

$$\beta_{0,j} \leq \beta_j \leq \beta_{0,(j-R_N) \vee 1}. \quad (86)$$

*Beweis:* Siehe [30]. □

Bemerkung: Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, dass sich die Eigenwerte von  $A$  durch das Rayleighsche Variationsprinzip aus den Eigenwerten von  $A_0$  unter zusätzlichen *Zwangsbedingungen* an die Lösung dieser Variationsaufgabe ergeben. Die Zwangsbedingungen sind hier durch die Randbedingungen bestimmt, die ein 'Herausnehmen einer Kante', damit eine Addition von einem entsprechenden  $S_j$  des Typs (67) zu  $A_0$  an die zugehörigen Eigenvektoren stellen. Der Beweis dieses Rayleighschen Satzes wird durch die Anwendung des Courant-Fischerschen Min-Max-Prinzips einfach, in dem die Eigenvektoren selbst nicht bekannt sein müssen. Im Allgemeinen bewirkt die Fortnahme einer Kante an zwei Vertizes eine Zwangsbedingung an die Eigenvektoren. (Deshalb haben die Matrizen  $S_j$  zwei Spalten/Zeilen ungleich Null). Ihr Rang ist jedoch eins und entspricht deshalb nur einer zusätzlichen Zwangsbedingung, weil die Bedingung der Stochastizität der Matrix  $A$  durch die spezielle Form von  $S_j$  die eine der Randbedingungen unter Vorgabe der anderen bereits impliziert.

Woess [46] verwendet das Min-Max-Prinzip, in einem ähnlichen Kontext, um die Spektren von Dirichletformen von Markovprozessen auf Gruppen zu vergleichen.

In [28] findet sich eine Zusammenfassung dieser Anwendung des Courant-Fischer Theorems.

Um den Rang  $R_N$  von der 'Störung' zu bestimmen sei erwogen:

**Lemma 3.10.** *Die Matrizen  $S_j$  aus (67) haben den Rang 1.*

*Beweis:* Das Spektrum von  $S_j$  ist  $\{0, \frac{1}{2}\}$ , wobei  $\frac{1}{2}$  algebraische Vielfachheit 1 hat. □

**Definition:** Sei  $K_N := |\mathcal{A}(|g_N|, \sigma)|$ .

*Bemerkung:*  $K_N = |\{\{k, l\} \in E_N^{n, N} : |g(\omega, \{k, l\})| \geq \sigma\}|$ .

Dann folgt

**Satz 3.11.**

$$R_N = K_N. \quad (87)$$

*Beweis:* Wegen  $S = A - A_0 = \sum_{j=1}^{K_N} S_j$  mit geeigneten unterschiedlichen Matrizen  $\{S_j\}_{j=1}^{K_N}$  der Form (67) gilt die Aussage wegen Lemma 3.10.  $\square$

Der Rang der Störungsmatrix  $S$  ist also die Anzahl der Kanten, die aus dem homogenen Graphen entfernt und jeweils durch Schleifen ersetzt wurden. Im Folgenden wird die Spur  $\text{Sp}[A^n]$  mit der Spur über  $A_0^n$  verglichen.

### 3.3 Beweis von Resultat 2.1.2

Zunächst wird (83) in der folgenden Form geschrieben:

$$M_N = \text{Sp}[A^n] - \sum_{j=M_N+1}^N (\beta_j^n - \beta_{0,j}^n) - \sum_{j=M_N+1}^N \beta_{0,j}^n. \quad (88)$$

Für die Differenz der Eigenwerte gilt wegen Satz 3.9 das folgende

**Lemma 3.12.** *Es existieren Folgen  $c_N^{(1)}, c_N^{(2)}$ , ( $N \in \mathbb{N}$ ) so, dass*

$$\bigwedge_{N \in \mathbb{N}} : \beta_j - \beta_{0,j} \leq c_N^{(1)} \frac{K_N}{N} + c_N^{(2)} \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (89)$$

und  $\lim_{N \rightarrow \infty} c_N^{(1)} = 2\pi$  und  $\lim_{N \rightarrow \infty} c_N^{(2)} \frac{1}{\sqrt{N}} = 0$ .

*Beweis:* Zunächst gilt wegen Satz 3.9

$$\beta_j - \beta_{0,j} \leq \beta_{0, (j-K_N) \vee 1} - \beta_{0,j}. \quad (90)$$

Zum Spektrum  $\beta_{0,i} = \frac{1}{2}(\cos(\pi i_1/\sqrt{N}) + \cos(\pi i_2/\sqrt{N}))$  mit  $i = \langle i_1, i_2 \rangle \in \{0, \dots, \sqrt{N} - 1\}^2$  der Übergangsmatrix der ungestörten Irrfahrt und zur Zahl  $E \in [-1, 1]$  sei definiert:

$$Z_E := |\{x \in [0, 1]^2 \mid \frac{1}{2}(\cos(\pi x_1) + \cos(\pi x_2)) \geq E\}| \quad (91)$$

$$Z_E^0 := |\{x \in [0, 1]^2 \mid 1 - \frac{1}{2}\pi^2(x_1^2 + x_2^2) \geq E\}|. \quad (92)$$

$Z_E$  heiße die *Integrierte Zustandsdichte* von  $\bar{A}$ . Zur Dichte der Integrierten Zustandsdichte  $D(E) := \frac{dZ_E}{dE}$  gibt die Gre  $ND(E)$  asymptotisch (d.h. für große  $N$ ) die Änderung der Anzahl der Eigenwerte innerhalb der Menge  $\{\beta \in \mathcal{S}(A_0) \mid \beta \geq E\}$  pro Veränderung des Parameters  $E$  um Einheitslänge an. Es wird gezeigt: Es gibt eine positive Zahl,  $1/(2\pi)$ , so, dass

$$D(E) \geq \frac{1}{2\pi}, \quad E \in [-1, 1]. \quad (93)$$

Zu  $E \in [-1, 1]$ , sei  $k \in [0, 1]$ , so, dass  $E = \cos(\pi k)$  ( $= \frac{1}{2}(\cos(\pi k) + \cos(\pi k))$ ). Es gilt dann:

$$Z_E^0 = |\{1 - \frac{\pi^2}{2}k^2 \geq E\}| = |\{(1 - E)\frac{2}{\pi^2} \geq k^2\}| \quad (94)$$

$$= \frac{1 - E}{2\pi}. \quad (95)$$

Also zu der Wahl von  $E$  und  $k$  gilt:  $Z_E^0 = \frac{1}{2\pi}(1 - \cos(\pi k))$  und damit

$$\frac{dZ_E^0}{dk} = \frac{1}{2} \sin(\pi k). \quad (96)$$

Da  $\frac{dZ_E}{dk} \geq \frac{dZ_E^0}{dk}$  folgt

$$D(E) = \frac{dZ_E}{dE} = -\frac{\frac{dZ_E}{dk}}{\frac{dE}{dk}} \quad (97)$$

$$= \frac{\frac{dZ_E}{dk}}{\pi \sin(\pi k)} \quad (98)$$

$$\geq \frac{\frac{dZ_E^0}{dk}}{\pi \sin(\pi k)} \quad (99)$$

$$= \frac{1}{2\pi}, \quad (100)$$

also  $D(E) > 0$ . Eine Veränderung von  $E$  um  $1/N$  für  $E$  innerhalb eines Intervalls einer Länge von Ordnung  $1/\sqrt{N}$  führt zu keiner Veränderung der Anzahl der Eigenwerte in  $\{\beta \in \mathcal{S}(A_0) \mid \beta \geq E\}$  und damit wäre die Gre  $D(E)$  an dieser Stelle asymptotisch gleich Null. Also gilt, dass die Vereinigung der Intervalle zwischen Eigenwerten der Ordnung

$1/\sqrt{N}$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen eine Menge vom Maß Null konvergiert, da nur so die Dichte  $D(E)$  der Integrierten Zustandsdichte überall positiv sein kann. Mit anderen Worten, (sei  $A_0^{(N)} := A_0$ )<sup>4</sup>

$$\left| \left\{ x \in [-1, 1] \mid \bigvee_{c>0} \bigwedge_{N \in \mathbb{N}} (x, x + \frac{c}{\sqrt{N}}) \cap \mathcal{S}(A_0^{(N)}) = \emptyset \right\} \right| = 0. \quad (101)$$

Dass die Intervalle zwischen den ungestörten Eigenwerten selbst durch  $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$  beschränkt sind erklärt, dass bei Überspringen von  $K_N$  Eigenwerten keine größeren Spünge als  $c_N^{(2)} \frac{1}{\sqrt{N}}$  vorkommen. Wegen (101) konvergiert dieser Term mit  $N \rightarrow \infty$  gegen Null.

Außerdem

$$\beta_{0,(j-K_n) \vee 1} - \beta_{0,j} \leq \max_{j \in \{1, \dots, N\}} \left\{ \frac{\beta_{0,(j-K_n) \vee 1} - \beta_{0,j}}{K_N} \right\} K_N \quad (102)$$

$$\leq \frac{1}{\min_{E \in [-1, 1]} \{D(E)\}} K_N = \frac{K_N}{2\pi N}. \quad (103)$$

□.

Bemerkung: Das hier auftretende Spektrum ist jenes des freien Laplaceoperators auf  $\mathbb{Z}^2$ . Es ist bekannt, dass die Dichte  $D(E)$  der Integrierten Zustandsdichte eine logarithmische Singularität bei  $E = 0$  hat (sog. *Van Hove Singularität*).

