

Induktionstheorie kompakter Lie-Gruppen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Jan-Philipp Hoffmann
aus Göttingen

Göttingen, den 1. März 2005

D7

Referent: Prof. Dr. Tammo tom Dieck

Koreferent: Prof. Dr. Thomas Schick

Tag der mündlichen Prüfung:

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	5
Kapitel 1. Einleitung	7
1.1. Ursprünge der Induktionstheorie	7
1.2. Formalisierungen	8
Kapitel 2. Induktionskategorien	21
2.1. Erweiterte Induktionskategorie	21
2.2. Greenfunktoren	25
2.3. Erweiterung von Mackeyfunktoren und Greenfunktoren	28
2.4. Basis-Greenfunktoren	31
Kapitel 3. Induktionstheorie und Basis-Greenfunktoren	37
3.1. Induktionstheorie	37
3.2. Idempotente und Basis-Greenfunktoren	43
Kapitel 4. Explizite Induktionssätze	45
4.1. Der Burnside-Ring	45
4.2. Induktionssätze	48
4.3. Hyperelementare Induktion	54
Kapitel 5. Homologische Algebra von Mackeyfunktoren	65
5.1. Grundbegriffe	65
5.2. Amitsur-Kohomologie	69
5.3. Paarungen der Amitsur-Kohomologie	72
5.4. Annulations-Theorem	76
Anhang	79
6.1. Grundbegriffe der äquivarianten Topologie	79
6.2. Additive Invarianten	89
Literaturverzeichnis	99

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Professor tom Dieck für die Betreuung bei dieser Arbeit und in meinem gesamten Studium Professor tom Dieck zu besonderem Dank verpflichtet. Mein Dank gilt auch meiner Familie und meinen Freunden, die mich in all den Jahren unterstützt und begleitet haben.

Finanziert und logistisch unterstützt wurde meine Promotion durch Stipendien des DFG-Graduiertenkollegs 'Gruppen und Geometrie' am mathematische Institut Göttingen und der Marie-Curie-Training-Site am Centre Recerca de Matematica in Bellaterra/Barcelona, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Insbesondere ist das mathematische Institut der Universität Göttingen und dessen Mitglieder angenehme Heimat meiner wissenschaftlichen Arbeit gewesen.

KAPITEL 1

Einleitung

Das Ziel der Induktionstheorie ist es, einen Rahmen zu schaffen, in dem Restriktions- und Induktionsprozesse der Darstellungstheorie und äquivarianten Topologie beschrieben und untersucht werden können. Sei G im Folgenden eine kompakte Lie-Gruppe und alle betrachteten Untergruppen $H \leq G$ abgeschlossen.

1.1. Ursprünge der Induktionstheorie

1.1.1. Motivation. Die Restriktion sei zunächst die Zuordnung, die aus einem G -Objekt durch Vergessen ein H -Objekt macht,

$$\text{res}_H^G : G\text{-Obj} \longrightarrow H\text{-Obj}.$$

Die Induktion ist eine dazu adjungierte Zuordnung

$$\text{ind}_H^G : H\text{-Obj} \longrightarrow G\text{-Obj}.$$

Ein initiales Beispiel ist die endlich-dimensionale komplexe Darstellungstheorie einer endlichen Gruppe G und die ihrer Untergruppen. Ist V eine H -Darstellung, so erhält man mit

$$\text{ind}_H^G(V) = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$$

die von V induzierte G -Darstellung. Umgekehrt ist jede G -Darstellung trivialerweise auch eine H -Darstellung. Die Adjungiertheit dieser Prozesse spiegelt sich in der Frobenius-Reziprozität wider. In der Doppelnebenklassen-Formel

$$\text{res}_K^G \text{ind}_H^G(V) = \sum_{s \in K \backslash G / H} \text{ind}_{s^{-1}Ks \cap H}^H c_s \text{res}_{K \cap sHs^{-1}}^K(V)$$

stehen beide Zuordnungen in einer weiteren Beziehung. Dabei überführt c_s vermöge Konjugation mit s eine $K \cap sHs^{-1}$ -Darstellung in eine $s^{-1}Ks \cap H$ -Darstellung.

Beide Prozesse induzieren Homomorphismen zwischen den Darstellungsringen

$$\text{res}_H^G : R(G) \rightarrow R(H) \quad \text{ind}_H^G : R(H) \rightarrow R(G).$$

Gleichermaßen gibt es diese Abbildungen auch für die kanonisch isomorphe G -äquivariante topologische K -Theorie $K_G(G/H) \cong R(H)$.

Hier wird für $H \subset K$ der Induktionshomomorphismus ind_ϕ zur G -Abbildung $\phi : G/H \rightarrow G/K$, $gH \mapsto gK$ auf repräsentierenden Vektorraumbündeln durch

$$\text{ind}_\phi : (f : E \rightarrow G/K) \longmapsto (i(f) : E' \rightarrow G/H)$$

induziert. Darin ist dann $i(f) : E' \rightarrow G/H$ das Vektorraumbündel mit Faser

$$i(f)^{-1}(gH) = \bigoplus_{g'K \in H/K} f^{-1}(gg'H).$$

Für K_G ist der Restriktionshomomorphismus nicht mehr durch Vergessen von Struktur induziert, vielmehr geschieht dies durch die Konstruktion des induzierten Vektorraumbündels. Um aus einem Vektorraumbündel über G/H eines über G/K zu erhalten, betrachten wir das Pullback

$$\begin{array}{ccc} \phi^*(E) & \longrightarrow & E \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ G/K & \xrightarrow{\phi} & G/H. \end{array}$$

Dann repräsentiert das Vektorraumbündel $\phi^*(E) \xrightarrow{F} G/K$ das Bild der Restriktion von $E \xrightarrow{f} G/H$, was sich zu einem Homomorphismus $\text{res}_\phi : K_G(G/H) \rightarrow K_G(G/K)$ fortsetzt. Zu einem kommutativen Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G/K \times G/H & \xrightarrow{\Psi} & G/H \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ G/K & \xrightarrow{\psi} & G/G \end{array}$$

und einer Orbiterlegung $\bigsqcup G/L \cong G/K \times G/H$ erhält man für die induzierten Restriktions- und Induktionshomomorphismen die Gleichung

$$\text{res}_\psi \text{ind}_\phi(f) \cong \sum_{G/L \in (G/K \times G/H)/G} \text{ind}_{\Phi|_{G/L}} \text{res}_{\Psi|_{G/L}}(f).$$

Wegen der Isomorphie

$$(G/K \times G/H)/G \cong K \backslash G/H$$

ist dies die Doppelnebenklassen-Formel der äquivarianten K-Theorie.

1.2. Formalisierungen

1.2.1. Erste Induktionskategorien. Diese Beobachtungen führen zur ersten Induktionskategorie \mathcal{J} , deren Objekte die homogenen Räume G/H sind. Diese hat als Morphismengruppen $\text{Mor}_{\mathcal{J}}(G/H, G/K)$ die freie abelsche Gruppe über einer Basis aus Äquivalenzklassen von Diagrammen $G/H \leftarrow G/L \rightarrow G/K$ von G -Abbildungen. Zwei Diagramme $G/H \leftarrow G/L \rightarrow G/K$ und $G/H \leftarrow G/L' \rightarrow G/K$ gelten als äquivalent, wenn es eine G -Bijektion $\sigma : G/L \rightarrow G/L'$ gibt, so dass

$$\begin{array}{ccccc} & & G/L & & \\ & \swarrow & \downarrow \sigma & \searrow & \\ G/H & & & & G/K \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & & G/L' & & \end{array}$$

kommutiert. Die linke Seite $G/H \leftarrow G/L$ repräsentiert dann die Induktion und $G/L \rightarrow G/K$ die Restriktion, wie schon in dem Beispiel angedeutet.

Die Komposition ist für Basiselemente auf Repräsentanten durch ein Pullback-Diagramm festgelegt. Es scheint sinnvoll, eine eigene Notation für diese Form der Diagramme einzuführen. So soll

$$G/H \xleftarrow{\alpha} G/L \xrightarrow{\beta} G/K$$

kurz durch (β, α) notiert werden. Um nun die Komposition $\psi \circ \phi$ von zwei Basis-Morphismen $\phi \in \text{Mor}_J(G/H, G/K)$ und $\psi \in \text{Mor}_J(G/K, G/H')$ festzulegen, wählen wir entsprechende Repräsentanten

$$(\beta, \alpha) : G/H \xleftarrow{\alpha} G/L \xrightarrow{\beta} G/K$$

und

$$(\delta, \gamma) : G/K \xleftarrow{\gamma} G/L' \xrightarrow{\delta} G/H$$

und betrachten dazu das Pullback der inneren Abbildungen von $(\delta, \gamma) \circ (\beta, \alpha)$:

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Gamma} & G/L' \\ B \downarrow & & \downarrow \gamma \\ G/L & \xrightarrow{\beta} & G/K \end{array}$$

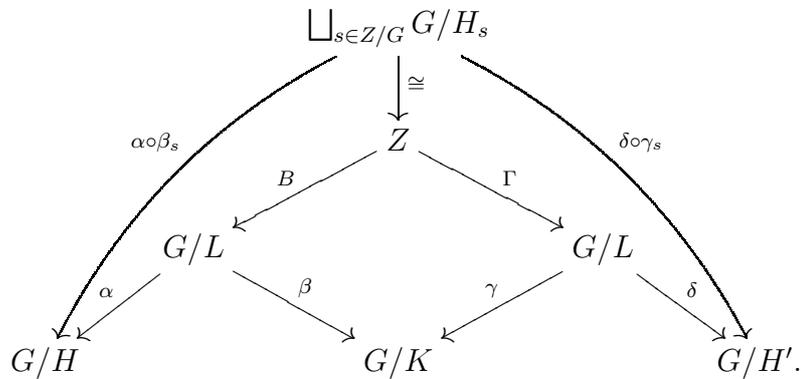
Wir erhalten $Z = \{(x, y) \in G/L \times G/L' \mid \beta(x) = \gamma(y)\}$ mit B und Γ als die jeweiligen Projektionen. Da Z unter der Diagonal-Operation eine endliche G -Menge ist, können wir eine G -äquivalente Bijektion

$$\sigma : \bigsqcup_{\bar{s} \in Z/G} G/H_s \xrightarrow{\cong} Z$$

mit $G/H_s \cong G.s = \bar{s}$ wählen und β_s , bzw. γ_s , durch $\beta_s = B\sigma|_{G/H_s}$, bzw. $\gamma_s = \Gamma\sigma|_{G/H_s}$ erklären. Mit dieser Notation ist dann die Komposition $\psi \circ \phi$ durch

$$(\delta, \gamma) \circ (\beta, \alpha) = \sum_{\bar{s} \in Z/G} (\delta\gamma_s, \alpha\beta_s)$$

repräsentiert. Dies sei im folgenden Diagramm noch einmal anschaulich zusammengefasst:



Für allgemeine Morphismen ist deren Komposition durch lineare Fortsetzung zu erklären.

Da die Basis der Morphismengruppen aus Isomorphieklassen besteht, ist die Definition der Komposition sowohl unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten, als auch von der Wahl des Isomorphismus σ und nach Konstruktion bilinear.

Wegen der Isomorphie

$$Z/G \cong (G/L \times_{G/K} G/L')/G \cong L \backslash K/L'$$

heißen die Zerlegungsformeln der Basis-Morphismen auch Doppelnebenklassen-Formeln (DNK-Formeln).

Additive kontravariante Funktoren von einer Induktionskategorie in die R -Moduln, R ein kommutativer Ring mit Eins, heißen dann Mackeyfunktoren.

Ein grundlegendes Beispiel eines Mackeyfunktors ist der Burnsidefunktorktor A mit

$$A(G/H) = \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(G/H, G/G).$$

Auch gibt es die Inklusion $A(G/H) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(G/H, G/H)$, induziert durch die Zuordnung

$$(G/L \rightarrow G/H) \longmapsto (G/H \leftarrow G/L \rightarrow G/H)$$

in die Endomorphismen von G/H , so dass $A(G/H)$ für alle G/H ein kommutativer Ring mit Eins ist und für jeden Mackeyfunktorktor M der Wert an G/H ein natürlicher $A(G/H)$ -Modul ist. Dies macht ihn zu einem universellen Mackeyfunktorktor. Es ist daher nicht überraschend, dass er in der gesamten Theorie allgegenwärtig und damit von grundlegender Bedeutung ist.

In dieser Form wurden Mackeyfunktoren zuerst von Lindner [**Lin76**] beschrieben, was eine äquivalente Beschreibung der Mackeyfunktoren von Dress [**Dre73**] war. Beginnend mit diesen Arbeiten ist die Untersuchung von Mackeyfunktoren ein eigenständiges mathematisches Forschungsgebiet mit umfangreichen Anwendungen geworden. Siehe tom Dieck [**tD79**], [**tD87**], Dress [**Dre73**], Greenlees und May [**GM92**], Lewis [**Lew98**], Thevenaz und Webb [**TW95**] sowie Webb [**Web00**].

Von zentralem Interesse sind dabei Induktionssätze. Ein klassisches Resultat von Brauer [**Bra51**] besagt, dass die Induktion

$$(1.2.2) \quad \text{ind} : \bigoplus_{P \in \mathcal{E}(G)} R(P) \longrightarrow R(G)$$

ein surjektiver Homomorphismus ist, wenn $\mathcal{E}(G)$ die Menge der elementaren Untergruppen von G umfasst. Dies sind die Untergruppen $H \leq G$, die ein Produkt $C \times P$ einer zyklischen Gruppe C und einer p -Gruppe P zu einer beliebigen Primzahl p sind. Aussagen von ähnlichem Typ macht der Induktionssatz von Artin [**Art30**] und die hyper-elementare Induktion von Dress [**Dre73**], wobei man an Stelle von $\mathcal{E}(G)$ die Menge der hyper-elementaren Untergruppen $\mathcal{H}(G)$ zu verwenden hat; vgl. Abschnitt 4.3.

Wie schon bemerkt, stammt eine grundlegende Arbeit über Mackeyfunktoren von Dress. An dieser Stelle wurden jedoch Mackeyfunktoren als bestimmte Bifunktoren auf der Kategorie der endlichen G -Menge mit G -äquivarianter Abbildung in die Kategorie der abelschen Gruppen. Ein solcher Bifunktor (M_*, M^*) besteht aus einem kovarianten Funktor M_* und einem kontravarianten Funktor M^* und es gilt für den Wert an einem Objekt X $M_*(X) = M^*(X)$. Zusätzlich hat er als Mackeyfunktor disjunkte Vereinigungen in direkte Summen zu überführen und eine Pullbackbedingung, auch DNK-Formel genannt, zu erfüllen. Diese fordert, dass ein Pullback wie (1.2.1) in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M(Z) & \xrightarrow{M_*(\Gamma)} & M(G/L') \\ M^*(B) \uparrow & & \uparrow M^*(\gamma) \\ M(G/L) & \xrightarrow{M_*(\beta)} & M(G/K) \end{array}$$

überführt wird. Die Äquivalenz dieser zwei Definitionen von Mackeyfunktoren für homogene Räume lässt sich nun leicht nachvollziehen. Details sind in [TW95] und [Web00] zu finden.

Doch definiert Dress Mackeyfunktoren auf endlichen G -Mengen, wodurch sich Brauers Satz als surjektiver Induktionshomomorphismus des Mackeyfunktors K_G

$$\text{ind}_\pi = \pi_* : K_G(X) \longrightarrow K_G(*)$$

zur Projektion

$$X := \bigsqcup_{H \in \mathcal{H}(G)} G/H \xrightarrow{\pi} G/G =: *$$

schreiben lässt.

Neben der vereinfachten Notation definiert das kartesische Produkt mit einer endlichen G -Menge Y zu einem Mackeyfunktor M einen Neuen:

$$M_Y(?) := M(Y \times ?),$$

da für eine endliche G -Menge X auch $Y \times X$ eine endliche G -Menge ist. Auch induziert die Projektion $\pi : Y \rightarrow *$ natürliche Transformationen von Mackeyfunktoren

$$\pi_* : M_Y \longrightarrow M \quad \text{und} \quad \pi^* : M \longrightarrow M_Y.$$

Es existiert auch eine Induktionskategorie $\tilde{\mathcal{J}}$, die endliche G -Mengen X, Y als Objekte hat und eine zu dem zuletzt beschriebenen äquivalenten Mackeyfunktorbegriff besitzt. In Analogie zu \mathcal{J} sei die Morphismenmenge $\text{Mor}_{\tilde{\mathcal{J}}}(X, Y)$ die freie abelsche Gruppe über der Basis aus Isomorphieklassen von Diagrammen aus G -Abbildungen

$$X \longleftarrow G/H \longrightarrow Y.$$

Die Komposition definiert man wiederum auf Repräsentanten mittels Pullbacks, so dass wir wieder eine Dopplenebenklassen-Formel für die Komposition von Morphismen erhalten.