Es gilt also

$$\beta_j^n - \beta_{0,j}^n \leq (\beta_j - \beta_{0,j}) \sum_{m=0}^{n-1} \beta_j^m \beta_{0,j}^{n-1-m} \leq \frac{\pi}{2} \left( \frac{K_N}{N} + O\left(\frac{c_N^{(2)}}{\sqrt{N}}\right) \right) n \beta_j^{n-1} \quad (104)$$

$$\leq \frac{\pi n K_N}{2 N} e^{-n(1-\beta_j)} + o(1) \leq \frac{\pi n K_N}{2 N} e^{-n\lambda} + o(1). \quad (105)$$

Die Summe über das Spektrum von  $A_0^n$  läßt sich folgendermaßen abschätzen [43] (Sie läßt sich asymptotisch für große  $n$  genau berechnen. Hier sind allerdings Abschätzungen auch für kleine  $n \in \mathbb{N}$  gefragt.):

---

<sup>4</sup> | · | bedeutet hier das Lebesgue-Maß.

$$\mathrm{Sp}[A_0^n] - 1 = \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}-1} \left(1 - \frac{n}{n} (1 - \beta_{0,\{k,l\}})\right)^n \quad (106)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}-1} \exp(-n(1 - \beta_{0,\{k,l\}})) \quad (107)$$

$$= e^{-n} \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}-1} \exp\left(\frac{n}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi k}{\sqrt{N}}\right) + \cos\left(\frac{\pi l}{\sqrt{N}}\right)\right)\right) \quad (108)$$

$$= e^{-n} \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}-1} \exp\left(\frac{n}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi k}{\sqrt{N}}\right) + \cos\left(\frac{\pi l}{\sqrt{N}}\right)\right)\right) \quad (109)$$

und da  $\cos(\pi x) \leq 1 - 2x^2$  für  $0 < x \leq 1$

$$\leq e^{-n} \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} \exp\left(\frac{n}{2} \left(1 - 2\frac{k^2}{N}\right)\right) \sum_{l=1}^{\sqrt{N}-1} \exp\left(\frac{n}{2} \left(1 - 2\frac{l^2}{N}\right)\right) \quad (110)$$

$$= \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} \exp\left(-n\frac{k^2}{N}\right) \sum_{l=1}^{\sqrt{N}-1} \exp\left(-n\frac{l^2}{N}\right) \quad (111)$$

$$\leq \left(1 + \int_0^{\sqrt{N}-1} e^{-\frac{n}{N}x^2} dx\right) \int_0^{\sqrt{N}-1} e^{-\frac{n}{N}y^2} dy \quad (112)$$

$$\leq \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{N}{n}}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{N}{n}} \quad (113)$$

$$\leq \frac{\pi N}{4n} + O(\sqrt{N}).$$

Mit Satz 3.1) folgt

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N}{N} &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathrm{Sp}[A^n] - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{2} \left(\frac{K_N}{N}\right) \frac{1}{N} \sum_{j=M_N+1}^N \beta_j - \frac{\pi}{4} \frac{1}{n} \\ &\geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - n\pi e^{-n\lambda} \mu[e \notin E_N] - \frac{\pi}{4} \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (114)$$

Dies folgt aus dem Ergodensatz für die Folge  $N \mapsto K_N/N = \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \chi_{\mathcal{A}(g,\sigma)}(\{k, k + e_x\}) + \chi_{\mathcal{A}(g,\sigma)}(\{k, k + e_y\})$  mit  $(\mathcal{A}(g,\sigma) = E_\infty^{n,N} \setminus E_N)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K_N(\omega)}{N} = \mathbb{E}[\chi_{\mathcal{A}(g,\sigma)}(\{0, 0 + e_x\}) + \chi_{\mathcal{A}(g,\sigma)}(\{0, 0 + e_y\})] = 2\mu[e \notin E_N] \quad (115)$$

und beweist die Aussage von Satz 2.1.2.  $\square$

Die Aussage setzt die Zufallsvariable 'Anzahl der Zusammenhangskomponenten  $M_N$ ' in Beziehung zu der erwarteten n-Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeit  $\mathbb{E}_\mu[A_{00}^n] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[X_n^0 = 0]]$ , wobei der äußere Erwartungswert über  $\Omega$ , also über die Realisierungen der Graphen geht und das  $P[\cdot]$  bezüglich des Gesetzes der Markovkette in dem jeweiligen *Environment*  $\omega \in \Omega$ , also über  $\widehat{\Omega}(\omega)$  gebildet wird.

### 3.4 Beweis von Resultat 2.1.3

Üblicherweise sind keine guten Schranken für  $\lambda$  bekannt. Darüber hinaus ist es möglich, dass ein sehr kleines  $\lambda$  - zugehörig zu dem spektralen Unterraum bzw. zu der Zusammenhangskomponente mit der längsten Equilibrierungszeit - überhaupt nicht repräsentativ für die Teilspektren der anderen Zusammenhangskomponenten ist. Eine Schranke für die spektralen Gaps der einzelnen Zusammenhangskomponenten liefert eine Abhängigkeit der Schranken von ihrer Geometrie.

Es gilt allgemein für Funktionen  $f : V_N \rightarrow \mathbb{R}$  (siehe Anhang für die Notation)

$$\frac{1}{N} \sum_{l=1}^{M_N} f(N_l) = \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \frac{f(\tilde{N}_k)}{\tilde{N}_k}. \quad (116)$$

Deshalb, wenn  $f = g \upharpoonright V_N$  für eine stationäre, ergodische Funktion  $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist, dann gilt nach dem Ergodensatz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{M_N} f(N_l) = \mathbb{E} \left[ \frac{f(\tilde{N}_0)}{\tilde{N}_0} \right]. \quad (117)$$

So ist es auch möglich, die mit (104) resultierenden Terme  $\beta_j^m \beta_{0,j}^{n-1-m}$  so zu summieren, dass der Ergodensatz verwendet kann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=2}^N \sum_{m=0}^{n-1} \beta_j^m \beta_{0,j}^{n-1-m} &\leq \frac{1}{N} \sum_{j=2}^N \beta_j^{n-1} \leq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{M_N} \sum_{i=2}^{N_l} e^{-(n-1)(1-\beta_{l,i})} \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \frac{1}{\tilde{N}_k} \sum_{i=2}^{\tilde{N}_k} e^{-n/\tilde{N}_k^2} \rightarrow \mathbb{E}[e^{-\frac{n}{\tilde{N}_0^2}}]. \end{aligned} \quad (118)$$

Die letzte Ungleichung gilt aufgrund von Lemma 3.13. (s.u.) Die Konvergenzaussage folgt aus Satz 3.2.

Dies beweist Resultat 2.1.3.  $\square$

### 3.5 Beweis von Resultat 2.2

Es ist wohlbekannt, dass die isoperimetrische Eigenschaften des Graphen als Zustandsraum einer Irrfahrt wesentlich auf die Konvergenzrate Einfluss haben ([1],[43],[34],[4],[46]). Meistens sind aber nur Abschätzungen für die exakten gegebenen isoperimetrischen Verhältnisse bekannt. Ein Beispiel hierfür ist die Cheeger-Ungleichung ([3][25][8][31][34]). Hier soll ebenfalls geometrische Information über die Zusammenhangskomponenten herangezogen werden, die aber einfach anhand von der vorgegebenen Partition (etwa bei digitalen Bildern) abzulesen oder numerisch zu beschaffen ist.

Die Grundproblematik von unteren Schranken der Anzahl der Zusammenhangskomponenten besteht, wie in der Einführung bereits erwähnt, darin, dass zu einer gegebenen Partition von  $V_N$  in Zusammenhangskomponenten  $\{Q_l\}_{l=1}^{M_N}$  eines Graphen  $G_N$  eine andere Partition - die triviale: mit nur einer Zusammenhangskomponente - sich nur in der Offenheit/Geschlossenheit einiger Kanten unterscheidet, jener, deren beide Vertizes jeweils in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten enthalten sind.

Es soll deshalb zunächst der Fall ohne Zusatzvoraussetzungen behandelt werden. Seien  $1 = \beta_{l,1} > \beta_{l,2} \geq \beta_{l,3} \cdots \geq \beta_{l,N_l}$  die Eigenwerte von  $P_{V_l} A P_{V_l}$ . Dann ist

$$\sum_{k=M_N+1}^N \beta_j^n = \sum_{l=1}^{M_N} \sum_{i=2}^{N_l} \beta_{l,i}^n . \quad (119)$$

Der betragsmäßig größte (sog. prinzipale) Eigenwert ungleich eins (hier auch wegen Lemma 3.4 der größte Eigenwert ungleich eins),  $\beta_{l,2}$ , des Spektrums einer ergodischen (der  $l$ -ten) Komponente von  $A$  kann gegenüber den prinzipalen Eigenwerten der stochastischen Matrizen  $P_{V'_l} A P_{V'_l}$  zu solchen Zusammenhangskomponenten  $Q'_l$  nach oben abgeschätzt werden, die aus  $Q_l$  durch Fortnahme von Kanten hervorgehen. Dies folgt aus Lemma 3.4.

**Lemma 3.13.** *Sei  $\beta_{l,2}$  der prinzipale Eigenwert zur symmetrischen Irrfahrt auf der  $l$ -ten Zusammenhangskomponente  $Q_l$  mit Kantenmenge  $E_l$ . Sei  $\beta'_{N_l}$  der prinzipale Eigenwert der symmetrischen Irrfahrt auf einer hintereinander angeordneten Kette von Vertizes mit  $N_l - 1$  Kanten. Dann gilt*

$$\beta_{l,2} \leq \beta'_{N_l} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi}{N_l}\right) \right). \quad (120)$$

*Beweis:* Zunächst ist klar, dass durch sukzessive Fortnahme von Kanten wegen Lemma 3.4 der Eigenwert  $\beta_{l,2}$  fortlaufend wenn überhaupt nach oben verschoben wird, denn das Fortnehmen einer einzelnen Kante entspricht einer Addition einer Rang 1 Matrix  $S_e$  vom Typ (67). Wichtig ist, dass die Markovkette dabei ergodisch bleibt, sonst tritt ein anderer Eigenwert an die Stelle des prinzipalen Eigenwerts. Der ursprüngliche prinzipale Eigenwert geht durch die Veränderung in eins über. Ist schließlich ein Teilgraph mit  $N_l - 1$  Kanten

entstanden, so enthält er keine Zyklen mehr, der Teilgraph ist ein Baum. Es bleibt zu zeigen: Unter allen Bäumen mit  $N_l - 1$  Kanten ist die lineare Kette der Graph, der die symmetrische Irrfahrt mit dem kleinsten spektralen Gap repräsentiert.

Der spektrale Gap, i.A. der Abstand zwischen 1 und dem betragsmäßig größten Eigenwert (im symmetrischen Fall) ist hier der erste nichtverschwindende Eigenwert vom Laplaceoperator  $L = \mathbb{I} - A$ . Hierbei kann wieder die Charakterisierung der Eigenwerte durch das Courant-Fischersche Variationsprinzip verwendet werden:

$$\lambda = \min_{v \neq \text{const.}} \frac{(v, Lv)}{(v, v)}. \quad (121)$$

Die *Dirichlet-Form*  $\langle v, w \rangle \mapsto (v, Lv)$  ist nicht-negativ, das folgt aus  $\mathcal{S}(L) \subset [0, 2)$  oder aus der Darstellung  $A = A_0 - \sum_{j=1}^{N_l-1} S_j$  mit  $A_0 = \mathbb{I}$  und  $S_j$  von der Form (67): Daraus ergibt sich  $L = \mathbb{I} - A = \sum_{j=1}^{N_l-1} S_j$ , wobei die Summe über die  $N_l - 1$  Kanten des Baumes (bzw. der Kette) geht und es resultiert die bekannte Darstellung [4]

$$(v, Lv) = \sum_{j=1}^{N_l-1} (v, S_j v) = \left(\frac{1}{4}\right)^{N_l-1} \sum_{j=1}^{N_l-1} |v_{k_1(j)} - v_{k_2(j)}|^2, \quad (122)$$

offensichtlich positiv, Null nur für konstante Vektoren.

Hierbei sind  $\{k_1(j), k_2(j)\}$ , ( $j \in \{1, \dots, N_l - 1\}$ ) die Kanten des Baumes (/der Kette).

Der Unterschied zwischen der linearen Kette und anderen Bäumen besteht darin, dass die Bäume mit Verzweigungen weniger Freiheitsgrade für die Auffindung des Minimums haben, da manche Vertizes  $k_1(j)$  oder  $k_2(j)$  der  $N_l - 1$  Kanten mit anderen übereinstimmen. Dadurch ist bei jedem Vertex mit Dreier- oder Viererkreuzung der Kanten mindestens eine zusätzliche Randbedingung, welche die Koordinaten  $v_k$  erfüllen müssen gegeben, welche die lineare Kette nicht fordert. Demnach ist das Minimum für die Kette immer kleiner oder gleich der anderer Bäume mit der gleichen Anzahl von Kanten.

Der Wert des prinzipalen Eigenwerts einer *eindimensionalen* Kette ist z.B. gegeben in [10]. Diese entspricht Übergängen zwischen benachbarten Vertizes mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ . An den Enden bestimmen die Randbedingungen der symmetrischen Irrfahrt ein Verbleiben am Ort mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ . Der spektrale Gap ist hier  $1 - \cos(\pi \frac{1}{N_l})$  [10]. Eine Kette, die im *zweidimensionalen* auf die oben beschriebene Weise durch Fortnahme von Kanten entstanden ist, hat wegen der besonderen Randbedingungen die Form  $\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \tilde{A}_0)$ , wobei  $\tilde{A}_0$  die Übergangsmatrix der eindimensionalen Irrfahrt auf der Kette ist, was den Faktor  $\frac{1}{2}$  erklärt.  $\square$



Aus diesem Lemma folgt:  $\beta_{l,i}^n \leq \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi}{\tilde{N}_l}))$ . Wegen  $\sum_{l=1}^{M_N} \cdot = \sum_{k \in V_N} \frac{\cdot}{\tilde{N}_k}$  (siehe Anhang für Notation) und  $\beta_{l,i}^n \leq \exp(-n(1 - \beta_{l,i}))$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=M_N+1}^N \beta_j^n = \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \frac{1}{\tilde{N}_k} \sum_{i=2}^{\tilde{N}_k} \exp(-n(1 - \beta_{l,2})) \leq \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} e^{-\frac{n}{2}(1 - \cos(\pi/\tilde{N}_k))}. \quad (123)$$

Des Weiteren ist wegen  $\cos(\pi x) \leq 1 - 4x^2$  für  $0 < x \leq 1/2$  ( $\tilde{N}_k \geq 2$ ) und wegen Satz 3.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Sp}[P^\perp A^n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=M_N+1}^N \beta_j^n \leq \mathbb{E}[\exp(-\frac{2n}{\tilde{N}_0^2})]. \quad (124)$$

Hierbei ist  $\tilde{N}_0 = |\bar{Q}_0|$ , also die Kardinalität der Zusammenhangskomponenten, welche den Ursprung enthält.

Daraus folgt die triviale Abschätzung der Anzahl der Zusammenhangskomponenten pro Volumen nach unten:

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} M_N(\omega)/N \geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \mathbb{E}[\exp(-\frac{2n}{\tilde{N}_0^2})]. \quad (125)$$

Für Anwendungen ist es allerdings oft schwierig oder unmöglich, die Verteilung der Kardinalität von  $\bar{Q}_0$  zu erhalten. Aus dem Vorangegangenen ist klar, dass das Spektrum von  $P_{\mathcal{V}_l} A P_{\mathcal{V}_l}$  zur Zusammenhangskomponente  $Q_l$  des Graphen  $G_N(\omega)$  als hervorgegangen gedacht werden kann aus den Eigenwerten der ungestörten Irrfahrt auf dem homogenen Gitter, geeignet verschoben um höchstens  $K_N$  Intervalle von  $\mathcal{S}(A_0)$ .  $K_N$  ist dabei der Rang der Störung und gleichzeitig die Anzahl der Kanten, die aus dem homogenen Graphen 'herausgestantzt' werden.

Dies legt den folgenden Sachverhalt nahe: Werden anstelle der  $K_N$  Kanten nur die Elemente des Randes von  $Q_l$ ,

$$\partial Q_l := \{ \{k_1, k_2\} \subset \mathbb{Z}^2 \ : \ \{k_1, k_2\} \in E_N^{\text{n.N.}} \setminus E_N(\omega), (k_1 \in Q_l \vee k_2 \in Q_l) \} \quad (126)$$

herausgenommen, so ergibt sich eine ('gestörte') Irrfahrt, die als ergodische Komponente die Irrfahrt auf  $Q_l$  beinhaltet. Diese ergibt sich auch, wenn als ungestörte, homogene Irrfahrt nicht das ganze Gitter zugrunde gelegt wird, sondern nur ein quadratischer Zustandsraum, der hinreichend groß ist,  $Q_l$  zu überdecken. Die folgende Argumentation beruht auf einer vernünftigen Wahl für die Größe des 'überdeckenden Quadrats'.

Seien wie oben  $1 = \beta_{l,1} > \beta_{l,2} \geq \dots \geq \beta_{l,N_l}$  die Eigenwerte von  $P_{\mathcal{V}_l} A P_{\mathcal{V}_l}$ . Sei

$$K_l := |\partial Q_l|, \quad (l \in \{1, \dots, M\}). \quad (127)$$

**Definition:** Sei  $\hat{N}_l := |\hat{Q}_l|$  die Kardinalität einer quadratischen Teilmenge  $\hat{Q}_l = \{k_1, \dots, k_{2\hat{W}_l}\}^2$  von  $\mathbb{Z}^2$  mit  $4\hat{W}_l^2 = \hat{N}_l$ ,  $\hat{A}_l$  die Übergangsmatrix der homogenen symmetrischen Irrfahrt auf  $\hat{Q}_l$  und  $\mathcal{S}(\hat{A}) = \{\hat{\beta}_{0,l,i}\}_{i=1}^{\hat{N}_l}$ . Die Größe  $\hat{N}_l$  sei durch die Forderung

$$\beta_{l,2} < \beta_{0,l,K_l+1} \leq \beta_{0,l,K_l} \leq \dots \beta_{0,l,2} < \beta_{0,l,1} = \beta_{l,1} = 1 \quad (128)$$

festgelegt.  $\hat{Q}_l$  ist also so groß, dass  $K_l$  der Eigenwerte von  $\hat{A}$  in dem Intervall  $(\beta_{l,2}, 1)$  liegen.

Bemerkung: Wird die Matrix  $\hat{A}$  durch eine positiv semidefinite Matrix des Ranges  $K_l$  (additiv) gestört, so verschieben sich die Eigenwerte zu jenen der Störung um höchstens  $K_l$  Intervalle und sind demnach kleiner oder gleich 1.

Sei  $\mathcal{O} : \{1, \dots, N_l\} \rightarrow \{1, \dots, \hat{N}_l\}$  die injektive Abbildung, welche den Elementen von  $\mathcal{S}(P_{\mathcal{V}_l} A P_{\mathcal{V}_l})$  ihre gedachten unverschobenen Eigenwerte aus  $\mathcal{S}(\hat{A})$  zuordnet. Dann gilt:

$$\hat{\beta}_{0,l,\mathcal{O}(i)} \leq \beta_{l,i} \leq \hat{\beta}_{0,l,\mathcal{O}(i)-K_l}. \quad (129)$$

Da  $\mathcal{O}$  Auswahlfolge ist und damit streng monoton ( $\mathcal{O}(i) \geq i + K_l$ ), gilt auch

$$\hat{\beta}_{0,l,\mathcal{O}(i)} \leq \hat{\beta}_{0,l,i}. \quad (130)$$

Konkret heißt dies für  $P_{\mathcal{V}_l} A P_{\mathcal{V}_l}$ , dass

$$\sum_{i=2}^{N_l} \beta_{l,i} \leq \sum_{i=2+K_l}^{N_l} \hat{\beta}_{0,l,i-K_l} = \sum_{i=2}^{N_l} \hat{\beta}_{0,l,i}. \quad (131)$$