Offensichtlich enthält $\tilde{\mathcal{J}}$ die Induktionskategorie \mathcal{J} als volle Unterkategorie, d.h., sind X, Y homogene Räume $G/H, G/K$, so gilt

$$\text{Mor}_{\mathcal{J}}(G/H, G/K) = \text{Mor}_{\tilde{\mathcal{J}}}(X, Y)$$

mit identischer Komposition in $\tilde{\mathcal{J}}$ und \mathcal{J} .

Die Einschränkung eines Mackeyfunktors über $\tilde{\mathcal{J}}$ auf \mathcal{J} induziert sogar einen Isomorphismus der jeweiligen Funktorkategorien $\text{MACK}(\mathcal{J}) \cong \text{MACK}(\tilde{\mathcal{J}})$, was sich aus folgendem Satz unmittelbar ergibt.

SATZ 1.2.1. *Ist N ein Mackeyfunktors über \mathcal{J} , so definiert dieser vermöge der Orbiterlegung endlicher G -Mengen einen Mackeyfunktors \tilde{N} über $\tilde{\mathcal{J}}$.*

BEWEIS. Seien

$$X = \coprod_i X_i, \quad X_i \cong G/H_i \quad \text{und} \quad Y = \coprod_j Y_j, \quad Y_j \cong G/K_j$$

Orbiterlegungen von X und Y , sowie $X \xleftarrow{\beta} G/L \xrightarrow{\alpha} Y$ ein Repräsentant eines Basiselements von $\text{Mor}(X, Y)$ mit $\beta(G/L) = X_0$ und $\alpha(G/L) = Y_0$. So ist nun $\tilde{N}(\beta, \alpha)$ durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N(X_0) & \xrightarrow{N(\beta, \alpha)} & N(Y_0) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \tilde{N}(X) := \bigoplus N(X_i) & \xrightarrow{\tilde{N}(\beta, \alpha)} & \bigoplus N(Y_j) =: \tilde{N}(Y) \end{array}$$

zu erklären. □

Die Kategorie $\tilde{\mathcal{J}}$ gestattet eine weitere Beschreibung:

Dabei sind die Morphismen $\text{Mor}(X, Y)$ als ein Quotient der freien abelschen Gruppe F über der Basis von Isomorphieklassen von Diagrammen

$$X \longleftarrow U \longrightarrow Y$$

erklärt. Diese Klassen kennzeichnen wir durch Klammern $[X \leftarrow U \rightarrow Y]$.

Ein Isomorphismus zweier Diagramme ist ein invertierbare G -Abbildung $\sigma : X \rightarrow X'$ in \mathcal{K} , so dass

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & \downarrow \sigma & \searrow \beta \\ A & & B \\ \swarrow \alpha' & & \searrow \beta' \\ & X' & \end{array}$$

kommutiert.

Nun sei N die durch Elemente $[X \leftarrow U \rightarrow Y] - [X \leftarrow V \rightarrow Y] - [X \leftarrow V' \rightarrow Y]$ erzeugte Untergruppe von F zu denen eine G -Bijektion $\sigma : U \rightarrow V \sqcup V'$ über $X \times Y$ existiert. Der Quotient $F/N = \text{Mor}_{\tilde{J}}(X, Y)$ ist dann die Morphismenmenge. Da endliche G -Mengen disjunkte Vereinigungen von homogenen Räumen sind, erhalten wir wieder eine Basis aus Diagrammen $X \leftarrow G/H \rightarrow Y$. Die Komposition von Morphismen erklären wir auch hier auf Repräsentanten mittels Pullbacks. Dazu ergänzen wir in

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & V & & \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ & X & & Y & & & Z \end{array}$$

die inneren Morphismen zu einem Pullback. Das resultierende Diagramm definiert nun ein Element in $\text{Mor}(X, Z)$.

Obwohl beide Beschreibungen der Morphismengruppen äquivalent sind, haben sie doch unterschiedliche Vorteile. Während eine Basisdarstellung der Morphismen Rechnungen vereinfachen und Morphismengruppen einfacher gestalten, ist der Vorteil der zweiten Beschreibung die Nähe zur Definition von Dress, da nun alle Morphismen durch formale Differenzen von echten Diagrammen repräsentiert werden. Mit Hilfe von additiven Invarianten endlicher G -CW Komplexe (siehe Anhang 6.2.1) ist es sogar möglich, jeden Morphismus durch Diagramme $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ mit X, Y endlichen G -Mengen und Z einem endlichen G -CW Komplex darzustellen. Dies folgt aus der Isomorphie 6.2.4

$$U(X \times Y) \cong \text{Mor}_{\tilde{J}}(X, Y),$$

worauf wir gleich im Falle einer kompakten Lie-Gruppe noch ausführlich zu sprechen kommen.

Sei also weiterhin G eine endliche Gruppe und betrachten wir dazu die Kategorie der endlichen G -Mengen $G\text{-MENG}$, so definiert die Zuordnung

$$\iota^* : (X \xrightarrow{\alpha} Y) \mapsto (1, \alpha) : Y \leftarrow X \rightarrow X$$

einen kontravarianten Funktor von $G\text{-MENG} \rightarrow \tilde{J}$, der disjunkte Vereinigungen $\bigsqcup_i X_i$ in direkte Summen $\bigoplus_i X_i$ überführt. Dual dazu liefert

$$\iota_* : (X \xrightarrow{\alpha} Y) \mapsto (\alpha, 1) : X \leftarrow X \rightarrow Y$$

einen kovarianten Funktor, der ebenso disjunkte Vereinigungen in direkte Summen überführt.

Es bleibt nachzuweisen, dass \tilde{J} überhaupt direkte Summen hat, d.h. $X \oplus Y$ sowohl Produkt als auch Koprodukt ist.

Eine direkte Summe oder Biproduct von zwei Objekten X und Y ist ein Diagramm

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{i_X} \\ \xleftarrow{p_X} \end{array} Z \begin{array}{c} \xleftarrow{p_Y} \\ \xrightarrow{i_Y} \end{array} Y$$

mit den Bedingungen:

$$(1.2.3) \quad p_X i_X = 1_X, \quad p_Y i_Y = 1_Y, \quad \text{und } i_X p_X + i_Y p_Y = 1.$$

Es gilt (siehe Mac Lane [Mac71, VIII.2])

SATZ 1.2.2. *Seien X und Y zwei Objekte aus einer präadditiven Kategorie. Dann sind äquivalent:*

- (1) X und Y besitzen ein Produkt.
- (2) X und Y besitzen ein Biprodukt.
- (3) X und Y besitzen ein Koprodukt.

SATZ 1.2.3. *Seien X, Y und Z Objekte in der Induktionskategorie $\tilde{\mathcal{J}}$ und Z das Koprodukt von X und Y in G -MENG mit $i_X : X \rightarrow Z$ und $i_Y : Y \rightarrow Z$ den kanonischen Abbildungen. Dann ist*

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{(i_X, 1)} \\ \xleftarrow{(1, i_X)} \end{array} Z \begin{array}{c} \xleftarrow{(1, i_Y)} \\ \xrightarrow{(i_Y, 1)} \end{array} Y$$

das Biprodukt von X und Y in $\tilde{\mathcal{J}}$.

BEWEIS. Nach Definition ist Z sowohl Produkt als auch Koprodukt in $\tilde{\mathcal{J}}$. Die angegebenen Morphismen sind die Bilder der kanonischen Inklusionen der Summanden in die Koprodukte in G -MENG und damit die kanonischen Morphismen von Produkt und Koprodukt in $\tilde{\mathcal{J}}$. \square

1.2.2. Verallgemeinerung für kompakte Lie-Gruppen. Diese Resultate für kompakte Lie-Gruppen zu verallgemeinern ist eine Motivation, geeignete Induktionskategorien zu definieren.

Da aber für eine kompakte Lie-Gruppe G das Produkt zweier homogener Räume $G/H \times G/K$ im Allgemeinen keine endliche Zerlegung in G -Orbits hat, ist in diesem Fall die Induktionskategorie \mathcal{J} in obiger Form nicht definierbar. Um eine Verallgemeinerung dennoch zu erreichen, half folgende Erkenntnis.

Für eine endliche Gruppe G treten die Morphismen der Kategorie \mathcal{J} auch in einem anderen Kontext auf, nämlich als stabile G -Homotopieklassen von G -Abbildungen zwischen homogenen Räumen. Sei G/H_+ der Raum G/H mit disjunktem Grundpunkt und S^V die Einpunktkompaktifizierung einer komplexen G -Darstellung V . Dann induziert die Einhängung $S^V \wedge ?$ eine Abbildung der G -Homotopieklassen punktierter G -Abbildungen

$$s_V : [G/H_+, G/K_+] \longrightarrow [S^V \wedge G/H_+, S^V \wedge G/K_+].$$

Diese Prozesse sind mit Inklusionen $V \subset W$ verträglich, d.h. zu einem Isomorphismus $\varphi : V \oplus U \cong W$ gibt es das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [S^V \wedge G/H_+, S^V \wedge G/K_+] & \xrightarrow{s_U} & [S^U \wedge S^V \wedge G/H_+, S^U \wedge S^V \wedge G/K_+] \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ [S^W \wedge G/H_+, S^W \wedge G/K_+] & \xleftarrow{\cong} & [S^{U \oplus V} \wedge G/H_+, S^{U \oplus V} \wedge G/K_+] \end{array}$$

so dass der direkte Limes über alle Darstellungen V gebildet werden kann. Resultate von tom Dieck [tD79] und Segal [Seg71] liefern einen Isomorphismus

$$\lim[S^V \wedge G/H_+, S^V \wedge G/K_+] \cong \text{Mor}_{\mathcal{J}}(G/H, G/K),$$

wobei der Limes über komplexe G -Darstellungen V gebildet wird.

Die stabilen G -Homotopieklassen sind die Morphismen der äquivarianten stabilen Homotopiekategorie, die somit \mathcal{J} als volle Unterkategorie enthält. Bemerkenswert ist, dass damit nicht nur die Morphismen zwischen homogenen Räumen durch Diagramme repräsentiert sind, sondern auch die Komposition durch eine elementare geometrische Konstruktion beschreibbar ist. Sie wird daher auch als stabile Orbitkategorie bezeichnet.

Die äquivariante stabile Homotopiekategorie läßt sich analog für eine kompakte Lie-Gruppe definieren, so dass man eine entsprechende stabile Orbitkategorie erhält. So ist es durchaus üblich, im Kontext der stabilen Homotopietheorie diese als Verallgemeinerung der Induktionskategorie \mathcal{J} zu wählen. Mackeyfunktoren über dieser Induktionskategorie stehen dann als Koeffizientensysteme in enger Beziehung zu stabilen äquivarianten Kohomologietheorien, siehe Lewis, May, McClure [LMM81].

Der Isomorphismus

$$\lim[S^V \wedge G/H_+, S^V \wedge G/K_+] \cong \text{Mor}_{\mathcal{J}}(G/H, G/K)$$

hat im folgenden Sinne eine Verallgemeinerung für kompakte Lie-Gruppen. Die Morphismengruppen der stabilen Orbitkategorie haben als abelsche Gruppe eine Basis aus Äquivalenzklassen von Diagrammen der Form $G/H \leftarrow G/L \rightarrow G/K$ hat, wobei hier nur solche Untergruppen L auftreten, für die die Weyl-Gruppe $W_H L = N_H L/L$ von L in H endlich ist.

Zwei Diagramme $G/H \leftarrow G/L \rightarrow G/K$ und $G/H \leftarrow G/L' \rightarrow G/K$ sind äquivalent, wenn es eine G -Abbildung $\sigma : G/L \rightarrow G/L'$ gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} & G/L & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ G/H & & G/K \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & G/L' & \end{array}$$

bis auf eine G -Homotopie kommutiert.

Auch hier gilt, dass die Komposition auf Repräsentanten von Basiselementen durch Pullbacks beschrieben werden kann. Der topologischen Situation rechnertragend ist es nötig, den entstehenden Raum Z in Orbiten $\gamma : G/L \rightarrow G/H \times G/H'$ zu zerlegen, wobei γ einem Basismorphismus $G/H \leftarrow G/L \rightarrow G/H'$ entspricht. Man erhält, wie in Abschnitt 6.2.1 über

additive Invarianten beschrieben, die Zerlegung

$$\sum_{[\gamma]} \chi_c(Z_{(\gamma)}/G)[\gamma],$$

worin χ_c Euler-Charakteristik mit kompaktem Träger ist. Die Summe spiegelt somit eine Verallgemeinerung der Doppelnebenklassen-Formel für kompakte Lie-Gruppen wider, wie sie in Feshbach [**Fes79**], Oliver [**Oli86**], [**Oli98**], Segal [**Seg68**], Snaith [**Sna88**] auftritt.

Auch wenn die Einschränkung auf Untergruppen L mit endlicher Weyl-Gruppe aus homotopietheoretischer Sicht begründet ist, so ist sie aus rein algebraischen Betrachtungen heraus letztlich unnötig. Mit Hilfe universeller additiver Invarianten definiert tom Dieck in [**tD87**, IV.8] eine Induktionskategorie Ω , deren Morphismengruppen frei abelsch über einer Basis aus allen Äquivalenzklassen obiger Diagramme sind und die stabile Orbitkategorie als Quotientkategorie behält. Damit erweitert diese Definition die homotopietheoretischen Mackeyfunktoren um solche, wie sie in der algebraischen K-Theorie auftreten, so z.B. bei Lück [**Lüc89**], Dorabiala [**Dor02**].

Wir wollen nun von Ω berichten. Sei also G eine kompakte Lie-Gruppe. Die Objekte von Ω seien die homogene Räume G/H nach abgeschlossenen Untergruppen $H \leq G$. Die Morphismengruppen sind die universellen additiven Invarianten für G -Abbildungen $Z \rightarrow G/H \times G/H'$,

$$\text{Mor}_{\Omega}(G/H, G/H') = U(G/H \times G/H').$$

Die Komposition erklären wir, wie bisher, durch Repräsentanten mittels Pullbacks. Seien also

$$(\beta, \alpha) : G/H \xleftarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} G/K \quad \text{und} \quad (\delta, \gamma) : G/K \xleftarrow{\gamma} Y \xrightarrow{\delta} G/H'$$

zwei Repräsentanten von Basiselementen und

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Gamma} & Y \\ B \downarrow & & \downarrow \gamma \\ X & \xrightarrow{\beta} & G/K \end{array}$$

ein Pullback, so definiert dies G -Abbildungen

$$(\delta\Gamma, \alpha B) : G/H \xleftarrow{\alpha B} Z \xrightarrow{\delta\Gamma} G/H'$$

und somit ein Element in $U(G/H \times G/H')$. Vermöge des Isomorphismus $\text{Mor}(G/H, G/H') \cong U(G/H \times G/H')$ ergibt dies die Komposition

$$(\delta, \gamma) \circ (\beta, \alpha) = (\delta\Gamma, \alpha B) \in \text{Mor}(G/H, G/H').$$

Eine alternative Beschreibung der Komposition lässt sie unmittelbar als wohldefiniert erkennen.

Sei $\Delta : G/K \rightarrow G/K \times G/K$ die Diagonalabbildung und

$$p : G/H \times G/K \times G/H' \rightarrow G/H \times G/H'$$

die kanonische Projektion. Dann ist die Komposition in Ω die Verkettung folgender Abbildungen

$$\begin{array}{c}
U(G/H \times G/K) \times U(G/K \times G/H') \\
\downarrow m \\
U(G/H \times G/K \times G/K \times G/H') \\
\downarrow \Delta^* \\
U(G/H \times G/K \times G/H') \\
\downarrow p_* \\
U(G/H \times G/H').
\end{array}$$

Darin ist m die bilineare Abbildung aus Lemma 6.2.8, der Homomorphismus Δ^* Restriktion entlang Δ und p_* Induktion zu p . Vergleiche hierzu Lemma 6.2.5, Lemma 6.2.16 und Lemma 6.2.13.