Zur Bestimmung von  $\hat{N}_l$  in Abhängigkeit von  $K_l$  aus der Forderung, dass es mindestens  $K_l$  Eigenwerte von  $\hat{A}$  im Intervall  $(\beta_{l,2}, 1)$  gibt: Zu  $\hat{\beta}_{0,l,\langle i_1, i_2 \rangle} = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{\sqrt{\hat{N}_l}} i_1) + \cos(\frac{\pi}{\sqrt{\hat{N}_l}} i_2))$  sei  $i_1 = 0$  und  $i_2 = r$ , der Radius eines Viertelkreises, der  $K_l$  Tupel  $\langle i_1, i_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2$  einschließt:

$$K_l < \frac{1}{4} \pi r^2 \quad (132)$$

und für den gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{r}{\sqrt{\hat{N}_l}}\right) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{1}{\sqrt{\hat{N}_l}}\right). \quad (133)$$

Daraus folgt

$$\hat{N}_l \geq \frac{4}{\pi} K_l N_l. \quad (134)$$

Wegen (131) gilt mit  $\bar{N} := \left\lceil \sqrt{\hat{N}_l} \right\rceil$

$$\sum_{i=2}^{N_l} \beta_{l,i} \leq \sum_{i=2}^{N_l} \hat{\beta}_{0,l,i} \leq \sum_{i_1=0}^{\bar{N}} \sum_{i_2=1}^{\bar{N}} \exp \left( -n \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\pi}{\sqrt{\hat{N}}} i_1 \right) - \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\pi}{\sqrt{\hat{N}}} i_2 \right) \right) \right). \quad (135)$$

Die Summe läßt sich durch ein Integral in Polarkoordinaten abschätzen: Zunächst gilt für  $|x| \leq N_l / \hat{N}_l = 1/K_l \leq 1/6$  (Es gilt hier  $N_l \geq 2$ , also  $K_l \geq 6$ , da in der Summe nur die Zusammenhangskomponenten  $Q_l$  mit mehr als einem Eigenwert berücksichtigt werden).

$$\cos(\pi x) \leq 1 - cx^2 \quad (136)$$

mit  $c = 16(1 - \cos(\pi/6)) > 2.14$ .

Daraus ergibt sich

$$\sum_{i=2}^{N_l} \beta_{l,i}^n \leq \sum_{i=2}^{N_l} \hat{\beta}_{0,l,i}^n \leq \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{c}{2} \frac{n}{\hat{N}_l} (i_1^2 + i_2^2) \right) \quad (137)$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{c}{2} \frac{n}{\hat{N}_l} r^2} dr \quad (138)$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \frac{2 \hat{N}_l}{c n} \quad (139)$$

$$= \frac{\pi}{16(1 - \cos(\pi/6))} \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} K_l N_l \quad (140)$$

$$= \frac{K_l N_l}{4(1 - \cos(\pi/6))n} \quad (141)$$

$$< \frac{1}{2n} K_l N_l. \quad (142)$$

Damit folgt wegen des Ergodensatzes (3.1) Resultat 2.2:

$$\frac{1}{N} \sum_{l=1}^{M_N} \sum_{i=2}^{N_l} \beta_{l,i}^n \leq \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \frac{1}{\tilde{N}_k} \frac{1}{2n} \tilde{K}_k \tilde{N}_k \leq \frac{1}{2n} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \tilde{K}_k \rightarrow \frac{1}{2n} \mathbb{E}[\tilde{K}_0]. \quad \square \quad (143)$$

### 3.6 Beweis von Resultat 2.3

Die Folge  $a_n := \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Sp}[A^{2n}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2n}$  ist monoton fallend: Für alle  $n, N \in \mathbb{N}$  gilt

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2n} \beta_j^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2n}, \quad (144)$$

also, da die Konvergenz in  $N$  wegen Satz 3.1 gegeben ist

$$a_{n+1} \leq a_n. \quad (145)$$

Es gilt außerdem wegen Lemma 3.7, dass

$$\mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n}] \geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n+1}] > 0. \quad (146)$$

Also existiert der Limes von  $a_n$  wegen Monotonie und Beschränktheit und  $b_n := \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n+1}] \geq 0$  konvergiert, da  $a_n - b_n \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$ : Dies folgt aus der Konvergenz von  $a_n$  und daraus, dass  $\beta_{0,j} \leq \beta_j$ :

$$a_n - b_n = \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n}] - \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n+1}] \quad (147)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} (A_{kk}^{2n} - A_{kk}^{2n+1}) \quad (148)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ \beta_j \geq 0}}^N (\beta_j^{2n} - \beta_j^{2n+1}) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ \beta_j < 0}}^N (\beta_j^{2n} + |\beta_j^{2n+1}|) \quad (149)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\beta_j^{2n} - \beta_j^{2n+2}) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ \beta_j < 0}}^N 2\beta_j^{2n} \quad (150)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2n} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_j^{2n+2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ \beta_{0,j} < 0}}^N \beta_{0,j}^{2n} \quad (151)$$

$$\leq a_n - a_{n+1} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \beta_{0,j}^{2n} \quad (152)$$

$$\leq a_n - a_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi/N)\right)^n \quad (153)$$

$$\rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \quad (154)$$

Die Ungleichung von (150) nach (151) gilt, da sich das ungestörte Spektrum  $\mathcal{S}(A_0)$  durch die Störung nach oben (auf dem Intervall  $(-1, 1]$  nach rechts) verschiebt.

Die Spur über das (ungestörte) Spektrum von  $A_0^{2n}$  in (152) ist die 2n-Rückkehrwahrscheinlichkeit  $\text{Sp}[A_0^{2n}]$  der Irrfahrt auf dem homogenen Gitter  $V_N$  mit Spektrum (64).

Wenn  $\mathbb{E}[\bar{K}_0] < \infty$  konvergiert die Schranke des unteren Häufungspunktes von  $M_N(\omega)/N$  von unten wegen Satz 2.2 gegen

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N}{N} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{K}_0] \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]. \quad (155)$$

Aber auch im Fall  $\mathbb{E}[\bar{K}_0] = \infty$  gilt, dass  $\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N}{N} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]$ :

Hierfür wird die Abhängigkeit der  $Q_k$  von  $N$  benötigt: Sei  $\tilde{Q}_k^{(N)} =: \tilde{Q}_k$ , wenn  $\{Q_l^{(N)}\}_{l=1}^{M_N(\omega)}$  die Partition von  $V_N$  in die Zusammenhangskomponenten von  $G_N(\omega)$  zu festem  $\omega \in \Omega$  ist. Zu den Attributen  $\mathcal{C}_\infty(k) :\Leftrightarrow \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{Q}_k^{(N)} = \infty \right)$  und  $\mathcal{C}_<(k) :\Leftrightarrow \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{Q}_k^{(N)} < \infty \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$  gilt entweder  $\mathcal{C}_\infty(k)$  oder  $\mathcal{C}_<(k)$ , für alle  $k \in \mathbb{Z}^2$ . Deshalb:

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Sp}[A^n P^\perp] &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} (e_k, A^n P^\perp e_k) \\ &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{\substack{k \in V_N \\ \mathcal{C}_\infty(k)}} (e_k, A^n P^\perp e_k) + \sum_{\substack{k \in V_N \\ \mathcal{C}_<(k)}} (e_k, A^n P^\perp e_k) \right) \end{aligned} \quad (156)$$

Wenn  $\mathcal{C}_\infty(k)$ , dann  $(e_k, A^n P^\perp e_k) = (e_k, A^n (\mathbb{I} - P_{\text{inv}}) e_k) \rightarrow (e_k, A^n e_k)$ , wenn  $N \rightarrow \infty$ , da  $A^n P_{\text{inv}} e_k = \pi_k(\pi_k, e_k) \rightarrow 0$  (die invariante Verteilung am Vertex  $k$  mit der Dichte  $\pi_k \in L^1(V_N)$  ist die Gleichverteilung, also  $\pi_k(k) = 1/|\tilde{Q}_k^{(N)}| \rightarrow 0$ , wenn  $N \rightarrow \infty$ ) und

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \mathcal{C}_\infty(k)}} (e_k, A^n e_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k \in V_N \\ \mathcal{C}_\infty(k)}} \frac{1}{N} A_{kk}^n = \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n \chi_{\{k: \mathcal{C}_\infty(k)\}}(0)] \quad (158)$$

wegen der Stationarität und Ergodizität von  $k \mapsto A_{kk}^n \chi_{\{\bar{k}: \mathcal{C}_\infty(\bar{k})\}}(k)$ . Da

$$A_{00}^n \chi_{\{k: \mathcal{C}_<(k)\}}(0) \rightarrow \frac{1}{|\tilde{Q}_0^{(N)}|} \chi_{\{k: \mathcal{C}_<(k)\}}(0) \rightarrow 0, \quad \text{wenn } N \rightarrow \infty \quad (159)$$

ist  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathcal{C}_\infty(k)}} (e_k, A^n P^\perp e_k) = 0$ . Also gilt

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Sp}[A^n P^\perp] = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N \\ c < (k)}} (e_k, A^n P^\perp e_k) \quad (160)$$

$$= \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{l=1 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} Q_l < \infty}}^M \sum_{\substack{i \in Q_l \\ \beta_{l,i} < 1}}^M \beta_{l,i}^n. \quad (161)$$

Nun wird für jede Zusammenhangskomponente  $Q_l$  die Irrfahrt zunächst mit der Irrfahrt auf einem beliebigen *Baum* verglichen, deren Vertizes aus jenen der Zusammenhangskomponente bestehen und dessen Anzahl von Kanten  $N_l - 1$  beträgt. Aus Lemma 3.13 folgt, dass asymptotisch, für große Schrittzahlen  $n \in \mathbb{N}$  der Markovkette, die  $n$ -Schritt-Rückkehrwahrscheinlichkeit  $\frac{1}{N_l} \text{Sp}[(P_{V_l} A P_{V_l})^n] = \frac{1}{N_l} \sum_{i \in Q_l} \beta_{l,i}^n$  für die lineare *Kette* (d.h. der zugehörige Graph hat keine Verzweigungen) am größten ist, denn der größte Eigenwert ungleich eins ist für die Irrfahrt auf der Kette nach Lemma 3.13 unter allen Irrfahrten auf Bäumen mit  $N_l - 1$  Kanten am größten und (asymptotisch für große Schrittzahlen  $n \in \mathbb{N}$ ) für das Konvergenzverhalten charakteristisch: Seien  $\beta_{1,l}$  und  $\beta_{2,l}$  mit  $l \in \{1, \dots, N_l\}$  die Eigenwerte zu ergodischen Irrfahrten mit prinzipalen Eigenwerten  $\beta_{1,2}, \beta_{2,2}$  und es gelte  $\beta_{1,2} > \beta_{2,2}$ , dann

$$\frac{\sum_{i=2}^{N_l} \beta_{1,i}^n}{\sum_{i=2}^{N_l} \beta_{2,i}^n} = \left( \frac{\beta_{1,2}}{\beta_{2,2}} \right)^n \frac{1 + \sum_{i=3}^{N_l} (\beta_{1,i}/\beta_{1,2})^n}{1 + \sum_{i=3}^{N_l} (\beta_{2,i}/\beta_{2,2})^n} > C \left( \frac{\beta_{1,2}}{\beta_{2,2}} \right)^n, \quad (162)$$

so, dass asymptotisch die in (161) auftretenden Summen allein durch den prinzipalen Eigenwert charakterisiert werden.

Es seien  $1 = \hat{\beta}_{l,1} > \hat{\beta}_{l,2} \dots \geq \hat{\beta}_{l,N_l}$  die Eigenwerte dieser (linearen) Kette mit bekanntem Spektrum

$$\hat{\beta}_{l,i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi \frac{i}{N_l}). \quad (163)$$

Dann gilt für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  (wobei  $\beta_{l,1} = 1 = \hat{\beta}_{l,1}$ ):

$$\sum_{i=2}^{N_l} \beta_{l,i}^n \leq \sum_{i=2}^{N_l} \hat{\beta}_{l,i}^n. \quad (164)$$

und mit Abschätzungen der Form (106) bis (114) (hier für den eindimensionalen Fall, siehe auch [43])

$$\sum_{i=2}^{N_l} \beta_{l,i}^n \leq \sqrt{1 + \frac{N_l}{n}} e^{-\frac{n}{N_l}}. \quad (165)$$

Demnach folgt aus (161) für  $n > n_0$  für  $n_0 \in \mathbb{N}$  geeignet

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{\substack{i \in Q_l \\ \beta_{l,i} < 1}} \beta_{l,i}^n \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \in V_N: \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{Q}_k^{(N)} < \infty}} \frac{1}{\tilde{N}_k} \sqrt{1 + \frac{\tilde{N}_k}{n}} e^{-\frac{n}{\tilde{N}_k}} \quad (166)$$

$$\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{N}_k}} e^{-\frac{n}{\tilde{N}_k}}. \quad (167)$$

Die Funktion  $\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n}{x}}$  hat ihr Maximum bei  $x = 2n$ :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^M \sum_{\substack{i \in Q_l \\ \beta_{l,i} < 1}} \beta_{l,i}^n \leq \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (168)$$

Also

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N}{N} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Sp}[A^n P^\perp] \quad (169)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \frac{1}{\sqrt{e}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (170)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]. \quad (171)$$

Wegen Satz 2.1.1 ist das auch der obere Häufungspunkt von  $a_n = \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^{2n}]$ :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n]. \quad (172)$$

Damit ist oberer und unterer Häufungspunkt gleich und der Limes von  $M_N(\omega)/N$  existiert nach dem Ergodensatz  $\mu$ -fast sicher und ist von der Realisierung  $\mu$ -fast sicher unabhängig.  $\square$

Bemerkung: Man beachte, dass man den Limes für  $n$  i.A. nicht mit dem für  $N$  vertauschen darf, da der Satz 3.1 nur für endliches  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Für die hier gewählte Markovkette ist

die Vertauschung möglich, da die Limites in  $n$  zu konstanten Funktionen, der Dichte der invarianten Verteilung führen, da  $A$  symmetrisch ist. Der Einfluß des Randes ('finite size effects') des endlichen  $V_N$  ist dann nur von der Ordnung der Größe des Randes von  $V_N$ . Auf diese Situation läßt sich Satz 3.2 anwenden, so dass das Resultat 2.3 - nur im speziellen Fall der hier gewählten Irrfahrt - auch daraus folgt. Der Beweis läßt sich so aber auf andere aperiodische Markovketten übertragen, bei denen die minimal invariante Verteilungen keine konstanten Dichten haben und damit nicht nur Funktionen der Größe  $\bar{N}_k$  des Vertex  $k \in \mathbb{Z}^2$  sind.



## 4 Diskussion

Es werden zwei verschiedene spezielle Situationen betrachtet: Bernoulli-Perkolation als einfachster stationärer (weil identisch unabhängig verteilter) Prozess und ein spezieller Typ korrelierter Felder. Es stellt sich allgemein die Frage nach dem Einfluss der Korrelationen zwischen den Koordinatenfunktionen des Feldes  $g$  auf die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

### 4.1 Implikationen des Resultats

Zunächst sei festgehalten, dass die Wahl der Markovkette (nach Definition(24)) unabhängig von der Wahl der Art und Weise vollzogen wurde, wie die Felder die Geometrie des Graphen bestimmen. Mit anderen Worten, der Graph  $G_\infty(\omega)$  wird von einer Funktion  $g(\omega, \cdot)$  induziert - unabhängig davon, welche Markovkette der dadurch erzeugte Graph endlich repräsentiert. Hier sollen nun verschiedene induzierende Felder betrachtet werden, während an der Verwendung der symmetrischen Irrfahrt als durch den Graph repräsentierte Markovkette festgehalten wird.

Aus der trivialen Abschätzung (125) folgt

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} M_N(\omega)/N \geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{1 + \frac{2n}{\bar{N}_0^2} + \frac{1}{2} \frac{4n^2}{\bar{N}_0^2} + \dots} \right] \quad (173)$$

$$\geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \frac{1}{2n} \mathbb{E}[\bar{N}_0^2]. \quad (174)$$

Dies folgt aus einer analogen Argumentation zum Beweis von Resultat 2.2. Resultat 2.2 stellt an sich aber eine Verbesserung dar, weil gewöhnlich  $\mathbb{E}[\bar{N}_0^2] = O(\mathbb{E}[\bar{K}_0^4])$ . Somit kann die Situation auftreten, in der der erste Moment der Größe der Berandung existiert und  $\mathbb{E}[\bar{N}_0^2]$  oder sogar  $\mathbb{E}[\bar{N}_0]$  nicht und Resultat 2.2 ist dadurch immer noch anwendbar.

Die Resultate 2.1.2 und 2.1.3 sind von praktischer Bedeutung, wenn es sich um Felder handelt, welche Graphen mit Partitionen mit geringem 'Randanteil' induzieren. Resultat 2.2 kann angewendet werden, wenn  $\mathbb{E}[\bar{K}_0]$  bekannt und nicht zu groß ist.

Es erhebt sich die Frage, wann die hier benutzten Schranken gegenüber einer Abschätzung der Anzahl der Zusammenhangskomponenten über deren mittlere Kardinalität wesentlich besser ausfallen. Es gilt nach der Jensenschen Ungleichung

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{\bar{N}_0} \right] \geq \frac{1}{\mathbb{E}[\bar{N}_0]}, \quad (175)$$

so, dass bei bekannter Information über die Verteilung von  $\bar{N}_0$  Aussagen über die Anzahl der Zusammenhangskomponenten pro Einheitsvolumen nach Satz 3.2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} \frac{1}{N_k} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N_0}\right] \quad (176)$$

getroffen werden können. Diese Relation ist jedoch nicht scharf (nur im trivialen Fall der gleichen Kardinalitäten  $N_l$ ) und nimmt qualitativ mit wachsender Varianz der zufälligen Kardinalität von  $Q_0$  ab.

## 4.2 Perkolation

Eine der in das Resultat eingehenden Größen ist die erwartete  $n$ -Schritt-Rückkehrwahrscheinlichkeit. Es bietet sich an, hierfür Monte-Carlo Rechnungen durchzuführen. Für verschiedene charakteristische Größen wurden in der Literatur Monte-Carlo Rechnungen im Fall der Perkolation durchgeführt [15][35][39].

In Hammersley und Handscomb [21, Kapitel 11.2, S.136] wird sogar dies als einzige Lösung der Situation dargestellt, in der man sich befindet, denn das Übermass an vorhandenen Elementarereignissen verbiete auch im endlichen Wahrscheinlichkeitsraum die direkte Berechnung zeitlich auf Grund des zeitlich nicht zu bewältigenden Rechenaufwands. ('Direct calculation is out of the question.')

Hughes [24] verweist unter Bezug auf diese Stelle auf die inzwischen fortgeschrittene Perspektive angesichts der vorhandenen Rechenkapazitäten (siehe auch [37]. Es soll hier gezeigt werden, dass eine direkte Berechnung eines Erwartungswertes des Perkulationsprozesses in zwei Dimensionen in dem zeitlich vertretbaren Rahmen - d.h. mit hinreichend kleinem Gitter (3x3), eine Verbesserung der analytischen, d.h. nicht-numerischen Situation gegeben ist.

Im Fall von Perkolation ist Stationarität und Ergodizität bezüglich aller Subshifts wegen der Unabhängigkeit der Ereignisse  $\{\omega \in \Omega : e \in E_\infty(\omega)\}$  gegeben. Das Feld  $g$ , hat hier (entsprechend der 2-dimensionalen Kantenperkolation) unabhängige Koordinatenfunktionen.