Der Satz 6.2.4 liefert, dass $U(G/H \times G/H')$ die freie abelsche Gruppe über einer Basis aus Isomorphieklassen von Diagrammen $[G/H \leftarrow G/K \rightarrow G/H']$ ist. Damit können wir Ω auch wie folgt beschreiben. Wir betrachten wieder die Orbitkategorie \mathcal{O}_G zu G und dazu alle Diagrammen $G/H \leftarrow G/K \rightarrow G/H'$, so dass deren Isomorphieklassen genau die besagte \mathbb{Z} -Basis von $U(G/H \times G/H')$ bilden. Mit der in Anhang 6.2.1 genutzten Notation ergeben sich Zerlegungsformeln der Art

$$(\delta, \gamma) \circ (\beta, \alpha) = \sum_{[\phi]} \chi_c(Z_{\Gamma\delta \times B\alpha, (\phi)})[\phi],$$

wobei die Summe über alle auftretenden Orbittypen $\phi : G/L \rightarrow G/H \times G/H'$ läuft.

Ist G eine endliche Gruppe, so entspricht Ω der Induktionskategorie \mathcal{J} . Leider ist es nicht möglich eine zu $\tilde{\mathcal{J}}$ analoge Kategorie mit Hilfe additiver Invarianten für endliche G -CW Komplexe zu definieren, da eine durch Pullbacks induzierte Komposition

$$U(X \times Y) \times U(Y \times Z) \longrightarrow U(X \times Z)$$

selbst im Falle von $G = S^1 \times S^1$ nicht wohldefiniert ist. Es ist nötig an dieser Stelle eine spezielle Form der additiven Invarianten zu nutzen; dies wird im nächsten Abschnitt folgen.

Dort schlagen wir eine Kategorie $\tilde{\Omega}$ vor, die Ω als volle Unterkategorie enthält und diese um Objekte vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe erweitert. Dies geschieht in Kapitel 2.1.

Neben Induktionssätzen ähnlich des Satzes von Brauer, die man auch für kompakte Lie-Gruppen zur Verfügung hat, wie von tom Dieck in [tD87, IV.9] für die hyperelementare

Induktion gezeigt, interessiert man sich für explizite Induktionssätze, den sogenannten kanonischen Induktionsformeln. Dabei handelt es sich formal gesprochen um eine zum Induktionshomomorphismus $\text{ind}_\pi : M(X) \rightarrow M(*)$ natürlichen Spalthomomorphismus

$$s : M(*) \longrightarrow M(X),$$

d.h. er erfüllt $\text{ind}_\pi \circ s = 1_{M(*)}$.

Ein solches Ergebnis für den komplexen Darstellungsrings zeigt, dass eine virtuelle Darstellung (Element des Darstellungsrings) nicht nur durch Darstellung von geeigneten Untergruppen induziert ist, sondern man bekommt eine natürliche Formel an die Hand, die einem sagt, welche Darstellungen dies explizit leisten.

Das erste Ergebnis dieser Art stammt von Snaith [Sna88]. Es gilt allgemein für kompakte Lie-Gruppen, nutzt aber gänzlich andere Methoden. Aus dem Jahr 1990 stammt von Boltje eine Version für endliche Gruppen, vgl. [Bol90]. Diese betrachtet eine Form der Induktionsprozesse, die sich von unserer etwas unterscheidet.

Dort versteht man diese als Induktion von eindimensionalen Darstellungen von Untergruppen $H \leq G$. Man betrachtet dazu die freie abelsche Gruppe $R_+(G)$ der Isomorphieklassen (H, ρ) von Homomorphismen $\rho : H \rightarrow U(1)$, d.h. eindimensionale unitäre Darstellungen von Untergruppen $H \leq G$. Die Paare (H, ρ) repräsentieren monoidale Darstellungen von G . Das Tensorprodukt dieser übersetzt zu einem Produkt auf $R_+(G)$ vermöge

$$(H, \rho) \cdot (K, \eta) = \sum_{s \in H \backslash G / K} (H \cap K^s, \rho \cdot \eta^s)$$

mit $K^s = sKs^{-1}$ und $\eta^s(g) = \eta(s^{-1}gs)$. Damit wird $R_+(G)$ zu einem kommutativen Ring mit Eins, sogar zu einem Greenfunctor auf \mathcal{J} . Eine Variante des Satzes von Brauer liefert, dass der durch

$$(H, \rho) \longmapsto \text{ind}_H^G(\rho)$$

induzierte Homomorphismus

$$R_+(G) \longrightarrow R(G)$$

eine Surjektion ist. Mit dieser Sicht zeigen sie, dass es einen natürlichen Spalthomomorphismus

$$s : R(G) \longrightarrow R_+(G)$$

gibt. Für einen weitergehenden Überblick siehe auch Boltje, Snaith, Seymond [BSS92].

Dies stellt eine Variante des zuvor zitierten Satzes von Brauer dar, da alle komplexen Darstellungen (hyper-)elementarer Gruppen monoidal sind, d.h. induzierbar durch eindimensionale Darstellungen von Untergruppen. Enthält wieder $\mathcal{H}(G)$ die Menge der hyper-elementaren

Untergruppen von G , so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$(1.2.4) \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{H \in \mathcal{H}(G)} R_+(H) & \xrightarrow{\text{ind}} & \bigoplus_{H \in \mathcal{H}(G)} R(H) \\ \downarrow & & \downarrow \text{ind} \\ R_+(G) & \xrightarrow{\text{ind}} & R(G) \end{array}$$

in dem somit die Komposition

$$\bigoplus_{H \in \mathcal{H}(G)} R_+(H) \longrightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}(G)} R(H) \longrightarrow R(G)$$

aus surjektiven Homomorphismen besteht.

Wir werden von expliziten Induktionssätzen sprechen, die Aussagen über die Existenz von Spaltabbildungen zu

$$\text{ind}_\pi : M(X) \longrightarrow M(*)$$

machen. Darin sei M ein Mackeyfunktork in unserem noch näher zu definierenden Sinne und $\text{ind}_\pi = M(1, \pi)$ die Induktionsabbildung entlang $\pi : X \rightarrow *$; vgl. $M = K_G$.

Dabei stellt sich heraus, dass es für vergleichbare Resultate reicht, Spalthomomorphismen s zu betrachten, die im Bild des Mackeyfunktors liegen; d.h. $s = M(\delta, \gamma)$ mit

$$1_{M(*)} = \text{ind}_\pi \circ s = M(1, \pi) \circ M(\delta, \gamma) = M((\delta, \gamma)(1, \pi)) = M(\delta, \pi\gamma).$$

Letztlich gilt es, nach Urbildern der Identität $1_{M(*)}$ unter der durch M induzierten Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Mor}_\Omega(*, *) &\xrightarrow{M} \text{Hom}(M(*), M(*)) \\ (\beta, \alpha) &\longmapsto M(\beta, \alpha) \end{aligned}$$

mit $\alpha = \pi\gamma$ zu suchen.

Wir werden eine Möglichkeit angeben, die Existenz solche Urbilder zu bestimmen. Dazu sind aber zunächst noch teils bekannte und teils neue strukturelle Eigenschaften von Mackeyfunktoren zu untersuchen.

KAPITEL 2

Induktionskategorien

2.1. Erweiterte Induktionskategorie

2.1.1. Erweiterung von Ω . Am Anfang dieses Kapitels wollen wir nun eine Induktionskategorie $\tilde{\Omega}$ vorschlagen, welche die im letzten Abschnitt beschriebene Induktionskategorie Ω in ähnlicher Weise erweitert, wie \mathcal{J} durch $\tilde{\mathcal{J}}$ erweitert wird. Wir hatten schon angesprochen, dass dies jedoch nicht genauso geschehen kann wie für eine endliche Gruppe.

Grundbemühung bleibt es, Morphismen durch Diagramme

$$X \longleftarrow E \longrightarrow Y$$

zu repräsentieren, so dass X , E und Y Objekte in $\tilde{\Omega}$ sind, sowie eine Komposition durch folgende Pullbackkonstruktion zu definieren.

Seien zwei geeignete Diagramme $X \xleftarrow{f} E \xrightarrow{\phi} Y$ und $Y \xleftarrow{f'} E' \xrightarrow{\phi'} X'$ gegeben, so erhalten wir durch das Pullback von $E \xrightarrow{\phi} Y$ und $Y \xleftarrow{f'} E'$ ein großes Diagramm

(2.1.1)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & F \swarrow & & \searrow \Phi & \\
 & E & & E' & \\
 f \swarrow & & \phi \searrow & f' \swarrow & \phi' \searrow \\
 X & & Y & & X'
 \end{array}$$

Das dadurch definierte Diagramm $X \xleftarrow{fF} Z \xrightarrow{\phi'\Phi} X'$ soll dann die Komposition repräsentieren.

Weiter sollen neben der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ zweier Objekte (G -Räume) auch ihr kartesisches Produkt $X \times Y$ in $\tilde{\Omega}$ enthalten sein.

Diese Forderungen und die, dass für homogene Räume G/H , G/K jeweils

$$\text{Mor}_{\tilde{\Omega}}(G/H, G/K) = \text{Mor}_{\Omega}(G/H, G/K)$$

gelte, legen gewisse Festlegungen nahe:

Mit G -Räumen vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe als Objekte ist sichergestellt, dass disjunkte Vereinigungen und kartesische Produkte vom selben Typ sind und damit auch in $\tilde{\Omega}$ enthalten sind. Auch gibt es zu $G/H \times G/K$ die universellen additiven Invarianten $U(G/H \times G/K)$ (vgl. Anhang 6.2.1), die durch G -Abbildungen von

$X \rightarrow G/H \times G/K$ erzeugt werden und die Morphismen von G/H nach G/K in Ω beschreiben.

Wie aber schon erwähnt, ist für kompakte Lie-Gruppen das Pullback von

$$(2.1.2) \quad \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

aus G -CW Komplexen, bzw. aus Räumen von diesem Homotopietyp, nicht G -homotopieinvariant und es wäre eine dadurch induzierte Komposition nicht wohldefiniert. Damit das Pullback (2.1.2) homotopieinvariant wird, d.h. bis auf G -Homotopie unabhängig von G -Homotopieäquivalenzen $X \simeq X'$ und von G -Homotopien $f \simeq g$, $f, g : X \rightarrow Z$ ist, muss eine der beiden Abbildungen f oder ϕ in (2.1.2) eine G -Faserung sein. Wir erhalten dann einen Homotopie-Limes. Da wir aber von den auftretenden Räumen fordern, vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe zu sein, stellt dies auch Anforderungen an den Homotopietyp der Fasern.

Wir wollen mit G_x den Stabilisator an x unter der G -Operation auf X notieren. Ist $f : E \rightarrow X$ eine Faserung und $F_x = f^{-1}(x)$ die Faser über $x \in X$, so hat F_x vom G_x -Homotopietyp eines endlichen G_x -CW Komplexes zu sein. Eine solche Faserung heißt faserweise schwach endlich.

Ist nun f aus dem Pullback (2.1.2) eine faserweise schwach endlichen Faserung und X, Y und Z vom Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe, so ist auch C vom Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplexes (vgl. [Sum91] Lemma 1.2, Corollary 2.5 und auch Anhang 6.1 Satz 6.1.14).

Wir werden also im Folgenden G -Räume vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe nutzen, um die Klasse der Objekte unserer erweiterten Induktionskategorie $\tilde{\Omega}$ festzulegen.

Zu Diagramme $(\beta, \alpha) : X \xleftarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} Y$, in denen α faserweise schwach endliche Faserung ist, gibt es auch eigene additive Invarianten. Wir haben die durch derartige Diagramme definierte G -Abbildungen $E \rightarrow X \times Y$ linksseitig-fibrant genannt und entsprechend auch die zugehörigen additiven Invarianten als die linksseitig-fibranten Invarianten. Sie entstehen analog der additiven Invarianten von tom Dieck für G -Abbildungen unter der Einschränkung, dass wir G -Abbildungen $E \rightarrow X \times Y$ betrachten, in der die Projektion $E \rightarrow X$ auf X eine faserweise schwach endliche G -Faserung ist. Die Universelle notieren wir dann mit $U_{fib}(X, Y)$.

Man gewinnt $U_{fib}(X, Y)$ mit Hilfe einer Grothendieck-Konstruktion. Zwei linksseitig-fibrante G -Abbildungen $Z \rightarrow X \times Y$ und $Z' \rightarrow X \times Y$ seien äquivalent, wenn eine G -Homotopieäquivalenz σ existiert, so dass

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\sigma} & Z' \\ & \searrow & \swarrow \\ & X \times Y & \end{array}$$

bis auf G -Homotopie kommutiert. Es sei \mathcal{F} die freie abelsche Gruppe über diesen Äquivalenzklassen und \mathcal{N} der Normalteiler erzeugt durch die Klassen $[\emptyset : \emptyset \rightarrow X \times Y]$ und $[F_1] + [F_2] - [F_0] - [F]$, falls diese in einem Pushout

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \longrightarrow & Z_2 \\ \cap \downarrow & & \downarrow \\ Z_1 & \longrightarrow & Z' \xrightarrow{F} X \times Y \end{array}$$

mit $F_i : Z_i \rightarrow X \times Y$ als die resultierenden linksseitig-fibranten G -Abbildungen für $i = 0, 1, 2$ entstehen, in dem $(Z_1, Z_0, pr_X F_1)$ eine G -Kofaserung über X ist. Dann ist \mathcal{F}/\mathcal{N} die universelle additive Invariante.

Details und Eigenschaften dieser universellen Invarianten sind im Anhang 6.2.1 und 6.2.2 zusammengefasst. Wir wollen an dieser Stelle die für uns wesentlichen kurz zitieren:

- (1) Ist $X = G/H$, so ist jede G -Abbildung $E \rightarrow X$ eine G -Faserung und es gilt $U_{fib}(X, Y) = U(X \times Y)$.
- (2) Die Komposition mit einer faserweise schwach endlichen G -Faserung $f : X \rightarrow Y$ induziert einen Homomorphismus $f_* : U_{fib}(X, Z) \rightarrow U_{fib}(Y, Z)$, $(\beta, \alpha) \mapsto (\beta, f\alpha)$,
- (3) Das Pullback entlang f induziert einen Homomorphismus $f^* : U_{fib}(Z, Y) \rightarrow U_{fib}(Z, X)$, $(\delta, \gamma) \mapsto (F, \gamma\Delta)$.
- (4) Die Komposition mit $\phi : Y \rightarrow Z$ induziert einen Homomorphismus $f_* : U_{fib}(X, Y) \rightarrow U_{fib}(X, Z)$, $(\beta, \alpha) \mapsto (f\beta, \alpha)$,
- (5) Das Pullback entlang ϕ induziert einen Homomorphismus $f^* : U_{fib}(Z, X) \rightarrow U_{fib}(Y, X)$, $(\delta, \gamma) \mapsto (\delta\Gamma, F)$.

Inbesondere ist die durch die Pullback-Konstruktion 2.1.1 induzierte Abbildung

$$U_{fib}(X, Y) \times U_{fib}(Y, Z) \rightarrow U_{fib}(X, Z)$$

wohldefiniert und bilinear. Dies gibt uns die Komposition für $\tilde{\Omega}$, deren Objekte also aus G -Räumen vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe besteht und die Morphismengruppen $U_{fib}(X, Y)$ hat.

Wegen Punkt (1) der Eigenschaften von U_{fib} ist Ω die volle Unterkategorie, die durch die homogenen Räume G/H , $H \leq G$, erzeugt wird.

Wie gefordert, enthält $\tilde{\Omega}$ auch alle endlichen direkten Summen (als disjunkte Vereinigungen) und kartesische Produkte $X \times Y$ als Objekte.

Ist $G\text{-CW}$ die Kategorie der G -Räume vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe mit G -Abbildungen und üblicher Komposition sowie $G\text{-FAS}$ die Kategorie mit gleichen Objekten und faserweise schwach endlichen G -Faserungen, so erhalten wir Funktoren

$$(2.1.3) \quad \iota_* : G\text{-CW} \longrightarrow \tilde{\Omega} \quad \text{und} \quad \iota^* : G\text{-FAS} \longrightarrow \tilde{\Omega},$$

welche jeweils die Identität auf Objekten sind. Der kovariante Funktor ι_* ordnet einer G -Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ den Morphismus $[X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{\phi} Y]$ zu und der kontravariante Funktor ι^* bildet eine Faserung $f : X \rightarrow Z$ auf den Morphismus $[Z \xleftarrow{f} X \xrightarrow{1_X} X]$ ab. Beide überführen disjunkte Vereinigungen in direkte Summen in $\tilde{\Omega}$.