Grimmet [17] gibt Schranken für die 'Anzahl der offenen Cluster pro Vertex' an und beweist die Existenz des Limes der Anzahl von Zusammenhangskomponenten pro Vertex (sog. Anzahl der 'Offenen Cluster pro Vertex'). Die Resultate der dort betrachteten sog. 'Site-percolation' in zwei Dimensionen (auf  $\mathbb{Z}^2$ ) kann einfach auf den (2-d-) Kantenperkulationsprozess ('bond-percolation') übertragen werden. Die Resultate, die sich dabei ergeben, involvieren den Erwartungswert der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von *endlichen* perkolutiven Graphen und lauten, transkribiert auf die hier verwendete Notation und Kantenperkolation<sup>5</sup>,

---

<sup>5</sup>Im Falle von 'Site-Perkolation' steht  $\mathbb{E}[M_N]/N - \frac{2p^2}{\sqrt{N}}$  für die untere Schranke.

$$\frac{\mathbb{E}[M_N]}{N} - \frac{2p}{\sqrt{N}} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} \leq \frac{\mathbb{E}[M_N]}{N}. \quad (177)$$

Dabei ist  $p \in [0, 1]$  der Perkolationsparameter, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Kante Teil der Kantenmenge des perkolativen Graphen ist. Der Beweis nach Grimmet benutzt Subadditivitätsargumente und den individuellen Ergodensatz (siehe auch [18],[16]).

Der Vorteil dieses Resultats liegt darin, dass für endliche Gitter, auf kombinatorischem Wege beschränkende Funktionen, genauer Polynome in  $p$  mit beliebig hoher Ordnung als untere und obere Schranke ausgerechnet werden können. Der Nachteil besteht darin, dass die Berechnung dieser Schranken für Ordnungen der Polynome (= Größen der verwendeten endlichen Gitter) einen hohen elementaren arithmetischen Aufwand involvieren, d.h. so ohne weiteres nicht 'von Hand' zu berechnen ist. Schon für ein drei mal drei Gitter -  $N = 9$  ist dies nicht einfach. Im Falle des zwei mal zwei Gitters lautet der Erwartungswert

$$\mathbb{E}[M_N] = 4(1 - p)^4 + 12p(1 - p)^3 + 4p^2(1 - p)^2 + 4p^3(1 - p) + p^4. \quad (178)$$

Die Resultate 2.1.1 und 2.1.2 können nun in der Weise verwendet werden, wie es die Formel (1) suggeriert: Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten auf dem drei mal drei Gitter wird durch die Iteration der Markovkette für jede einzelne Realisierung des Graphen bestimmt:

$$M_N(\omega) = \lim_n \text{Sp}[A^n]. \quad (179)$$

Die Abschätzungen 2.1.1 und 2.1.2 liefern dabei obere und untere Schranke die jeweils anstelle von  $\mathbb{E}[M_N]$  verwendet werden muss. Für den kleinsten Eigenwert ungleich Null des Laplace-Operators kann hier einfach  $1/N^2 = 1/81$  verwendet werden (Lemma 3.13). Abbildung 3 zeigt das Resultat für  $N = 3 \times 3$ , das dort mit der analytischen Lösung verglichen wird, welche (178) benutzt. Vor allem die obere Schranke wird durch Betrachtung des größeren Gitters verbessert. Eine Verbesserung der unteren Schranke zeigt sich nur in der Nähe und unterhalb des kritischen Parameterbereichs ( $p_c = 1/2$ ). Zusätzlich ist die triviale untere Schranke der sog. 'Lattice-Animal-Expansion' eingetragen.

Resultat 2.2 liefert mit  $\bar{K}_0 \leq 4\bar{N}_0$  die Abschätzung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(\omega)}{N} \geq \mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] - \frac{2}{n}\chi(p), \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (180)$$

mit  $\chi(p)$ , der erwarteten Größe der 'offenen Cluster'. Letztere divergiert, wenn  $p \rightarrow p_c^-$ . Die bei Monte Carlo Rechnungen bekannten Schwierigkeiten, dass zu gegebenem endlichen Gitter mit gewissen Häufigkeiten, das ganze Gitter überspannende Konfigurationen

entstehen und berücksichtigt werden müssen (siehe [24], Kapitel 7) lassen sich also an den hier gefundenen Resultaten an einer entsprechend langsamen Konvergenzrate der Irrfahrt wiederfinden.

### 4.3 Einfluss der Korrelation

Im Folgenden wird die untere Schranke in Abhängigkeit der Korrelationen des Feldes untersucht. Es sei dabei speziell die Situation betrachtet, in dem wenige Zusammenhangskomponenten auftreten, d.h. wo  $M < N \ll 1$ .

Zu  $\delta > 0$  sei  $N' := |\{\beta \in \mathcal{S}(A) : \beta > 1 - \delta\}|$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^n = \frac{N'}{N} \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^N \beta_j^n \quad (181)$$

$$= \frac{N'}{N} \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^N \exp(-n \log(1 - (1 - \beta_j))). \quad (182)$$

Es gilt dann wegen der Voraussetzung

$$\sum_{j=1}^{N'} (1 - \beta_j) \leq c\delta \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (1 - \beta_j), \quad (183)$$

für ein geeignetes  $c > 0$  von der Ordnung 1 (wenn  $N \rightarrow \infty$ ).

Mit dem Satz von Taylor ist

$$\log(1 - (1 - \beta_j)) = (1 - \beta_j) + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{(1 - \theta)^2} \quad (184)$$

für ein geeignetes  $\theta \in [0, 1 - \beta_j] \subset [0, \delta]$ , also für  $(1 - \delta)^2 > \frac{1}{2}$

$$\log(1 - (1 - \beta_j)) \geq (1 - \beta_j) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{(1 - \delta)^2} \geq (1 - \beta_j) + \delta^2. \quad (185)$$

Damit

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^n \geq \frac{N'}{N} \sum_{j=1}^{N'} \exp(-n(1 - \beta_j) - n\delta^2), \quad (186)$$

also nach der Jensenschen Ungleichung und wegen (183)

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^n \geq \frac{N'}{N} e^{-n\delta^2} \exp\left(-n \left(\frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} (1 - \beta_j)\right)\right) \quad (187)$$

$$\geq \frac{N'}{N} e^{-n\delta^2} \exp\left(-n \left(\frac{c\delta}{N} \sum_{j=1}^N (1 - \beta_j)\right)\right) \quad (188)$$

$$\geq \frac{N'}{N} e^{-n\delta^2} \exp\left(-nc\delta \left(1 - \frac{1}{N} \text{Sp}[A]\right)\right). \quad (189)$$

$$(190)$$

Alternativ, um Korrelationen zu berücksichtigen

$$\frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^n = \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} (A^{2\frac{n}{2}})_{kk} \quad (191)$$

$$\geq \frac{N'}{N} e^{-\frac{n}{2}\delta^2} \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (1 - \beta_j^2)\right)\right) \quad (192)$$

$$= \frac{N'}{N} e^{-\frac{n}{2}\delta^2} \exp\left(-\frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^2\right)\right). \quad (193)$$

$$(194)$$

Nach Definition von  $A$  gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk} = \mu[e \notin E], \quad (195)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \mu[e \notin E, f \notin E], \quad (196)$$

wobei  $e, f \in E_\infty^{n,N}$  zwei unterschiedliche Kanten mit einem gemeinsamen Vertex sind.

Mit (64) läßt sich  $N'$  in Abhängigkeit von  $N$  und  $\delta \ll 1$  abschätzen: Es gilt zu  $N'_0 := |\{\beta \in \mathcal{S}(A_0) : \beta > 1 - \delta\}|$ , dass  $N' > N'_0$ , da  $\beta_j \geq \beta_{0,j}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi k_1}{\sqrt{N}}\right) + \cos\left(\frac{\pi k_2}{\sqrt{N}}\right) \right) > 1 - \delta &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 k_1^2}{N} + 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 k_2^2}{N} \right) + |O\left(\frac{1}{N^2}\right)| > 1 - \delta \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{\pi^2}{2N} (k_1^2 + k_2^2) < 1 - \delta \end{aligned} \quad (197)$$

$$\Leftrightarrow (k_1^2 + k_2^2) 2\delta N / \pi^2 \quad (198)$$

so, dass

$$N' > N'_0 = \sum_{k_1, k_2} \chi_{\{k_1^2 + k_2^2 < \frac{2\delta N}{\pi^2}\}} \quad (199)$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2\delta N}/\pi} r dr = \delta N / (4\pi). \quad (200)$$

Demnach ist mit Satz 3.1

$$\mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k \in V_N} A_{kk}^n \geq \frac{\delta}{4\pi} \exp(-n\delta^2 - nc\delta\mu[|g(\cdot, 0)| < \sigma]) \quad (201)$$

bzw.

$$\mathbb{E}[\bar{A}_{00}^n] \geq \frac{\delta}{4\pi} \exp(-\frac{n}{2}\delta^2 - nc\delta\frac{3}{8}(1 - P[e, f \notin E_\infty])). \quad (202)$$

Insgesamt ergibt sich mit Resultat 2.2 ( $\kappa := \lim_{N \rightarrow \infty} M_N/N$ )

$$\kappa \geq \frac{\delta}{4\pi} \exp(-\frac{n}{2}\delta^2 - nc\delta(1 - P[e \notin E_\infty])) - \frac{\mathbb{E}[\bar{K}_0]}{2n} \quad (203)$$

und

$$\kappa \geq \frac{\delta}{4\pi} \exp(-\frac{n}{2}\delta^2 - nc\delta\frac{3}{8}(1 - P[e, f \notin E_\infty])) - \frac{\mathbb{E}[\bar{K}_0]}{2n} \quad (204)$$

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass  $\kappa = \lim_{N \rightarrow \infty} M_N/N$  positiv ist ergibt sich daraus, wenn  $d := 1/\sqrt{n}$ :

$$\mu[e \in E_\infty^{n.N.}] < \frac{1}{c\sqrt{e}\sqrt{n}} \log\left(\frac{\sqrt{n}}{2\pi\mathbb{E}[K_0]}\right) \quad (205)$$

und

$$1 - \mu[e, f \notin E_\infty^{n.N.}] < \frac{8}{3c\sqrt{e}\sqrt{n}} \log\left(\frac{\sqrt{n}}{2\pi\mathbb{E}[K_0]}\right). \quad (206)$$

Darüber hinaus gilt:

$$\mu[e, f \notin E_\infty] = \mu[e \notin E_\infty \mid f \notin E_\infty] \mu[f \notin E_\infty]. \quad (207)$$

Hierbei ist  $\mu[e \notin E_\infty \mid f \notin E_\infty]$  für angrenzende Kanten  $e, f$  die Wahrscheinlichkeit, dass lokal die Berandung einer Zusammenhangskomponente nicht abreißt. Auf diese Weise wird klar, wie zunehmende Korrelation,  $r := \mu[e \notin E_\infty \mid f \notin E_\infty] \in [0, 1]$  die untere Schranke verändert. Daraus ergibt sich, dass wenn die Forderung (206) nicht erfüllt ist, Forderung (207) unter 'Einschalten' der Korrelation ( $r$  wächst) erfüllt werden kann.