Damit ist die Induktionskategorie $\tilde{\Omega}$ eingeführt, und wir können mit der Untersuchung von Mackeyfunktoren beginnen, d.h. kontravariante additive Funktoren M auf $\tilde{\Omega}$ in die Kategorie der abelschen Gruppen ABEL. Diese bilden selbst wieder eine Kategorie, die wir mit $\text{MACK}(\tilde{\Omega})$ bezeichnen wollen.

Wir werden auch kontravariante additive Funktoren untersuchen, die zunächst nur auf Ω definiert sind und diese als Mackeyfunktoren auf Ω bezeichnen. Entsprechend erhalten wir eine Kategorie $\text{MACK}(\Omega)$ der Mackeyfunktoren über Ω .

Generell gilt: Einen kontravarianten additiven Funktor von einer der Induktionskategorien \mathcal{J} , $\tilde{\mathcal{J}}$, Ω , $\tilde{\Omega}$ bezeichnen wir als Mackeyfunktoren über der jeweiligen Kategorie. Wir wissen schon, dass sich Mackeyfunktoren über \mathcal{J} und $\tilde{\mathcal{J}}$ bijektiv entsprechen, und dass für eine endliche Gruppe $\Omega \cong \mathcal{J}$ gilt. Im Abschnitt 2.3 werden wir Erweiterungen von Mackeyfunktoren über Ω auf $\tilde{\Omega}$ betrachten und feststellen, dass dies nicht nur immer möglich ist, sondern dafür auch verschiedene Wege offenstehen.

2.1.2. Mackeyfunktoren über allgemeinen Ringen. Im Laufe der Untersuchungen ist es hilfreich und notwendig, auch Mackeyfunktoren über speziellen Ringen zu betrachten und nicht nur wie bisher über \mathbb{Z} . D.h., wir wollen dann additiven Funktoren in die Kategorie $R\text{-MOD}$ der Moduln über einem kommutativen Ring R mit Eins untersuchen.

Der Vorteil von Induktionskategorien ist es, dass man Kenntnisse über ihre Struktur dazu nutzen kann, um Aussagen über Mackeyfunktoren zu erhalten. Um dies auch für Mackeyfunktoren in die R -Moduln nutzen zu können, ist es sinnvoll, entsprechende R -Induktionskategorien $\tilde{\Omega}_R$ einzuführen, d.h. ein R -Mackeyfunktoren M faktorisiere wie

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} & \xrightarrow{M} & R\text{-MOD} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \tilde{\Omega}_R & \end{array}$$

über die R -Induktionskategorie. Diese Kategorie entsteht aus $\tilde{\Omega}$, indem wir die Morphismengruppen zu R -Moduln erweitern. Wir definieren dazu

$$\text{Mor}_{\tilde{\Omega}_R}(X, Y) = R \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Mor}_{\tilde{\Omega}}(X, Y)$$

fest und setzen die Kompositionsabbildungen R -bilinear darauf fort. Ein R -Mackeyfunktorkomplex, auch Mackeyfunktorkomplex über R genannt, ist dann ein kontravarianter, R -linearer Funktorkomplex $\tilde{\Omega}_R \rightarrow R\text{-MOD}$.

Bei denen in dieser Arbeit auftretenden Ringen werden wir uns ausschließlich auf Lokalisierungen $\mathbb{Z}_{(p)}$ von \mathbb{Z} an Primidealen (p) und \mathbb{Q} als $\mathbb{Z}_{(0)}$ beschränken.

2.1.3. Induktion und Restriktion. Zur Induktionskategorie $\tilde{\Omega}$ gehören die Funktoren ι_* und ι^* , vgl. (2.1.3). Die Komposition mit einem Mackeyfunktorkomplex M führt dann zu zwei Funktorkomplexen, der kovarianten Verkettung

$$M(?, 1) = M \circ \iota^* : G\text{-FAS} \longrightarrow \tilde{\Omega} \longrightarrow \text{ABEL}$$

und der kontravarianten Version

$$M(1, ?) = M \circ \iota_* : G\text{-CW} \longrightarrow \tilde{\Omega} \longrightarrow \text{ABEL}.$$

Den Wert von $M(1, ?)$ auf einer Faserung f bezeichnen wir auch als Induktion entlang f und notieren ihn durch $f_* = M(1, f)$, wenn die Übersicht dies ermöglicht. Analog schreiben wir auch ϕ^* für $M(\phi, 1)$, der Restriktion entlang ϕ .

2.2. Greenfunktoren

2.2.1. Paarungen und Greenfunktoren. Eine Paarung μ von Mackeyfunktorkomplexen M, N und L ist eine bilineare Abbildung $M \times N \rightarrow L$, d.h. eine natürliche Transformation bestehend aus bilinearen Abbildungen

$$\mu_X : M(X) \times N(X) \longrightarrow L(X), \quad (m, n) \longmapsto m \cdot n,$$

so dass für Objekte X, Y, Z und $(\phi, f) : X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{\phi} Y$, zu denen wir Induktion f_* und Restriktionen f^* sowie ϕ^* haben, folgende Axiome gelten:

$$\begin{aligned} \phi^*(m) \cdot \phi^*(n) &= \phi^*(m \cdot n), & \in L(Z), & \text{ mit } m \in M(Y), n \in N(Y), \\ f_*(m \cdot f^*(n)) &= f_*(m) \cdot n, & \in L(X), & \text{ mit } m \in M(Z), n \in N(X), \\ f_*(f^*(m) \cdot n) &= m \cdot f_*(n), & \in L(X), & \text{ mit } m \in M(X), n \in N(Z). \end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass die Induktion nur entlang G -Faserungen f definiert ist, womit es nicht sinnvoll wäre, auch die letzten beiden Axiome für beliebige G -Abbildungen ϕ zu fordern.

Ein Mackeyfunktorkomplex A mit einer Paarung $A \times A \rightarrow A$, die $A(X)$ zu einem Ring mit Einselement für alle Objekte X macht, heißt Greenfunktorkomplex. In diesem Fall impliziert die erste Zeile der Axiome in der Definition einer Paarung, dass Restriktion ein Ringhomomorphismus ist. Aus den zwei letzten Zeilen folgt, dass der Kern der Induktion ein zweiseitiges Ideal ist. Damit sind $\text{Bild}(f_*)$ und $\text{Kern}(f^*)$ beides Ideale in $A(X)$. Ein Greenfunktorkomplexhomomorphismus ist dann eine natürliche Transformation aus unitalen Ringhomomorphismen.

Zu einem Greenfunktoren A definiert man nun A -Moduln und A -Algebren. Erstere sind Mackeyfunktoren M mit einer Paarung $m : A \times M \rightarrow M$, so dass alle Werte von M an X $A(X)$ -Moduln sind. Zweitere sind Greenfunktoren A' , so dass für alle X nun $A'(X)$ eine $A(X)$ -Algebra ist.

Die Äquivalenz von Mackeyfunktoren über \mathcal{J} , $\tilde{\mathcal{J}}$ und Ω gelten entsprechend auch für Greenfunktoren. Was die Fortsetzung eines Greenfunktors über Ω auf $\tilde{\Omega}$ angeht, so gibt es letztlich nur noch eine natürliche Möglichkeit, wie wir später einsehen werden.

2.2.2. Universeller Greenfunktoren. Von weitreichender Bedeutung ist, dass jede der bisher betrachteten Induktionskategorien einen universellen Greenfunktoren U besitzt. Wir wollen hier jedoch nur $\tilde{\Omega}$ betrachten, da die Einschränkung des universellen Greenfunktors U auf die Unterkategorie Ω den universellen Greenfunktoren für Ω liefert; unmittelbar erhalten wir diesen dann auch für \mathcal{J} und $\tilde{\mathcal{J}}$.

Als Mackeyfunktoren erkennt man U am einfachsten als den Hom-Funktoren $\text{Mor}_{\tilde{\Omega}}(?, *)$. Um auch die Greenfunktorenstruktur zu erkennen, nutzt man folgende Feststellungen.

LEMMA 2.2.1. *Die auf Repräsentanten $(pr, f) : X \leftarrow Y \rightarrow *$ von Elementen in $\text{Mor}_{\tilde{\Omega}}(X, *)$ durch die Zuordnung $(pr, f) \mapsto (f, f)$ induzierte Abbildung*

$$\Delta_X : \text{Mor}_{\tilde{\Omega}}(X, *) \longrightarrow \text{Mor}_{\tilde{\Omega}}(X, X)$$

ist ein wohldefinierter injektiver Homomorphismus.

BEWEIS. Die Linearität und Wohldefiniertheit von Δ_X folgt unmittelbar aus den Additivitätsrelationen von $U_{fib}(X, *)$ und $U_{fib}(X, X)$. Die Injektivität folgt mit der Existenz der Retraktion $p_* : U_{fib}(X, X) \rightarrow U_{fib}(X, *)$ zu $p : X \rightarrow *$ gemäß Lemma 6.2.15. \square

Damit erzeugt die Diagonalabbildung

$$\Delta_X : G\text{-FAS} \longrightarrow \tilde{\Omega}, (f : Z \rightarrow X) \longmapsto ((f, f) : X \leftarrow Z \rightarrow X)$$

einen Unterring $U(X)$ des Endomorphismenrings von X . Wir wollen nun Elemente von $U(X)$ auch durch $[f]$ für (f, f) notieren.

Für Endomorphismen von X induziert ein Mackeyfunktoren einen natürlichen Homomorphismus

$$m_X : \text{Mor}_{\tilde{\Omega}}(X, X) \longrightarrow \text{Hom}(M(X), M(X)), (\beta, \alpha) \longmapsto M(\beta, \alpha)$$

und damit eine natürliche, bilineare Abbildung

$$\mu_X : U(X) \times M(X) \longrightarrow M(X), ([f], m) \longmapsto M(f, f)(m).$$

SATZ 2.2.2. *Die Abbildungen μ_X definieren für jeden Mackeyfunktoren M über $\tilde{\Omega}$ eine Paarung $\mu : U \times M \rightarrow M$. Diese macht U zu einem kommutativen Greenfunktoren und M zu einem linken U -Modul. Die durch μ_X induzierte Multiplikation auf $U(X)$ stimmt mit der durch die Komposition von Endomorphismen gegebenen überein.*

BEWEIS. (1) Die Zuordnung μ ist eine Paarung: Seien X, Y, Z Objekte und $\phi : X \rightarrow Z$ eine G -Abbildung sowie $[f] \in U(Z)$ mit $f : Y \rightarrow Z$. Die Quadrate

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\Phi} & W & \xrightarrow{\Phi} & X \\ \downarrow \phi & & \downarrow F & & \downarrow \phi \\ Z & \xleftarrow{f} & Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

seien Pullback-Diagramme, d.h. es gilt $\phi^*[f] = [\Phi]$ mit $\phi\Phi = fF$.

Damit können wir folgendes schließen

$$\begin{aligned} \phi^*\mu(f, m) &= M(\phi, 1)M(f, f)(m) = M(fF, \Phi)(m) = M(\phi\Phi, \Phi)(m) \\ &= M(\Phi, \Phi)\phi^*(m) = \mu([\Phi], \phi^*(m)) = \mu(\phi^*[f], \phi^*(m)) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \phi_*\mu(\phi^*[f], m) &= \phi_*(M(\Phi, \Phi)(m)) = M(1, \phi)M(\Phi, \Phi)(m) \\ &= M(\Phi, fF)(m) = M(f, f)\phi_*(m) = \mu([f], \phi_*(m)) \end{aligned}$$

und

$$\phi_*\mu([f], \phi^*(m)) = \phi_*(M(f, f)\phi^*(m)) = M(\phi f, \phi f)(m) = \mu(\phi_*[f], m).$$

(2) U ist Greenfunktor: Die Paarung μ auf $M = U$ angewandt induziert auf $U(X)$ für alle X eine kommutative, assoziative Multiplikation, da Pullback-Bildung kommutativ und transitiv ist. Diese Multiplikation stimmt mit der durch die Komposition induzierten überein, da beide durch die gleichen Pullback-Diagramme definiert sind. Offensichtlich gilt auch $\mu_X([1], [f]) = [f] = \mu_X([f], [1])$.

(3) U ist universell: Wegen der Funktorialität von M und der Tatsache $U(X) \subset \text{Mor}_{\bar{\Omega}}(X, X)$ ist die Operation $m_X : U(X) \rightarrow \text{Hom}(M(X), M(X))$ ein Ringhomomorphismus und damit M ein U -Modul. \square

SATZ 2.2.3. *Sei A ein Greenfunktor über $\tilde{\Omega}$. Dann gibt es genau einen unitalen Greenfunctorhomomorphismus $U \rightarrow A$. Der Morphismus an einem Objekt X ist der Ringhomomorphismus*

$$\varphi : U(X) \longrightarrow A(X), [f] \longmapsto f_*f^*(1).$$

BEWEIS. Die Verträglichkeit mit Restriktion und Induktion von U und A und der kanonischen U -Algebra Struktur von A ,

$$\varphi([f]) = \varphi(f_*f^*(1)) = f_*f^*\varphi(1),$$

erzwingt die Zuordnung an X als $[f] \longmapsto f_*f^*(a)$, für $\varphi(1) = a \in A(X)$. Da wir φ als unitalen Homomorphismus fordern, ist er durch

$$1 = \varphi[1] = 1_*1^*(a) = a$$

eindeutig bestimmt. \square

Der Satz besagt, dass in diesem Fall der universelle Greenfunktoren ein initiales Objekt in der Kategorie der Greenfunktoren ist. Das Bild ist selbst wieder ein Greenfunktoren B und A wird damit zu einer B -Algebra. Dies motiviert die Definition des Bildes als Basis-Greenfunktoren. Doch bevor wir dies präzisieren, wollen wir zunächst die erwähnten Fortsetzungen von Mackey- und Greenfunktoren über Ω auf $\tilde{\Omega}$ behandeln.

2.3. Erweiterung von Mackeyfunktoren und Greenfunktoren

Da wir durch $\tilde{\Omega}$ eine Erweiterung der Induktionskategorie Ω gefunden haben, doch unser eigentliches Interesse den Mackey- und Greenfunktoren gilt, wollen wir nun Funktoren über Ω auf $\tilde{\Omega}$ erweitern. Dazu werden wir uns allgemeiner kategorientheoretischen Methoden bedienen, nämlich der links- und rechtsseitigen Kan-Erweiterung.

2.3.1. Tensorprodukt von Funktoren. Sei M ein kovarianter und N ein kontravarianter Funktoren von einer additiven Kategorie \mathcal{C} , deren Isomorphieklassen von Objekten eine Menge bilden, in die Kategorie ABEL. Dann definieren wir das Tensorprodukt von M und N als

$$M \otimes_{\mathcal{C}} N = \bigoplus M(C) \otimes N(C) \Big/ f_*(m) \otimes_{\mathbb{Z}} n \sim m \otimes_{\mathbb{Z}} f^*(n),$$

wobei die Summe über ein vollständiges System von Repräsentanten C der Isomorphieklassen aller Objekte aus \mathcal{C} läuft und die Äquivalenzrelation nach allen Morphismen $f : C \rightarrow D$ und Elementen $n \in N(C)$ und $m \in M(D)$ gebildet wird.

2.3.2. hom von Funktoren. In \mathcal{C} bilden die additiven kontravarianten Funktoren nach ABEL mit den natürlichen Transformationen als Morphismen selbst wieder eine additive Kategorie, die Funktorkategorie \mathcal{F} . Damit gibt es auch auf \mathcal{F} entsprechende Hom-Funktoren

$$\text{hom}_M(?) = \text{Mor}_{\mathcal{F}}(M, ?) \text{ und } \text{hom}^M(?) = \text{Mor}_{\mathcal{F}}(? , M).$$

2.3.3. Erweiterung von Mackeyfunktoren. Als Unterkategorie definiert die Einschränkung von Funktoren über $\tilde{\Omega}$ auf Ω eine Funktoren

$$\mathcal{V} : \text{MACK}(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \text{MACK}(\Omega)$$

den Vergiss-Funktoren. Wir werden nun Links- und Rechtsadjungierte von \mathcal{V} studieren und diese zur Erweiterung von Mackeyfunktoren über Ω nutzen. Konkret realisiert werden diese durch Tensorprodukt und hom-Funktoren von Funktoren.