## 5 Abbildungen

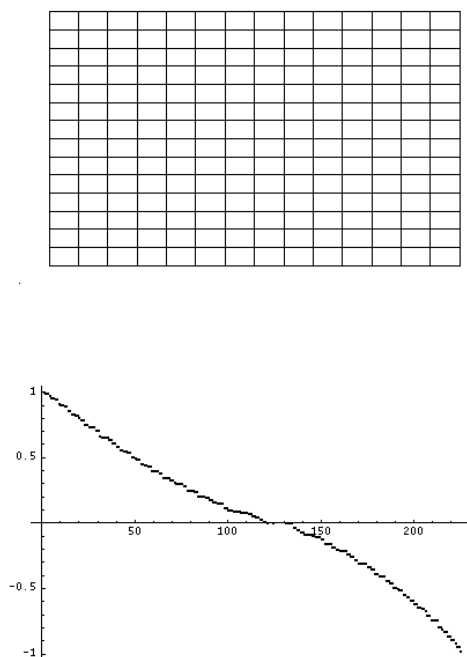


Abbildung 1: Homogene Irrfahrt auf einem 15x15 Gitter mit Spektrum

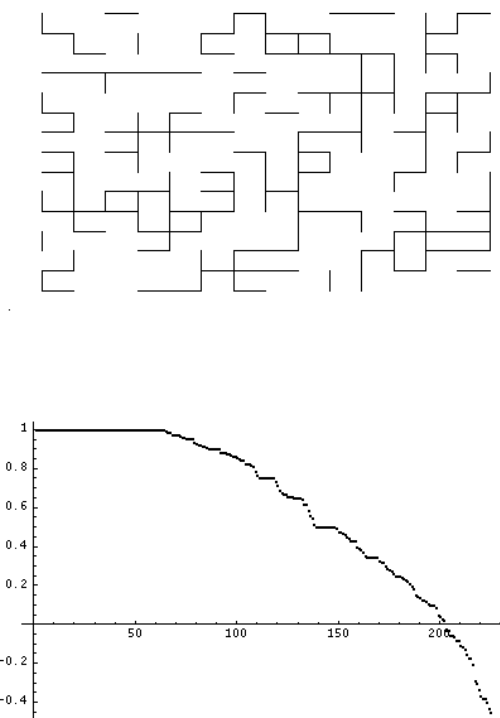


Abbildung 2: Inhomogene (gestörte) Irrfahrt auf einem 15x15 Gitter mit Spektrum



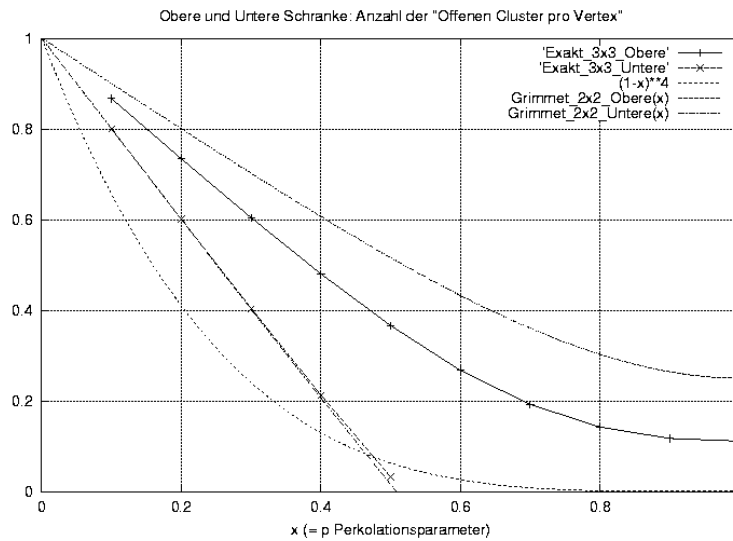


Abbildung 3: Perkolation: Exakte Berechnung des Erwartungswertes der  $n$ -Schritt Rückkehrwahrscheinlichkeit einer Irrfahrt auf einem zufälligen (Kanten-) perkolutiven Cluster auf einem  $3 \times 3$  Gitter ermöglicht unter Verwendung von Resultat 2.1.2 die Kontrolle (Abschätzung) des Erwartungswertes der Anzahl der Zusammenhangskomponenten des endlichen ( $3 \times 3$ ) perkolutiven Graphen. Mit den bekannten Resultaten von Grimmet [17], in die diese Erwartungswerte eingehen führt dies zu den eingezeichneten Schranken. Der Vorteil dieser Berechnungsmethode ist die Möglichkeit, die Grimmet'schen Relationen für höhere Ordnung zu verwenden, die einer direkten Ausarbeitung wegen des hohen elementaren kombinatorischen Aufwands unzugänglich bleibt. Größere Gitter (z.B.  $4 \times 4$ ) sind dabei schon außerhalb des zeitlich (auf Tage) begrenzten Rahmens bei gewöhnlichen Rechenkapazitäten.

## 6 Notation

Die Größe  $\tilde{N}_k$  ist die Kardinalität der Zusammenhangskomponente  $\tilde{Q}_l$ , welche den Vertex  $k$  enthält. Dagegen ist  $N_l$  die  $l$ -te der  $M_N$  Zusammenhangskomponenten  $Q_l$ , mit  $l \in \{1, \dots, M_N\}$ . (Zu jedem  $k \in \{1, \dots, N\}$  gibt es genau ein  $l \in \{1, \dots, M\}$ ).

Es gilt die nach Satz 3.8 gemachte Bemerkung (Fortlassen der Abhängigkeit von  $\omega$ ).

Bei den Limites  $N \rightarrow \infty$  sei grundsätzlich  $N = 4W^2$ , also  $\lim_{N \rightarrow \infty} \Leftrightarrow \lim_{\substack{W \rightarrow \infty, \\ N=4W^2}}$ .

### 6.1 Symbole

Allgemein:

Symbol:	Kurzform:	Bezeichnung:
$\bigwedge$		Allquantor
$\bigvee$		Existenzquantor
$\{a_j\}_{j=1}^N$	$\{a_j\}_j$	Menge von $N$ Elementen: $a_1, a_2, \dots, a_N$ .
Sp		Spur
$\dim(V)$		Dimension des linearen Raumes $V$
$\{e_k\}_k$		Menge der kanonische Basisvektoren
$a \vee b$	$\min\{a, b\}$	Das Minimum von $\{a, b\}$ , wobei $a, b \in \mathbb{R}$
$a \wedge b$	$\max\{a, b\}$	Das Maximum von $\{a, b\}$ , wobei $a, b \in \mathbb{R}$
$\mathcal{S}(A)$		Das Spektrum (Eigenwerte) von $A$
$[r]$		Gröste ganze Zahl kleiner als $r \in \mathbb{R}$
$\chi_A(x)$		Indikatorfunktion (=1, wenn $x \in A$ , sonst =0)

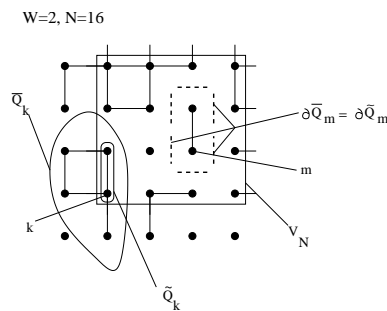


Abbildung 4: Skizze zur Erläuterung der Symbolik

**Speziell:**

Symbol:	Kurzform:	Bezeichnung:
$\sigma$		Schwellenwert
$G_N(g, \sigma)$	$G_N(\cdot)$	Zufälliger endlicher Graph (Graphenwertiger Prozess)
$V_N$		Vertizes (= $\{-W + 1, \dots, W\} \times \{-W + 1, \dots, W\}$ )
$W$		Breite des Quadrats $V_N$ : $N = 4W^2$
$E_N(g, \sigma)$	$E_N(\cdot)$	Zufällige Kantenmenge von $G_N(\cdot)$
$E_N^{n,N}$		Nächste Nachbarn von $V_N$
$M_N(g, \sigma)$	$M_N(\omega)$ od. $M$	Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G_N$
$M^{(0)}(g)$	$M^{(0)}$	Anzahl isolierter Vertizes
$A_{kl}^n(g, \sigma)$	$A_{kl}^n$ od. $A_{kl}^n(\cdot)$	Prozess der n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit von $k$ nach $l$
$A_{kl}^n(g(\omega), \sigma)$	$A_{kl}^n(\omega)$	n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit von $k$ nach $l$ (hier $k, l \in V_N$ )
$A(\omega)$		Übergangsmatrix der Irrfahrt auf $(V_N, \mathbb{E}_N(\omega))$
$A_0$		Übergangsmatrix der Irrfahrt auf $(V_N, E_N^{n,N})$
$K_N(\omega, g)$	$K_N$	Anzahl der entfernten Kanten in $G_N(\omega)$
$\beta_{0,j}$		$j$ -ter Eigenwert von $A_0$
$\beta_j(g(\omega), \sigma)$	$\beta_j$ od. $\beta_j(\omega)$	$j$ -ter Eigenwert von $A(\omega)$
$\beta_{l,i}(g(\omega), \sigma)$	$\beta_{l,i}$ od. $\beta_{l,i}(\cdot)$	$i$ -ter Eigenwert von $P_{N_l} A(\omega) P_{N_l}$
$L_{kl}^{(n)}(g, \sigma)$	$L_{kl}^{(n)}$ od. $L_{kl}^{(n)}(\cdot)$	zufälliges $k - l$ Matrixelement (zuf. Prozess) des Erzeugers der Markovkette mit Übergangsmatrix $A^n$
$\lambda_j^{(n)}(g, \sigma)$	$\lambda_j^{(n)}$	$j$ -ter Eigenwert von $L^{(n)} = \mathbb{I} - A^n$
$\lambda_j^{(n,\rho)}(g, \sigma)$	$\lambda_j^{(n,\rho)}$	$j$ -ter Eigenwert von $L^{(n)} = \mathbb{I} - \rho A^n$
$G_\infty(g, \sigma)$	$G_\infty(\cdot)$	Zufälliger unendlicher Graph (Graphenwertiger Prozess)
$E_\infty(g, \sigma)$	$E_\infty(\cdot)$	Zufällige Kantenmenge von $G_N(\cdot)$
$\bar{A}(g(\omega), \sigma)$	$\bar{A}(\omega)$	(Dichte des) Übergangskerns einer Irrfahrt auf einer Realisierung $G_\infty(\omega) = (\mathbb{Z}^2, E_\infty(\omega))$
$Q_l(\omega)$		$l$ -te Zusammenhangskomponente von $G_\infty(\omega)$ , wobei $l \in \{1, \dots, M\}$
$\bar{Q}_k(\omega)$		Zusammenhangskomponente von $G_\infty(\omega)$ , welche den Vertex $k \in \mathbb{Z}^2$ enthält
$\tilde{Q}_k(\omega)$		Zusammenhangskomponente von $G_N(\omega)$ , welche den Vertex $k \in V_N$ enthält
$\bar{K}_k(\omega)$		Anzahl der Kanten in $E_\infty^{n,N}$ , die nicht zu $E_\infty(\omega)$ gehören, aber mindestens einen Vertex in $\bar{Q}_k$ haben.
$\tilde{K}_k(\omega)$		Anzahl der Kanten in $E_N^{n,N}$ , die nicht zu $E_N(\omega)$ gehören, aber mindestens einen Vertex in $\tilde{Q}_k$ haben.