SATZ 2.3.1. *Sei M ein Mackeyfunktoren über Ω . Dann ist der durch das Tensorprodukt von Mackeyfunktoren an X definierte Funktoren*

$$\mathcal{L}M(X) = U_{\text{fib}}(X, -) \otimes_{\Omega} M(-)$$

ein Mackeyfunktoren über $\tilde{\Omega}$. Dies ist die linksseitige Kan-Erweiterung von M . Zudem ist $\mathcal{L} : \text{MACK}(\Omega) \rightarrow \text{MACK}(\tilde{\Omega})$ der Linksadjungierte zum Vergiss-Funktoren \mathcal{V} . Für einen Mackeyfunktoren über $\tilde{\Omega}$ gibt es einen kanonischen Homomorphismen $\mathcal{L}\mathcal{V}N \rightarrow N$.

BEWEIS. Das beschriebene Tensorprodukt von Funktoren wird in der Kategorientheorie als Koende bezeichnet. Die Konstruktion ist ein Limes und damit natürlich in beiden Variablen, was die Funktorialität von $\mathcal{L}M$ induziert.

Nach Mac Lane [Mac71, X] ist die linksseitige Kan-Erweiterung zum Vergiss-Funktor genau durch obigen Limes zu konstruieren. Die Adjungiertheit ist dann eine formale Konsequenz.

Die Auswertungsabbildung $U_{fib}(X, G/H) \otimes N(G/H) \rightarrow N(X)$ induziert eine wohldefinierte natürliche Abbildung

$$\mathcal{L}\mathcal{V}N(X) = U_{fib}(X, -) \otimes_{\Omega} N(-) \longrightarrow N(X).$$

Betrachten wir die volle Unterkategorie $\tilde{\Omega}_X$ von $\tilde{\Omega}$, die durch Ω und X erzeugt wird, dann induziert die Auswertung einen Isomorphismus

$$U_{fib}(X, -) \otimes_{\tilde{\Omega}_X} N(-) \longrightarrow N(X),$$

da Ω eine volle Unterkategorie von $\tilde{\Omega}_X$ ist. Damit induziert die Inklusion

$$\bigoplus U_{fib}(X, G/H) \otimes N(G/H) \longrightarrow U_{fib}(X, X) \otimes N(X) \oplus \bigoplus U_{fib}(X, G/H) \otimes N(G/H)$$

die gesuchte Abbildung

$$U_{fib}(X, -) \otimes_{\Omega} N(-) \longrightarrow U_{fib}(X, -) \otimes_{\tilde{\Omega}_X} N(-) \cong N(X).$$

□

SATZ 2.3.2. Sei M ein Mackeyfunktork über Ω . Dann ist der durch hom von Mackeyfunktoren definierte Funktor

$$\mathcal{R}M(X) = \text{hom}_{\tilde{\Omega}}^{U_{fib}}(M)$$

ein Mackeyfunktork über $\tilde{\Omega}$. Dies ist die rechtsseitige Kan-Erweiterung von M . Zudem ist $\mathcal{R} : \text{MACK}(\Omega) \rightarrow \text{MACK}(\tilde{\Omega})$ der Rechtsadjungierte zum Vergiss-Funktor \mathcal{V} . Für einen Mackeyfunktork über $\tilde{\Omega}$ gibt es einen kanonischen Homomorphismus $N \rightarrow \mathcal{R}N$.

BEWEIS. Dies ist der duale Fall von 2.3.1 und ebenso eine formale Konsequenz der rechtsseitigen Kan-Erweiterung.

Die Abbildung $N(X) \rightarrow \mathcal{R}N(X)$ wird durch

$$n \longmapsto (\eta_n : U_{fib}(G/H, X) \rightarrow N(G/H), (\beta, \alpha) \mapsto \alpha_*\beta^*(n))$$

gegeben. Mit dem Isomorphismus $N \cong \text{hom}_{\tilde{\Omega}}^{U_{fib}}(N)$ erkennen wir sie als die durch Einschränkung auf Ω induzierte Abbildung $\text{hom}_{\tilde{\Omega}}^{U_{fib}}(N) \rightarrow \text{hom}_{\Omega}^{U_{fib}}(N)$. □

Als nächstens wollen wir einsehen, dass eine Paarung $\mu : M \times N \rightarrow K$ über Ω eine Paarung auf den Erweiterungen

$$\tilde{\mu} : \mathcal{R}M \times \mathcal{R}N \rightarrow \mathcal{R}K$$

induziert.

Zuvor müssen wir jedoch klären, wie Induktion und Restriktion für diese Erweiterungen definiert sind. Sei $(1, f) : X \leftarrow Y \rightarrow Y$ und $(\delta, \gamma) \in U_{fib}(G/H, X)$ mit Pullback

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & Y \\ \Delta \downarrow & & \downarrow f \\ G/H & \xleftarrow{\gamma} & Z \xrightarrow{\delta} X, \end{array}$$

so haben wir dazu den Induktionshomomorphismus

$$f_* : \mathcal{R}M(Y) \longrightarrow \mathcal{R}M(X), \quad \eta \longmapsto f_*(\eta)$$

mit $f_*(\eta) : U_{fib}(G/H, X) \rightarrow M(G/H)$, $(\delta, \gamma) \mapsto (\eta(F, \gamma\Delta))$.

Ist $(\phi, 1) : X \leftarrow X \rightarrow U$ und wiederum $(\delta, \gamma) \in U_{fib}(G/H, X)$ mit

$$(\phi\delta, \gamma) : G/H \leftarrow Z \rightarrow X \rightarrow U,$$

so wird der Restriktionshomomorphismus durch

$$\phi^* : \mathcal{R}M(U) \longrightarrow \mathcal{R}M(X), \quad \zeta \longmapsto \phi^*(\zeta)$$

mit $\phi^*(\zeta)(G/H) : U_{fib}(G/H, X) \rightarrow M(G/H)$, $(\delta, \gamma) \mapsto \zeta(\phi\gamma, \delta)$ gegeben.

In Vorbereitung auf den Beweis des nächsten Satzes sei darauf hingewiesen, dass wir für $\eta \in \mathcal{R}M(G/L)$ und $\zeta \in \mathcal{R}N(G/L)$ wegen der Isomorphismen $\mathcal{R}M(G/L) \cong M(G/L)$ und $\mathcal{R}N(G/L) \cong N(G/L)$ schon eine Zuordnung

$$\mathcal{R}M(G/L) \times \mathcal{R}N(G/L) \longrightarrow \mathcal{R}K(G/L), \quad (\eta, \zeta) \longmapsto \mu(\eta, \zeta)$$

haben, die es nun gilt zu einer Paarung auf $\tilde{\Omega}$ fortzusetzen.

SATZ 2.3.3. *Sei $\mu : M \times N \rightarrow K$ eine Paarung von Mackeyfunktoren über Ω . Dann ist auf Basiselementen $(\beta, \alpha) : G/H \leftarrow G/L \rightarrow X$ von $U_{fib}(G/H, X) \cong U(G/H \times X)$ durch*

$$\tilde{\mu}(\eta, \zeta)(\beta, \alpha) = \alpha_*(\mu(\beta_1^*(\eta), \beta_2^*(\zeta)))$$

eine Paarung $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{R}M \times \mathcal{R}N \rightarrow \mathcal{R}K$ induziert. Dabei ist α_* die durch K gegebene Induktion und β_1^* die auf $\mathcal{R}M$, sowie β_2^* die auf $\mathcal{R}N$ bestimmte Restriktion entlang β .

BEWEIS. Da $\beta_1^*(\eta) \in \mathcal{R}M(G/L)$ und $\beta_2^*(\zeta) \in \mathcal{R}N(G/L)$ sind und damit ihr Produkt in $\mathcal{R}K(G/L)$ wohldefiniert ist, ist $\tilde{\mu}$ auch wohldefiniert. Die Natürlichkeit ergibt sich unmittelbar aus der Definition, so dass noch die Axiome einer Paarung nachzuweisen sind.

Sei wiederum $(\phi, 1) : X \leftarrow X \rightarrow U$ und $\eta \in \mathcal{R}M(U)$ sowie $\zeta \in \mathcal{R}N(U)$. Für ein Basiselement $(\beta, \alpha) : G/H \leftarrow G/L \rightarrow X$ erhalten wir wegen $(\phi\beta)^*(\eta) \in \mathcal{R}M(G/L)$ und $(\phi\beta)^* \in \mathcal{R}N(G/L)$ dann

$$\begin{aligned} \phi^*(\tilde{\mu}(\eta, \zeta))(\beta, \alpha) &= \tilde{\mu}(\eta, \zeta)(\phi\beta, \alpha) = \alpha_*(\mu((\phi\beta)^*(\eta), (\phi\beta)^*(\zeta))) \\ &= \alpha_*(\mu(\beta^*(\phi^*(\eta)), \beta^*(\phi^*(\zeta)))) = \tilde{\mu}(\phi^*(\eta), \phi^*(\zeta))(\beta, \alpha), \end{aligned}$$

was $\phi^*(\eta\zeta) = \phi^*(\eta)\phi^*(\zeta)$ zeigt.

Sei nun $(1, f) : X \leftarrow Y \rightarrow Y$ und $\eta \in \mathcal{R}M(Y)$ sowie $\zeta \in \mathcal{R}N(X)$. Zu dem Basiselement $(\beta, \alpha) : G/H \leftarrow G/L \rightarrow X$ erhalten wir dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & Y \\ B \downarrow & & \downarrow f \\ G/H & \xleftarrow{\alpha} G/L \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

und dazu die Induktion $f_*(\eta)(\beta, \alpha) = \eta(F, \alpha B)$. Mit der Zerlegung von (F, B) in eine Linearkombination der Basiselemente $(f_s, \beta_s) : G/l \leftarrow G/L_s \rightarrow Y$ in $U_{fib}(G/L, Y) \cong U(G/L \times Y)$ als

$$(F, B) = \sum_s n_s (f_s, \beta_s)$$

ist die Induktion $f_*(\eta)$ durch

$$f_*(\eta)(\beta, \alpha) = \eta(F, \alpha B) = \sum_s n_s \eta(f_s, \alpha \beta_s)$$

gegeben. Damit rechnet sich die Gleichheit $f_*(\eta f^*(\zeta)) = f_*(\eta)\zeta$ an (β, α) wie folgt nach:

$$\begin{aligned} f_*(\tilde{\mu}(\eta, f^*(\zeta)))(\beta, \alpha) &= \tilde{\mu}(\eta, f^*(\zeta))(F, \alpha B) \\ &= \sum_s n_s \tilde{\mu}(\eta, f^*(\zeta))(f_s, \alpha \beta_s) = \sum_s n_s (\alpha \beta_s)_* \mu(f_s^*(\eta), f_s^* f^*(\zeta)) \\ &= \sum_s n_s (\alpha \beta_s)_* \mu(f_s^*(\eta), \beta_s^* \beta^*(\zeta)) = \sum_s n_s \alpha_* \mu(\beta_{s*} f_s^*(\eta), \beta^*(\zeta)) \\ &= \alpha_* \mu(B_* F^*(\eta), \beta^*(\zeta)) = \alpha_* \mu(\beta^* f_*(\eta), \beta^*(\zeta)) = \tilde{\mu}(f_*(\eta), \zeta)(\beta, \alpha) \end{aligned}$$

Aus einer analogen Rechnung ebenso $f_*(f^*(\eta)\zeta) = \eta f_*(\zeta)$. \square

FOLGERUNG 2.3.4. *Sei A ein Greenfunktorkomplex über Ω und M ein A -Modul. Dann ist $\mathcal{R}A$ mit der in Satz 2.3.3 beschriebenen Paarung ein Greenfunktorkomplex über $\tilde{\Omega}$ und $\mathcal{R}M$ ein $\mathcal{R}A$ -Modul.*

2.4. Basis-Greenfunktorkomplex

Unter einem Basis-Greenfunktorkomplex verstehen wir einen Greenfunktorkomplex B , dessen eindeutiger Greenfunktorkomplexbomorphismus $U \rightarrow B$ in Satz 2.2.3 surjektiv ist, d.h. aus surjektiven Homomorphismen besteht. Nicht nur allgemeine Greenfunktorkomplexe führen zu Basis-Greenfunktorkomplexen, sondern jeder Mackeyfunktorkomplex M ist Modul über einem speziellen Basis-Greenfunktorkomplex M_Δ .

Die kanonische U -Modulstruktur eines Mackeyfunktorkomplexes M wird durch die Homomorphismen

$$m_X : U(X) \longrightarrow \text{Hom}(M(X), M(X)), [\gamma] \longmapsto (m \mapsto M(\gamma, \gamma)(m))$$

festgelegt. Dazu betrachten wir das größte U -Ideal I_M , so dass $I_M(X) \subset \text{Kern}(m_X)$ gilt. Wir können I_M angeben.

$$I_M(X) = \{[\gamma] \in U(X) \mid m_Y(\phi^*[\gamma]) = 0 \text{ für alle } \phi : Y \rightarrow X\}.$$

SATZ 2.4.1. I_M ist ein U -Modul, d.h. Ideal in U und somit U/I_M ein Basis-Greenfunktorkomplex.

BEWEIS. Die Einschränkung der Paarung $\mu : U \times U \rightarrow U$, $([\delta], [\gamma]) \mapsto [\delta][\gamma]$ auf I_M liefert zunächst eine Paarung $U \times I_M \rightarrow U$. Wir werden zeigen, dass diese auch eine Paarung mit $\mu' : U \times I_M \rightarrow I_M$ ist.

Als Einschränkung einer Paarung erfüllt μ' alle geforderten Gleichungen, bzw. Axiome in Definition 2.2 und ist wohldefiniert, wenn die Induktions- und Restriktionshomomorphismen wohldefiniert sind.

Nach der Definition von I_M gilt für $[\delta] \in U(X)$ und $[\gamma] \in I_M(X)$, sowie alle G -Abbildungen $\phi : Y \rightarrow X$

$$m_Y \phi^*([\delta][\gamma]) = m_Y(\phi^*[\delta]\phi^*[\gamma]) = m_Y(\phi^*[\delta])m_Y(\phi^*[\gamma]) = 0,$$

da $m_Y(\phi^*[\gamma]) = 0$. Dies zeigt zunächst, dass $I_M(X)$ ein Ideal in $U(X)$ ist und mit $\delta = 1$ folgt weiter, dass das Bild von $\phi^*(I_M(X))$ in $I_M(Y)$ enthalten ist. Damit ist die Restriktion $I_M(X) \rightarrow I_M(Y)$ wohldefiniert.

Es bleibt zu zeigen, dass für $[\gamma] \in I_M(Y)$, G -Faserungen $f : Y \rightarrow X$ und nun G -Abbildungen $\psi : Z \rightarrow X$

$$m_Z(\psi^*f_*[\gamma]) = 0$$

gilt, womit schließlich der Induktionshomomorphismus $f_* : I_M(Y) \rightarrow I_M(X)$ wohldefiniert ist.

(1) Wir betrachten zunächst den Fall für ψ als Identität. Dann gilt

$$m_X(f_*[\gamma]) = m_X([f\gamma]) = M(f\gamma, f\gamma) = f_*m_Y[\gamma]f^* = 0,$$

wobei f_* zuerst als Induktion von U auftritt und dann f_* und f^* als Induktion und Restriktion von M .

(2) Um auf den allgemeinen Fall zu schließen, nutzen wir die Pullback-Definition der Komposition in $\tilde{\Omega}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & & \\ & & \swarrow F & \searrow \Psi & \\ & Z & & & X \\ & \swarrow 1 & \searrow \psi & \swarrow f & \searrow 1 \\ Z & & & X & & Y \end{array}$$

und erhalten damit $\psi^*f_* = F_*\Psi^*$ sowie $m_Z(\psi^*f_*[\gamma]) = m_Z(F_*\Psi^*[\gamma])$. Nun ist $\Psi^*[\gamma] \in I_M(\tilde{X})$ und nach (1) aber $m_Z(F_*\Psi^*[\gamma]) = 0$; folglich auch $f_*[\gamma] \in I_M(X)$.

Da U ein kommutativer Greenfunktorkomplex ist, sind alle Ideale zweiseitig und der Quotient ist wieder ein Greenfunktorkomplex. D.h. U/I_M ist wohldefiniert und nach Konstruktion ein kommutativer Basis-Greenfunktorkomplex. \square

Den Quotienten U/I_M notieren wir mit M_Δ und beziehen uns auf ihn als Diagonal-Endomorphismenfunktorkomplex. Wie wir schon die Elemente des universellen Greenfunktorkomplexes U

mit $[\gamma]$ notiert haben, werden wir es für Basis-Greenfunktoren B gleich tun. So schreiben wir $B[\gamma]$ für das Bild von $[\gamma]$ in B , bzw. $M_\Delta[\gamma]$, falls $B = M_\Delta$ gilt.