## 7 Bibliographie

1. N.Alon, V.D.Milman: 'Isoperimetric Inequalities for graphs and superconcentrators', J.Comb.Theory Ser.B 38, S.73, 1985
2. R.J. Adler: 'The geometry of Random fields', 1.7, S. 19, Wiley, 1981
3. J. Cheeger: 'A lower bound for smallest eigenvalue of the laplacian', ('Problems in Analysis'), Ed.: R.C. Gunning, Princeton University Press 1970, S. 195-199
4. F.R.K. Chung: 'Spectral Graph theory', CBMS, Amer. Soc. Math. Sciences, No. 92, 1997
5. J.T.Cox, G.R.Grimmett: 'Central Limits theorems for associated random variables and the percolation model', The annals of probability 12, No.2, 1984, 514
6. H.Cramer, M.R.Leadbetter: 'Stationary and Related Stochastic Processes', Wiley, 1967
7. P.Diaconis, J.A. Fill: 'Strong stationary times via a new form of duality', Ann.Probab. 18, S.1483, 1990
8. P.Diaconis, D. Stroock: 'Geometric Bounds for eigenvalues of Markov Chains', The Annals of Probability, '91,1, 1, 36-61
9. W.E.Donath, A.J.Hoffman: 'Lower Bounds for the Partitioning of Graphs', IBM Res. Develop., 9. 1973
10. W.Feller, 'An introduction to probability theory and its applications', Vol. I, 3ed edition, Wiley, New York, 1986
11. M.Fiedler: 'Algebraic connectivity of graphs', Czechoslovak Math. J. 1973 23, S. 298, 1973
12. J.A.Fill: 'Eigenvalue bounds on convergence to stationarity for nonreversible Markov Chains', Ann.Apl.Probab. 1, S.64, 1991
13. Shaul Foguel: 'The Ergodic Theory of Markov Processes', van Nostrand, 1969
14. D.Geman, S.Geman: 'Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images', IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6, p.721
15. P.G. de Gennes: 'La percolation: un concept unificateur', La recherche 7, 919-927
16. G.R.Grimmett: 'Percolation', 2nd edition, Springer 1999
17. G.R.Grimmett: 'On the number of clusters in the percolation model', J.London Math.Soc. (2), 13 (1976), 346-350

18. G.R.Grimmet: 'On the Differentiability of the Number of Clusters per Vertex in the Percolation model', J.Lond. Math. Soc.(2), 1981, S.372-384
19. G.R.Grimmet: 'Random walks in random labyrints', markov Processes and Related Fields 2, 1996, 69-86
20. X.Guyon:'Random Fields on a Network, Modeling, Statistics and Applications', Springer: Prob. and its Appl., 1995
21. J.M. Hammersley, D.C. Handscomb: 'Monte Carlo Methods', London: Methuen, New York: John Wiley, 1964
22. T.Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff, L. Streit: 'White Noise, an infinite dimensional Calculus', Kluwer, 253, 1993
23. S.L.Horowitz, T.Pavlidis: 'Picture Segmentation by a directed Split and Merge-Procedure', Proc. Second Int. Joint Conf. on Pattern Recog., S. 424, 1974
24. B.Hughes: 'Random Walks and Random Envorinments I', Kapitel 3, Oxford University Press,
25. M.Jerrum,A.Sinclair:'Approximating the permanent',SIAM J. of Comput. 18, S.1194, 1989
26. H. Kesten: 'Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster', Annales de L'Hinstut H. Poincare 22, 425-487
27. J.F.C Kingman: 'Subadditive ergodic theory', Ann.Prob., S.883,1976
28. I.Krasovsky, V.I. Peresada: 'Principles of finite-dimensional Pertubation theory', Low.Temp. Phys. 23(1), 1/1997
29. U.Krengel: 'Ergodic theorems', de Gruyter, Prop. 4.3, S.26
30. P.Lancaster: 'Theory of matrices', Academic Press, New York, Kap. 8.4, Theorem 1, 1969
31. G.F.Lawler, A.D.Sokal:'Bounds on the  $L^2$ -spectrum for Markov Chains and markov Processes:A generalization of Cheeger's inequality', Trans. Americ.Math.Soc. 309, S.507, 1988
32. E. Lindenstrauss: 'Pointwise theorems for amenable groups', AMS Research Announcements, Vol. 5, S. 82, 6/1999
33. G. Keller: 'Equilibrium States in ergodic theory', London Math. Soc., Student Texts 42, Cambridge Univ. Press, 1998
34. L. Miclo: 'Relations entre isoperimetrie et trou spectral pour les chaines de Markov finies', Probab. Theory Rel. Fields 114,S.431,1999

35. C.D. Mitescu, J. Roussenq: 'Une fourmi dans un labyrinthe: diffusion dans un système de percolation', Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) A283, S. 999, 1976
36. J.-M. Morel, S. Solimini: 'Variational methods in image segmentation', Birkhäuser, 1995
37. H. Nakanishi, H.J.Hermann: 'Comment: Exact Enumeration Study of self-avoiding walks on two-dimensional percolation clusters', Journal of Physics A 24, S.1355, 1991
38. D. Ornstein, B. Weiss: 'The Shannon-MacMillan-Breiman theorem for a class of amenable groups', Israel Journal of Mathematics, 44, Nr. 1, S. 53, 1983
39. Sahimi, Jerauld: 'Random walks on percolation clusters at the percolation threshold', Journal of Physics C 16, S. L1043, 1983
40. Pólya: 'Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie betreffend die Irrfahrt im Straßennetz', Mathematische Annalen, 83, S.149
41. P. Shields: 'The ergodic theory of Discrete Sample Paths', Section I.8, S. 79
42. M.Reed, B.Simon, 'Methods of Modern Mathematical Physics II', Academic Press, 1975
43. Laurent Saloff-Coste: 'Lectures on finite Markov Chains', LNM 1665
44. F.Spitzer: 'Principles of Random Walk', Springer, 1976
45. J. Weickert: 'Anisotropic Diffusion in Image Processing', ECMI, Teubner (Stuttgart), 1998
46. W. Woess: 'Random Walks on Infinite Graphs and Groups', Cambridge Tracts in Mathematics 138, Cambridge University Press, 2000

**Danksagung:**

Herrn Prof. Hering danke ich besonders für sein Vertrauen, mir dieses Dissertationsthema zu überlassen und für die angenehme Gesprächssituation, die es mir erlaubt hat, die Arbeit unter stetigem Lernen fortzusetzen.

Ich danke Rainer Wüst, Rainer Siegmund-Schultze und Igor Krasovski für die vielen hilfreichen Gespräche.

## Lebenslauf:

- 23.4.1972 geboren in Aachen, NRW, als österreichischer Staatsbürger
- 1973-1991 aufgewachsen in Göttingen,  
zweimalig einjährige Aufenthalte in den USA (AZ, CO)
- 1991 Abitur in Göttingen (Theodor Heuß Gymnasium)
- 1993 Vordiplom, Physik (Universität Tübingen)
- 1993-1994 Studienaustausch, San Diego, (SDSC)
- 1994-1995 Grundwehrdienst als Sanitäter, Tirol
- 1995-1998 Hauptstudium, Physik, (Universität Göttingen),
- 1998 Diplom, ('Zur Quantenmechanik der Wasserstoffdiffusion in Metallen',  
Institut für Materialphysik, Gruppe Festkörpertheorie, Prof. Teichler)
- 1998-1999 Entwicklung, Wavelet-basierte Datenkompression (Fa. 'Algovision')
- 19.11.1999 Geburt von Tochter Olivia
- 1999-2004 Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Institut für Mathematik, TU Berlin  
(Forschungsgruppe Mathematische Physik),  
gleichzeitig Doktorand (Institut für mathematische Stochastik,  
Universität Göttingen, Prof. Hering)
- 15.8.2000 Ehe mit Elisabeth, geb. Müller-Loeffelholz
- 1.12.2003 Geburt von Sohn Julius
- 4.2004 Promotion, ('Zur Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Urbildern  
stationärer, ergodischer Felder')