Wir wollen nun auf den Restriktionshomomorphismus ϕ_Δ^* entlang $\phi : Y \rightarrow X$ und Induktionshomomorphismus f_*^Δ von M_Δ entlang $f : Y \rightarrow X$ eingehen. Mittels der Repräsentanten sind sie durch die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_\Delta(X) & \xrightarrow{\mu_X} & M_\Delta(X) \\ \phi^* \downarrow & & \downarrow \phi_\Delta^* \\ U_\Delta(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & M_\Delta(Y) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} U_\Delta(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & M_\Delta(Y) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_*^\Delta \\ U_\Delta(X) & \xrightarrow{\mu_X} & M_\Delta(X) \end{array}$$

als

$$\phi_\Delta^* : M_\Delta[\gamma] \mapsto M_\Delta(\phi^*[\gamma]) \quad \text{und} \quad f_*^\Delta : M_\Delta[\delta] \mapsto M_\Delta(f_*[\delta])$$

festgelegt.

Wir wissen schon, dass ϕ_Δ^* und f_*^Δ wohldefiniert sind und sich auch die Paarung von U auf M_Δ vererbt:

$$\mu_\Delta : (M_\Delta[\gamma], M_\Delta[\delta]) \mapsto M_\Delta([\gamma][\delta]).$$

Durch unsere Definition von M_Δ haben wir die Homomorphismen m_X in Kompositionen

$$m_X : U(X) \longrightarrow M_\Delta(X) \longrightarrow \text{Hom}(M(X), M(X))$$

zerlegt. D.h. $M_\Delta[\gamma]$ induziert den Morphismus $M(\gamma, \gamma)$, was, analog zu U , eine kanonische M_Δ -Modulstruktur auf M induziert. Damit erhalten wir

SATZ 2.4.2. *Sei M ein Mackeyfunktork und A ein Greenfunktork. Dann ist M ein M_Δ -Modul und A eine A_Δ -Algebra.*

BEWEIS. Als eine natürliche Faktorisierung von $U(X) \rightarrow \text{Hom}(M(X), M(X))$ definiert $M_\Delta(X) \rightarrow \text{Hom}(M(X), M(X))$ eine bilineare Abbildung $M_\Delta(X) \times M(X) \rightarrow M(X)$. Wegen der Natürlichkeit ist dies eine Paarung und macht M zu einem M_Δ -Modul. Der Fall für A folgt analog. \square

LEMMA 2.4.3. *Ist A ein Greenfunktork, so ist A_Δ natürlich isomorph zu dem Bild der kanonischen Abbildung $\varphi : U \rightarrow A$, $[\gamma] \mapsto A(\gamma, \gamma)(1)$.*

BEWEIS. Wir haben das kommutative Diagramm von Greenfunktoren

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\psi} & A_\Delta \\ & \searrow \varphi & \downarrow \Phi \\ & & A, \end{array}$$

mit $\Phi(A_\Delta[\gamma]) = A(\gamma, \gamma)(1)$, so dass U und A_Δ das gleiche Bild in A haben. Da sowohl die Restriktion ϕ^* von A für alle $\phi : Y \rightarrow X$ als auch Φ Ringhomomorphismen sind, gilt

$$\begin{aligned} \text{Kern}(\varphi) &= I_A(X) \\ &= \{[\gamma] \mid m_Y(\phi^*[\gamma]) = 0, \text{ für alle } \phi\} \\ &= \{[\gamma] \mid m_Y(\phi^*(A(\gamma, \gamma)(1))) = 0, \text{ für alle } \phi\} \\ &= \{[\gamma] \mid m_X(A(\gamma, \gamma)(1)) = 0\} \\ &= \text{Kern}(\psi). \end{aligned}$$

Woraus die Behauptung folgt. \square

FOLGERUNG 2.4.4. *Die Zuordnung $A \mapsto A_\Delta$ ist ein kovarianter Funktor von den Greenfunktoren in die Basis-Greenfunktoren.*

BEWEIS. Sei $\varphi : A \rightarrow A'$ ein Greenfunktorphomomorphismus, so ist nach Lemma 2.4.3 der induzierte Homomorphismus $\varphi_\Delta : A_\Delta \rightarrow A'_\Delta$ gerade die Einschränkung $\varphi|_{A_\Delta}$. \square

FOLGERUNG 2.4.5. *Sei B ein Basis-Greenfunktorkomplex. Dann ist B kanonisch isomorph zu B_Δ , insbesondere gilt $M_\Delta \cong (M_\Delta)_\Delta$.*

SATZ 2.4.6. *Sei A ein Greenfunktorkomplex und M ein linker A -Modul. Dann ist M_Δ eine linke A_Δ -Algebra.*

BEWEIS. Es gibt für alle X ein kommutatives Diagramm aus Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} U(X) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ A_\Delta(X) & \longrightarrow & M_\Delta(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(X) & \longrightarrow & \text{Hom}(M(X), M(X)), \end{array}$$

in dem alle Abbildungen, außer denen nach $\text{Hom}(M(X), M(X))$, Bestandteile von Greenfunktorphomomorphismen sind.

Dazu zeigen wir, dass die kanonische Abbildung $\Phi : A_\Delta \rightarrow M_\Delta$, $A_\Delta[\gamma] \mapsto M_\Delta[\gamma]$ wohldefiniert ist. Betrachten wir also $[\gamma] \in I_A$, was nach Definition $A_\Delta[\gamma] = 0$ impliziert. Nach Lemma 2.4.3 gilt

$$A(\gamma, \gamma)(1) = 0$$

und somit auch

$$M(\gamma, \gamma) = m(A(\gamma, \gamma)(1)) = 0.$$

Als Homomorphismus gilt folglich für alle $\phi : X \rightarrow Y$

$$m(\phi^*[\gamma]) = m(\phi^*(A_\Delta[\gamma])) = m(\phi^*(0)) = 0,$$

so dass $[\gamma]$ in I_M liegt. D.h. Φ ist wohldefiniert und macht M_Δ vermöge des Isomorphismus aus Folgerung 2.4.5 zu einer A_Δ -Algebra. \square

2.4.1. Erweiterung von Basis-Greenfunktoren. Zu einem Mackeyfunktor M über Ω gibt es den Diagonal-Endomorphismenfunktor M_Δ , ein Basis-Greenfunktor über Ω . Mit der rechtseitigen Kan-Erweiterung $\mathcal{R}M$ von M erhalten wir noch weitere Greenfunktoren dazu. Zu $\mathcal{R}M$ haben wir den Diagonal-Endomorphismenfunktor $(\mathcal{R}M)_\Delta$ von $\tilde{\Omega}$. Zu M_Δ gibt es die Erweiterung $\mathcal{R}(M_\Delta) = \mathcal{R}M_\Delta$ und den zugehörigen Basis-Greenfunktor $(\mathcal{R}M_\Delta)_\Delta$. All diese hängen wie folgt zusammen.

SATZ 2.4.7. *Es gibt Greenfunktorhomomorphismen*

$$(\mathcal{R}M)_\Delta \longrightarrow (\mathcal{R}M_\Delta)_\Delta \longrightarrow \mathcal{R}M_\Delta,$$

wobei die erste Abbildung surjektiv und die zweite Zuordnung injektiv ist.

BEWEIS. Die Erweiterung $\mathcal{R}M_\Delta$ ist ein Greenfunktor, und damit ist die kanonische Abbildung $(\mathcal{R}M_\Delta)_\Delta \rightarrow \mathcal{R}M_\Delta$ injektiv. Die beiden Basis-Greenfunktoren $(\mathcal{R}M)_\Delta$ und $(\mathcal{R}M_\Delta)_\Delta$ haben in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_{fib} & \longrightarrow & (\mathcal{R}M)_\Delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{R}M_\Delta)_\Delta & \longrightarrow & \mathcal{R}M_\Delta \end{array}$$

das gleiche Bild. Folglich gibt es die gesuchte surjektive Abbildung. □

Induktionstheorie und Basis-Greenfunktoren

Im letzten Kapitel führten wir die Induktionskategorie $\tilde{\Omega}$ und Mackeyfunktoren ein, sowie Greenfunktoren und die spezielle Variante dieser, die Basis-Greenfunktoren. Die Induktionskategorie kennen wir über verschiedenen kommutativen Ringen und unter dem Symbol Ω als Einschränkung auf die volle Unterkategorie mit homogenen Räumen als Objekte. Wir haben gesehen, dass Mackey- und Greenfunktoren über Ω geeignet auf $\tilde{\Omega}$ fortsetzbar sind. Daher ließen sich die Untersuchungen von Mackeyfunktoren über Ω gleichsam über $\tilde{\Omega}$ abhandeln; jedoch sind weite Teile der Theorie auch unabhängig über Ω formulierbar.

3.1. Induktionstheorie

Ziel der hier beschriebenen Induktionstheorie ist es, Bedingungen anzugeben, unter denen der Wert eines Mackeyfunktors M an dem terminalen Objekt $G/G = *$ das Bild eines surjektiven Induktionshomomorphismus $\bigoplus_i M(X_i) \rightarrow M(*)$ ist. Im besonderen Interesse liegt der Spezialfall, bei dem $M(*)$ ein direkter Summand von $M(X)$ ist.

Wie bereits erwähnt, gehen erste Aussagen dieser Art auf Artin und Brauer zurück. Systematische Studien dieser Fragen stammen von Dress [**Dre73**], Thevenaz und Webb [**TW95**] und für kompakte Lie-Gruppen auch von tom Dieck [**tD87**].

Da wir die Begriffe und Ergebnisse dieses Abschnitts auch für Mackeyfunktoren über $\mathbb{Z}_{(p)}$ und $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(0)}$ benötigen, gilt einige Unterschiede von $\tilde{\Omega}$ und $\tilde{\Omega}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ im Auge zu behalten.

Ein für uns dabei wesentlicher Unterschied zwischen $\tilde{\Omega}$ und $\tilde{\Omega}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ liegt darin, dass ein Morphismus in $\tilde{\Omega}$ immer durch Diagramm $[X \leftarrow E \rightarrow Y]$ repräsentiert wird, jedoch nicht so in $\tilde{\Omega}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$. Wir hatten die Morphismen dieser Kategorie zu $\mathbb{Z}_{(p)}$ -Moduln erweitert und die Komposition entsprechend bilinear fortgesetzt. Daher ist ein allgemeiner Morphismus nun mehr nur noch eine formale Linearkombination der durch Diagramme repräsentierbaren Morphismen. Dies gilt es stets zu bedenken. Um diesen Sachverhalt gerecht zu werden, führen wir folgende Notation ein.

Ein durch ein Diagramm $X \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{\phi} Z$ repräsentierten Morphismus notieren wir auch weiter hin mit (ϕ, f) . Dabei reservieren wir π_j für die Projektion $X_j \rightarrow *$, $f_j : Y_j \rightarrow X_i$ für faserweise schwach-endliche Faserung und $\phi_j : Y_j \rightarrow Z_i$ für G -Abbildungen. Ein Linearkombination $\sum_j n_j(\phi_j, f_j) \in \text{Mor}_{\tilde{\Omega}_R}(X_i, Z_i)$ symbolisieren wir durch $(\phi, f)_i$, entsprechend

$$M(\phi, f)_i = \sum_j n_j M(\phi_j, f_j) = M\left(\sum_j n_j(\phi_j, f_j)\right).$$

Wir wollen nun folgende Terminologie festlegen. Eine Menge von Objekten $\mathcal{X} = \{X_i\}, i \in I$, nennen wir Induktionsmenge.

- Ist der Induktionshomomorphismus $\pi_* = ((\pi_i)_*)_{i \in I} : \bigoplus_i M(X_i) \rightarrow M(*)$ surjektiv, so heißt M \mathcal{X} -surjektiv.
- Ist M \mathcal{X} -surjektiv und gibt es zu π_* einen Spalthomomorphismus $s : M(*) \rightarrow \bigoplus_i M(X_i)$ mit $\pi_* s = 1_{M(*)}$, so nennen wir M \mathcal{X} -projektiv.
- Ist M \mathcal{X} -projektiv und besteht der Spalthomomorphismus s in Komponenten aus Homomorphismen $M(\pi, f)_i : M(*) \rightarrow M(X_i)$ im Bild von M , so heißt M explizit \mathcal{X} -projektiv.

Dual dazu definieren wir:

- Ist der Restriktionshomomorphismus $\pi^* = (\pi_i^*)_{i \in I} : M(*) \rightarrow \prod_i M(X_i)$ spaltend injektiv, so heißt M \mathcal{X} -injektiv.
- Ist der Spalthomomorphismus ein Produkt von Homomorphismen im Bild von M , so heißt M explizit \mathcal{X} -injektiv.

Entsprechend nennen wir eine Induktionsmenge \mathcal{X} für M (explizit) surjektiv (bzw. projektiv, injektiv), wenn M (explizit) \mathcal{X} -surjektiv (bzw. projektiv, injektiv) ist.

Wir sagen auch, für M gilt ein Induktionssatz bezüglich der Induktionsmenge \mathcal{X} , wenn M \mathcal{X} -projektiv ist.

Besonderes Augenmerk erfordert die Überlegung über die Endlichkeit solcher Induktionsmengen. Zunächst gibt es hierzu keinerlei Forderungen. Wir werden aber bald einsehen, dass sich in vielen Fällen die Endlichkeit solcher Induktionsmengen folgern läßt. Wiederum sind manche Ergebnisse auch nur für endliche Induktionsmengen zu erhalten. Über $\tilde{\Omega}$ haben wir in diesen Fällen dann einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{X_i \in \mathcal{X}} M(X_i) \xrightarrow{\cong} M(\bigsqcup X_i).$$

Es sei daran erinnert, dass für Ω nur homogene Räume G/H als Elemente von Induktionsmengen zulässig sind.

LEMMA 3.1.1. *Ist $\mathcal{X} = \{G/H\}$ eine Induktionsmenge aus homogenen Räumen und M ein explizit \mathcal{X} -projektiver, resp. explizit \mathcal{X} -injektiver Mackeyfunktors über $\tilde{\Omega}$, so ist die Einschränkung $\mathcal{V}M$ von M auf Ω ebenso explizit \mathcal{X} -projektiv, resp. explizit \mathcal{X} -injektiv.*

BEWEIS. Beide Aussagen folgen unmittelbar, da Ω eine volle Unterkategorie von $\tilde{\Omega}$ ist. \square

LEMMA 3.1.2. *Sei $\mathcal{X} = \{X_i\}, i \in I$, eine Induktionsmenge aus Objekten in $\tilde{\Omega}$ und weiter M ein (explizit) \mathcal{X} -projektiver Mackeyfunktors über $\tilde{\Omega}$. Dann existiert eine Induktionsmenge \mathcal{Y} aus homogenen Räumen und eine Faktorisierung*

$$\bigoplus_{i \in I} M(X_i) \longrightarrow \bigoplus_{G/H \in \mathcal{Y}} M(G/H) \longrightarrow M(*)$$

mit Morphismen im Bild von M , so dass auch M (explizit) \mathcal{Y} -projektiv ist.

BEWEIS. Der Beweis nutzt die Isomorphie $U_{fib}(*, X_i) \cong U(* \times X_i)$ für Objekte X_i .

Die Induktionsmenge \mathcal{Y} ist die disjunkte Vereinigung von \mathcal{Y}_i . Ein \mathcal{Y}_i ergibt sich aus der Basisdarstellung $[* \leftarrow X_i \rightarrow X_i] = \sum n_H[* \leftarrow G/H \xrightarrow{\alpha_H} X_i]$ in der Standardbasis von $U(* \times X_i)$ und \mathcal{Y}_i besteht aus allen G/H mit nicht verschwindendem Koeffizienten n_H . Wendet man nun M auf die Linearkombinationen

$$\sum n_H[* \leftarrow G/H \rightarrow G/H] \circ [G/H \leftarrow G/H \rightarrow X_i]$$

an, erhält man die angekündigte Faktorisierung

$$\bigoplus_{i \in I} M(X_i) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{G/H \in \mathcal{Y}_i} M(G/H) \longrightarrow M(*).$$

Komponiert man den ursprünglichen Spalthomomorphismus s mit dem linken Homomorphismus in obiger Zeile, so erhält man auch den noch ausstehenden Spalt. Offensichtlich ist diese explizit, wenn s auch ein expliziter Spalthomomorphismus ist, d.h aus dem Bild von M stammt. \square

LEMMA 3.1.3. *Sei M ein Mackeyfunktork und \mathcal{X} eine Induktionsmenge. Dann gilt*

- (1) *Ist M explizit \mathcal{X} -projektiv, so ist M auch explizit \mathcal{X} injektiv.*
- (2) *Ist M explizit \mathcal{X} -injektiv und besteht der Spalthomomorphismus s aus Komponenten $M(f, \pi)_i$ mit G -Faserungen f_j aus G -FAS, so ist M auch explizit \mathcal{X} -injektiv.*

Ist \mathcal{X} eine Induktionsmenge aus homogenen Räumen, so ist (2) immer erfüllt. Insbesondere sind Mackeyfunktoren über Ω genau dann explizite \mathcal{X} -projektiv, wenn sie explizite \mathcal{X} -injektiv sind.

BEWEIS. (1) Sei das Bild von $(\pi, f)_i \in \text{Mor}_{\bar{\Omega}}(X_i, *)$ unter M eine Komponente des Spalthomomorphismus s . Dann gilt für die durch Diagramme repräsentierten Morphismen in $\sum_j n_j(\pi_j, f_j) = (\pi, f)_i$

$$(\pi_i)_* M(f_j, \pi_j) = M(\pi_i f_j, \pi_j) = M(\pi_j, \pi_j) = M(\pi_j, \pi_i f_j) = M(\pi_j, f_j) \pi_i^* = 1_{M(*)},$$

was sich ebenso auch auf $M(f, \pi)_i$, bzw $M(\pi, f)_i$ und damit auf s fortsetzt. Damit ist auch M explizit \mathcal{X} -injektiv mit Spalthomomorphismuskomponenten $M(f, \pi)_i$.

(2) Folgt unter den angegebenen Voraussetzungen analog. \square

Wie im vorangehenden Beweis genutzt, lässt sich der Spalthomomorphismus für einen explizit \mathcal{X} -projektiven Mackeyfunktork M in Induktions- und Restriktionshomomorphismen zerlegen, so dass die Identität von $M(*)$ in Komponenten ein Komposition von

$$M(*) \xrightarrow{\pi^*} M(X_i) \xrightarrow{f_j^*} \bigoplus_{j \in J} M(Y_j) \xrightarrow{(n_j \cdot)} \bigoplus_{j \in J} M(Y_j) \xrightarrow{(f_j)^*} M(X_i) \xrightarrow{\pi_*} M(*),$$

ist.

Bemerkenswert ist auch, dass nur die Existenz von nicht trivialen Morphismen $Y_j \rightarrow X_i$ in $\tilde{\Omega}$ relevant ist und der Beweis damit unabhängig von der Auswahl bestimmter Morphismen f_j gilt. Dies lässt sich wie folgt präzisieren.

LEMMA 3.1.4. *Sei M Mackeyfunktorktor über $\tilde{\Omega}$ und $\mathcal{X} = \{Y_j\}$ eine Induktionsmenge mit*

$$\sum_j n_j M_\Delta[\pi_j] = M_\Delta[1_*]$$

in $M_\Delta()$. Dann ist M explizit \mathcal{X} -injektiv und explizit \mathcal{X} -projektiv.*

BEWEIS. Für $M(*)$ ist $1_{M(*)} = M_\Delta[1] = \sum_j n_j M_\Delta[\pi_j] = \sum_j n_j (\pi_j)_* \circ \pi_j^*$ und damit gleich der Komposition

$$M(*) \xrightarrow{\sum_j n_j \pi_j^*} \bigoplus_j M(Y_j) \xrightarrow{\sum_j (\pi_j)_*} M(*),$$

bzw.

$$M(*) \xrightarrow{\sum_j \pi_j^*} \bigoplus_j M(Y_j) \xrightarrow{\sum_j n_j (\pi_j)_*} M(*) .$$

□

Dies ist ein Zugang, um mit Hilfe von Basis-Greenfunktoren Induktionssätze zu beweisen. Eine Linearkombination der Morphismen $\pi_j : Y_j \rightarrow *$ repräsentiert ein Element des universellen Greenfunktors $U(*)$ im Urbild der Eins von $U(*) \rightarrow M_\Delta(*)$. Alle Elemente in diesem Urbild (im Falle von Ω nur die, die auch Morphismen repräsentieren) liefern somit explizite Induktionsmengen und wir erhalten mit obigem Lemma einen Induktionssatz.

3.1.1. A -Modul Theorem. Sei $\mathcal{X} = \{X_i\}$, $i \in I$, eine Induktionsmenge. Das nächste Theorem besagt, dass für einen \mathcal{X} -surjektiven Greenfunktorktor alle Moduln sowohl \mathcal{X} -projektiv als auch \mathcal{X} -injektiv sind.

THEOREM 3.1.5. *Sei A ein Greenfunktorktor. Ist $\pi_* := ((\pi_i)_*)_{i \in I} : \bigoplus_i A(X_i) \rightarrow A(*)$ surjektiv und Z ein Objekt in $\tilde{\Omega}$. Dann gilt für alle A -Moduln M*

- (1) *die Abbildung $P_* := ((\pi_i \times 1_Z)_*)_{i \in I} : \bigoplus_i M(X_i \times Z) \rightarrow M(Z)$ ist spaltend surjektiv.*
- (2) *die Abbildung $P^* := ((\pi_i \times 1_Z)^*)_{i \in I} : M(Z) \rightarrow \prod_i M(X_i \times Z)$ ist spaltend injektiv.*

*Betrachtet man M nur über Ω , so gilt dies in Ermangelung allgemeiner Objekte und ihrer kartesischen Produkte nur für X_i als homogene Räume und $Z = *$.*

BEWEIS. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_i A(X_i) & \xrightarrow{Q^*} & \bigoplus_i A(X_i \times Z) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow P_* \\ A(*) & \xrightarrow{q^*} & A(Z). \end{array}$$

Da π_* surjektiv ist, gibt es ein Element e' im Urbildbereich der Eins von $A(*)$. Sei $e := Q^*(e')$. Da Restriktion ein Ringhomomorphismus ist, gilt $q^*(1) = 1$. Auch gilt $P_*(e) = 1$ wegen der Kommutativität des Diagramms.

(1) Wir geben eine spaltende Abbildung s zu $P_* : \bigoplus_i M(X_i \times Z) \rightarrow M(Z)$ an. Definiere dazu

$$s : M(Z) \longrightarrow \bigoplus_i M(X_i \times Z), \quad m \longmapsto e \cdot P^*(m).$$

Dann gilt $P_*(\pi(m)) = P_*(e \cdot P^*(m)) = P_*(e) \cdot m = 1 \cdot m = m$. Es sei bemerkt, dass π zu nächst in das Produkt der $M(X_i \times Z)$ abbildet. Da aber $e = (e_1, \dots, e_i, \dots)$ aus $\bigoplus_i A(X_i \times Z)$ ist, sind nur endlich viele e_i ungleich 0 und damit liegt das Bild von s in der direkten Summe.

(2) Dual definieren wir s' zu $P^* : M(Z) \rightarrow \prod_i M(X_i \times Z)$ durch

$$s' : \prod_i M(X_i \times Z) \longrightarrow M(Z), \quad m \longmapsto P_*(e \cdot m),$$

und damit folgt dann $s'(P^*(m)) = P_*(e \cdot P^*(m)) = P_*(e) \cdot m = 1 \cdot m = m$.

Damit haben wir die gesuchten Spaltabbildungen angegeben. \square

Das Theorem besagt also, dass für einen \mathcal{X} -surjektiven Greenfunktors A alle Moduln \mathcal{X} -injektiv und \mathcal{X} -projektiv sind; insbesondere A selbst. Auch entnimmt man dem Beweis, dass \mathcal{X} eine endliche Induktionsmenge \mathcal{F}' enthält, so dass es ebenso für \mathcal{X}' gilt. Die Elemente von \mathcal{X}' sind nämlich genau die X_i mit nicht verschwindendem Beitrag zu e' .

In welchen Fällen man auch explizit \mathcal{X} -injektiv und \mathcal{X} -projektiv folgern kann, halten wir nun fest.

FOLGERUNG 3.1.6. *Wirkt $e' = \sum_i e'_i$ in dem obigen Beweis als $M(\phi, f)_i$, d.h.*

$$M(\phi, f)_i : M(X_i) \longrightarrow M(X_i), \quad m \longmapsto e'_i \cdot m,$$

so ist M explizit \mathcal{X} -projektiv und explizit \mathcal{X} -injektiv.

Dies ist insbesondere dann immer der Fall, wenn A ein Basis-Greenfunktors ist.

BEWEIS. Wirkt e'_i als Endomorphismus $M(\phi, f)_i$ auf $M(X_i)$, so ist

$$\begin{aligned} (3.1.1) \quad e' \cdot \pi^* &= \sum_i e'_i \cdot \pi^* = \sum_i M(\phi, f)_i \circ M(\pi_i, 1) \\ &= \sum_i M((\pi_i, 1) \circ (\phi, f)_i) = \sum_i M(\pi\phi, f)_i = \sum_i M(\pi, f)_i \end{aligned}$$

ein expliziter Spalthomomorphismus. Analog verhält es sich für $m \mapsto \pi_*(e' \cdot m)$.

Ist A ein Basis-Greenfunktors, so wird jedes Element in einem $A(X_i)$ vermöge des kanonischen Homomorphismus $a : U \rightarrow A$ durch Linearkombinationen von Diagrammen $(\delta_j, \delta_j) : X_i \leftarrow Y_j \rightarrow X_i$ repräsentiert. Nach Konstruktion operiert dann

$$\sum_j n_j a(\delta_j, \delta_j) = (\delta, \delta)_i = e'_i$$

wie gefordert als $M(\delta, \delta)_i : M(X_i) \longrightarrow M(X_i)$. \square

BEMERKUNG 3.1.7. *Die Injektivität von $M(*) \rightarrow \bigoplus_i M(X_i)$ impliziert jedoch nicht notwendig die \mathcal{X} -Surjektivität von M , auch nicht für Greenfunktoren.*

Ein Gegenbeispiel ist der (komplexe) Darstellungsringsring $R(G)$ einer endlichen Gruppe G . Auch wenn der konkrete Kontext selbstverständlich ist, sei zur vollständigen Einbindung in den formalen Rahmen als Greenfunktoren auf das nächste Kapitel verwiesen.

Nur das Nötigste an dieser Stelle. Wir betrachten den Greenfunktoren R über Ω , der dort durch $R(G/H) := R(H)$ auf den Objekten G/H erklärt ist. Induktion sowie Restriktion sind die üblichen der Darstellungstheorie.

Da Darstellungen durch ihre Charaktere bestimmt sind, ist die Restriktionsabbildung auf die Summe aller Darstellungsringsringe von zyklischen Untergruppen injektiv. Doch nicht jede Darstellung (= Element im Darstellungsringsring) lässt sich als induzierte Darstellung von zyklischen Untergruppen gewinnen. Damit ist R nicht \mathcal{X} -surjektiv.

3.1.2. M_Δ -Theorem. Wir zeigen nun, dass man die Untersuchung von M auf explizite \mathcal{X} -Projektivität auf M_Δ reduzieren kann. Dazu betrachten wir effektive Moduln über einem Basis-Greenfunktoren M_Δ .

Ein Mackeyfunktoren M heißt effektiv, wenn die durch die Anwendung von M induzierte Abbildungen

$$m_X : M_\Delta(X) \rightarrow \text{Hom}(M(X), M(X)), (\phi, f) \mapsto M(\phi, f)$$

für alle Objekte X injektiv sind. Da wir M_Δ an X als $U(X)/I_M(X)$ definiert hatten (vgl. Satz 2.4.1), ist dies gleichbedeutend mit $I_M(X) = \text{Kern}(m_X)$.

LEMMA 3.1.8. *Sei M ein Mackeyfunktoren und M_Δ \mathcal{X} -surjektiv. Dann ist M_Δ explizit \mathcal{X} -projektiv und damit auch alle M_Δ -Moduln N , insbesondere M .*

BEWEIS. Dies ist genau die Aussage von Theorem 3.1.5 mit Folgerung 3.1.6. □

Auch eine umgekehrte Implikation ist möglich. Da in Theorem 3.1.5 immer eine endliche Induktionsmenge in \mathcal{X} existiert, ist es nötig, wenn eine Umkehrung gelten soll, dies nun zur Voraussetzung zu machen.

THEOREM 3.1.9. *Sei M ein effektiver M_Δ -Modul und \mathcal{X} eine endliche Induktionsmenge. So ist M genau dann explizit \mathcal{X} -projektiv, wenn M_Δ explizit \mathcal{X} -projektiv ist.*

BEWEIS. Da M ein M_Δ -Modul ist, gilt die eine Richtung nach voranstehendem Lemma. Wegen Theorem 3.1.5 reicht es, in umgekehrter Richtung nur die Surjektivität von $\bigoplus_i M_\Delta(X_i) \rightarrow M_\Delta(*)$ zu zeigen.

So sei M als explizit \mathcal{X} -projektiv angenommen, d.h. $\pi_* : \bigoplus_i M(X_i) \rightarrow M(*)$ ist surjektiv und hat einem expliziten Spalthomomorphismus $\sum_i M(\pi, f)_i$,

$$\sum_i \pi_* M(\pi, f)_i = \sum_i M(\pi, \pi f)_i = \sum_i M(\pi, \pi)_i = 1_{M(*)},$$

mit Komponenten $M(\pi, f)_i = \sum_j n_j M(\pi_j, f_j)$ sowie $(\pi_j, f_j) : X_i \leftarrow Y_j \rightarrow *$. Betrachten wir den Induktionshomomorphismus π_*^Δ von M_Δ

$$\pi_*^\Delta : \bigoplus_i M_\Delta(X_i) \longrightarrow M_\Delta(*), \quad M_\Delta[\gamma]_i \longmapsto M_\Delta[\pi\gamma]_i,$$

so ist, wegen der Injektivität von $m_X : M_\Delta(X) \rightarrow \text{Hom}(M(X), M(X))$, die Zuordnung

$$M(\gamma, \gamma) \longmapsto \pi_*^\Delta(M(\gamma, \gamma)) = \pi_* \circ M(\gamma, \gamma) \circ \pi^*$$

wohldefiniert.

Da das Bild der Induktion ein Ideal ist, reicht es zu zeigen, dass das Eins-Element, die Identität in $M_\Delta(*)$ im Bild von π_*^Δ enthalten ist. Ein Urbild ist dann aber mit

$$\sum_i M_\Delta(f)_i = \sum_i M(f, f)_i$$

gegeben, denn

$$\pi_*^\Delta(M_\Delta(f)_i) = \pi_* \circ M(f, f)_i \circ \pi^* = M(\pi, \pi)_i,$$

und damit $\pi_*^\Delta(\sum_i M_\Delta(f)_i) = \sum_i M(\pi, \pi)_i = 1_{M(*)}$. \square

FOLGERUNG 3.1.10. *Sei A ein \mathcal{X} -surjektiver Greenfunktorkomplex und M ein explizit \mathcal{X} -projektiver A -Modul. Dann ist M_Δ eine explizit \mathcal{X} -projektive A_Δ -Algebra.*

Gibt es einen Greenfunktorkomplex A , der M zu einem A -Modul macht und obendrein explizit \mathcal{X} -projektiv ist, so ist dies $A = M_\Delta$.

3.2. Idempotente und Basis-Greenfunktoren

Wie wir schon gesehen haben, gibt es genau einen Greenfunktorkomplexhomomorphismus $U \rightarrow A$ zwischen dem universellen Greenfunktorkomplex U und einem Greenfunktorkomplex A . Für Basis-Greenfunktoren folgt daraus noch mehr. Es gibt höchstens einen Greenfunktorkomplexhomomorphismus $B \rightarrow B'$ zwischen Basis-Greenfunktoren B und B' , da dieser immer mit

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \downarrow & \searrow & \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

verträglich ist.

Die Existenz von Morphismen zwischen Basis-Greenfunktoren definiert eine partielle Ordnung auf der Menge der Basis-Greenfunktoren und damit indirekt auch auf Mackeyfunktoren. Ist B ein Basis-Greenfunktorkomplex und M ein Mackeyfunktorkomplex, so ist M genau dann ein B -Modul, wenn es einen Greenfunktorkomplexhomomorphismus $B \rightarrow M_\Delta$ gibt. Dies hat einen umfangreichen Einfluss auf Induktionssätze.

LEMMA 3.2.1. *Sei $\mathcal{X} = \{X_i\}$ eine Induktionsmenge und B, B' Basis-Greenfunktoren mit $B \rightarrow B'$. Ist dann B explizit \mathcal{X} -projektiv, so auch B' .*

BEWEIS. Da B explizit \mathcal{X} -projektiv ist, ist $\bigoplus_i B(X_i) \rightarrow B(*)$ surjektiv; ebenso auch $B(*) \rightarrow B'(*)$. Da aber $B \rightarrow B'$ ein Greenfunktorkomorphismus ist, kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_i B(X_i) & \longrightarrow & B(*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_i B'(X_i) & \longrightarrow & B'(*) \end{array}$$

Der untere Homomorphismus ist surjektiv und nach Theorem 3.1.5 ist B' explizit \mathcal{X} -projektiv. \square

Spezielle Basis-Greenfunktoren entstehen aus den idempotenten Elementen des universellen Greenfunktors $U(*)$. Ist $e \in U(*)$ ein idempotentes Element, gilt also $e = e^2$, dann definiert die durch $\pi_i : X_i \rightarrow *$ induzierte Restriktion $\pi_i^* : U(*) \rightarrow U(X_i)$ das Idempotente $\pi_i^*(e) \in U(X_i)$, das wir mit e_i bezeichnen werden. Jedes dieser Idempotenten liefert durch die Multiplikation $U(X_i) \rightarrow U(X_i)$, $x \mapsto e_i \cdot x$ eine Projektion, die nach Konstruktion mit Induktion und Restriktion verträglich ist. Das Bild dieser Homomorphismen wird damit zu einem Basis-Greenfunktorkomplex, den wir durch U_e notieren.

Zum terminalen Objekt $* = G/G$ haben wir $U(G/G) = U_G$, dessen Elemente durch Linearkombinationen von Morphismen $\pi_i : X_i \rightarrow *$ repräsentiert werden, letztlich durch Objekten X_i .

SATZ 3.2.2. *Sei $e \in U(*)$ ein idempotentes Element, das durch die Linearkombination $\sum_i n_i[X_i]$ repräsentiert wird und $\mathcal{X} = \{X_i\}$ die dazugehörige Induktionsmenge. Dann ist U_e explizit \mathcal{X} -projektiv.*

BEWEIS. Ein Basis-Greenfunktorkomplex B ist explizit \mathcal{X} -projektiv, wenn die Identität von $B(*)$ im Bildbereich des Induktionshomomorphismus $B(X) \rightarrow B(*)$ liegt. So wird die Identität von $U(X_i)$ durch $1_i : X_i \rightarrow X_i$ repräsentiert und eine Linearkombination $\sum_i n_i[X_i \xleftarrow{1_i} X_i \xrightarrow{1_i} X_i]$ hat unter der Induktion das Bild $\sum_i n_i[* \xleftarrow{\pi_i} X_i \xrightarrow{\pi_i} *] = e$, was wiederum genau dem Einselement in $U_e(*)$ entspricht. Aus der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_i U(X_i) & \longrightarrow & U(*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_i U_e(X_i) & \longrightarrow & U_e(*) \end{array}$$

folgt, dass $\sum_i n_i e_i$ in $\bigoplus_i U_e(X_i)$ auf e abgebildet wird. \square

Explizite Induktionssätze

Nachdem wir uns Erweiterungen der Induktionskategorie Ω und der Mackeyfunktoren verschafft haben und die Grundüberlegung der Induktionstheorie kennen gelernt haben, befassen wir uns nun mit der Ausarbeitung expliziter Induktionssätze. Dabei zeigen wir, wie man im konkreten Fall einer kompakten Lie-Gruppe G mit Hilfe der bisher entwickelten Methoden und einem intensiven Studium des universellen Greenfunktors und speziell dem Eulerring $U_G = U(G/G)$ zu expliziten Induktionssätzen gelangt. Da U_G fundamental für alle beschriebenen Induktionskategorien ist, sind die folgenden Ergebnisse sowohl für Ω , als auch für $\tilde{\Omega}$ relevant. In diesem Abschnitt ist es notwendig den jeweiligen Grundring $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}$ oder \mathbb{Q} im Auge zu behalten, da dieser erheblichen Einfluss auf die Struktur von $R \otimes_{\mathbb{Z}} U_G$ hat.

4.1. Der Burnsidering

Viele grundlegende Erkenntnisse von denen hier nur berichtet werden wird, sind im Detail in [tD87, IV.1-6] zu finden. Da wir im Folgenden genauer auf die Primidealstruktur des Eulerrings eingehen werden, ist es von nun an nötig, präzise zwischen den Grundringen zu unterscheiden. Soweit nichts bemerkt ist, sei der Grundring $R = \mathbb{Z}$.

Unter einer Familie \mathcal{F} von Untergruppen $H \leq G$ verstehen wir eine Menge von Untergruppen, die mit $H \in \mathcal{F}$ auch alle Untergruppen $K \leq H$ und dazu konjugierte Gruppen $gKg^{-1}, g \in G$, enthält. Sie ist Teilmenge des Untergruppenverbandes $\mathcal{S}G$. Die Metrik einer Lie-Gruppe induziert eine Metrik, die Hausdorffmetrik d , auf dem Raum der abgeschlossenen Teilmengen. Insbesondere gilt dies für den Untergruppenverband, was ihn, wegen der Kompaktheit von G , zu einem kompakten topologischen Raum macht.

Die Konjugation ist eine stetige Operation auf $\mathcal{S}G$ mit Orbitraum ΓG , dem Raum der Konjugationsklassen von Untergruppen in G . Er ist kompakt und vollkommen unzusammenhängend. So definiert jede Familie \mathcal{F} von Untergruppen auch eine Familie in ΓG . Da sie sich bijektiv entsprechen, werden wir diese im Folgenden auch mit \mathcal{F} notieren.

Manchmal ist es sinnvoll, einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{S}G$ zu betrachten: Den Raum der Untergruppen mit endlichen Weyl-Gruppen. Dessen Orbitraum bezeichnen wir mit ΦG . Bedeutende Eigenschaften dieser Räume werden durch folgendes Lemma beschrieben.

- LEMMA 4.1.1. (1) Für jede Untergruppe H gibt es $\epsilon > 0$, so dass für alle K mit $d(K, H) < \epsilon$ gilt: $(K) \leq (H)$.
- (2) Sei $(H) = \lim(H_n)$ in ΓG . Dann gibt es ein n_0 und Untergruppen K_n von H , so dass $(H_n) = (K_n)$ für alle n mit $n > n_0$ gilt.
- (3) Sei $H = \lim H_n$ und X ein G -Raum X mit endlichem Orbittyp. Dann gilt $X^{H_n} = X^H$ für fast alle n .

FOLGERUNG 4.1.2. *Sei $S \subset \Gamma G$ eine kompakte Teilmenge. Dann enthält S nur endlich viele maximale Elemente bezüglich der durch Subkonjugation induzierten partiellen Ordnung auf ΓG .*

BEWEIS. Zu jeder Untergruppe H finden wir ein $\epsilon_H > 0$, so dass alle Untergruppen K von G mit $d(K, H) < \epsilon_H$ subkonjugiert zu H sind. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf ΓG . Überdecken wir nun S mit den offenen Kugeln $U_{(H)} = \{(K) \mid d(K, H) < \epsilon_H\}$. Wegen der Kompaktheit von S reichen endlich viele zur vollständigen Überdeckung aus, weswegen es nur endlich viele maximale Klassen geben kann. \square

FOLGERUNG 4.1.3. *Sei $\mathcal{F} \subset \Gamma G$ eine kompakte Familie. Dann ist \mathcal{F} offen und abgeschlossen.*

BEWEIS. Wir wissen, dass \mathcal{F} nur endlich viele maximale Elemente H_i , $i = 1 \dots n$, enthält. Damit ist \mathcal{F} die endliche Vereinigung von $\mathcal{F}(H_i) = \{(K) \mid (K) \leq (H_i)\}$. Nun ist $\mathcal{F}(H_i)$ das Bild der natürlichen und nach [Gre98] offenen und abgeschlossenen Abbildung $\Gamma H_i \rightarrow \Gamma G$. Damit ist auch \mathcal{F} offen und abgeschlossen. \square

Da ein endlicher G -Komplex auch endlichen Orbittyp hat, ist die Funktion $\Gamma G \rightarrow \mathbb{Z}$, $(H) \mapsto \chi(X^H)$ für endliche G -CW Komplex X stetig, wenn \mathbb{Z} die diskrete Topologie trägt. Somit definiert dies eine Abbildung ϕ des ganzzahligen Eulerrings U_G in den Ring $C(\Gamma G, \mathbb{Z})$ der stetigen Funktionen von ΓG in den diskreten topologischen Raum \mathbb{Z} .

Umgekehrt gibt es zu jeder Untergruppe H einen Ringhomomorphismus $\phi_H : U_G \rightarrow \mathbb{Z}$, der auf einem Repräsentanten X eines Elementes im Eulerring durch die Zuordnung $X \mapsto \chi(X^H)$ definiert ist. Jeder Homomorphismus $U_G \rightarrow \mathbb{Z}$ entsteht mit geeignetem H durch solch einen Homomorphismus. Insbesondere ist

$$\phi' : U_G \longrightarrow C(\Gamma G, \mathbb{Z}), [X] \longmapsto ((H) \mapsto \chi(X^H))$$

ein Ringhomomorphismus. Der Kern dieser Abbildung besteht aus dem Nilradikal N_G , welches als Untergruppe von den Basiselementen $[G/H]$ mit nicht endlichen Weylgruppen WH erzeugt wird. Der Faktorring U_G/N_G ist der Burnside-Ring \mathcal{A}_G . Dieser ist demnach als abelsche Gruppe frei über ΦG , d.h. es gibt eine Inklusion $\phi : \mathcal{A}_G \rightarrow C(\Phi G, \mathbb{Z})$, welche genauso wie ϕ' ein Ringhomomorphismus ist.

4.1.1. Idempotente im Eulerring. Aus den bisherigen Ergebnissen leiten wir nun einige einfache Informationen über Idempotente in U_G her. Idempotente Elemente eines Rings R entsprechen genau den offenen und abgeschlossenen Mengen im Primidealspektrum $\text{Spec}(R)$. Ist N das Nilradikal von R , so sind die Spektren von R und R/N kanonisch homöomorph. D.h. die idempotenten Elemente von U_G und \mathcal{A}_G entsprechen sich bijektiv. Durch die Inklusion $\mathcal{A}_G \rightarrow C(\Phi G, \mathbb{Z})$ sehen wir, dass für ein Idempotentes $[X] \in \mathcal{A}_G$ immer $\phi(X)(H) = \chi(X^H) \in \{0, 1\}$ gilt. Weiter liefert diese Inklusion eine stetige, abgeschlossene und surjektive Abbildung der Spektren

$$\Phi G \times \text{Spec}(\mathbb{Z}) = \text{Spec}(C(\Phi G, \mathbb{Z})) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{A}_G),$$

wobei $((H), p)$ auf das Primideal $q(H, p) = \phi_H^{-1}((p))$ abgebildet wird, siehe Proposition 5.7.10 [tD79]. Gleiches erhält man für den lokalen Fall ($\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$), wir haben

$$\Phi G \times \text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \text{Spec}(C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})) \cong \text{Spec}(C(\Phi G, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$$

und

$$\text{Spec}(C(\Phi G, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G)$$

als stetige, abgeschlossene und surjektive Abbildung. Da die Ordnung der Weylgruppen WH für alle $(H) \in \Phi G$ beschränkt ist, ist diese Abbildung für fast alle Primzahlen p ein Isomorphismus.

4.1.2. Idempotente und Familien. Zu einer Familie $\mathcal{F} \subset \Gamma G$ betrachten wir nun die Menge $E(\mathcal{F})$ der Idempotenten $e \in \mathbb{Z}_{(p)} \otimes U_G$, so dass $\mathcal{F}_e = \{(H) \in \Gamma G \mid \phi'(e)(H) = 1\}$ eine kompakte (und offene) Familie ist, die \mathcal{F} enthält. Diese ist nicht leer, da sicherlich $1 \in E(\mathcal{F})$. Mit $e, e' \in E(\mathcal{F})$ liegt auch ee' in $E(\mathcal{F})$ und es gilt $\mathcal{F}_{ee'} \subset \mathcal{F}_e$. Nummerieren wir nun diese Elemente und notieren sie mit $e_0 = 1, e_1, e_2, \dots$. Damit können wir absteigende Kette

$$\Gamma G = \mathcal{F}_{e_0} \supseteq \mathcal{F}_{e_1} \supseteq \mathcal{F}_{e_1 e_2} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}_{e_1 \dots e_n} \supseteq \dots$$

bilden. Wegen Folgerung 4.1.2 und der absteigenden Kettenbedingung kompakter Lie-Gruppen ist diese Folge nach endlich vielen Schritten stationär. Letztlich erhalten wir eine kleinste offene und abgeschlossene Familie \mathcal{F}_{e_p} und dazu ein Idempotentes $e_p \in \mathbb{Z}_{(p)} \otimes U_G$ mit

$$\phi'(e_p)(H) = \begin{cases} 1, & \text{für } H \in \mathcal{F}_{e_p} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Familie wollen wir auch mit \mathcal{F}_p notieren. Zusammengefasst erhalten wir also zu einer kompakten Familie \mathcal{F} und jeder Primzahl p eine kompakte und offene Familie $\mathcal{F}_p = \{(H)\}$ und damit ein Idempotentes e_p in $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes U_G$. Die Familie \mathcal{F}_p enthält nach Folgerung 4.1.2 nur endlich viele maximale Untergruppen. Für diese gilt

LEMMA 4.1.4. *Die maximalen Untergruppen in \mathcal{F}_p treten in der Basisdarstellung $\sum n_i [G/K_i]$ von e_p als maximale G/K_i mit nichttrivialen Koeffizienten auf.*

BEWEIS. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Maximalität der betrachteten Untergruppen. \square

FOLGERUNG 4.1.5. *Für die Untergruppen in der Basisdarstellung von e_p gilt $(K_i) \in \mathcal{F}_p$.*

BEWEIS. Da nach 4.1.4 die maximalen (K_i) in \mathcal{F}_p enthalten sind und \mathcal{F}_p als Familie auch alle Untergruppen enthält, liegen auch die nicht-maximalen (K_i) in \mathcal{F}_p . \square

Wir hatten schon erwähnt, dass die Ordnungen der endlichen Weylgruppen WH für $(H) \in \Phi G$ beschränkt sind. Dies hat eine wesentliche Konsequenz für die auftretenden Familien \mathcal{F}_p .

LEMMA 4.1.6. *Es gibt eine Familie $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, so dass für fast alle Primzahlen p*

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}_p$$

gilt.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Ringhomomorphismus $\phi : \mathcal{A}_G \rightarrow C(\Phi G, \mathbb{Z})$. In Proposition (4.14) [tD87, IV.4] wird gezeigt, dass $\mathcal{B} = \{x_H = |WH|^{-1}\phi(G/H) \mid (H) \in \Phi G\}$ eine Basis von $C(\Phi G, \mathbb{Z})$ ist. Damit ist \mathcal{B} auch eine $\mathbb{Z}_{(p)}$ -Basis des $\mathbb{Z}_{(p)}$ -Moduls $C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})$. Sei nun n das größte gemeinsame Vielfache aller $|WH|$, $(H) \in \Phi G$. Für eine Primzahl p mit $(p, n) = 1$ sind dann alle $|WH|$ in $\mathbb{Z}_{(p)}$ für $(H) \in \Phi G$ invertierbar. Damit können wir $|WH|^{-1}[G/H]$ auch als ein Element in $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G$ auffassen und erkennen, dass die durch ϕ induzierte Abbildung $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G \rightarrow C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})$ nicht nur injektiv, sondern auch surjektiv ist.

Sind $(K) \leq (K') \in \Gamma G$, so dass K normal in K und K'/K ein Torus ist, so gilt für einen G -Raum X jeweils $\chi(X^K) = \chi(X^{K'})$. Zu $(K) \in \Gamma G$ mit nicht endlicher Weylgruppe WK gibt es ein eindeutiges $(K') \in \Phi G$ und eine, nicht notwendig eindeutige, Kette

$$K = K_0 < K_1 < \dots < K_r = K',$$

so dass K_{n+1}/K_n ein Torus ist, vgl. [Gre98]. Sei nun \mathcal{F}' die Familie, die entsteht, wenn man \mathcal{F} um alle Klassen (L) mit $L < K'$ für $(K) \in \mathcal{F}$ ergänzt.

Sei nun e das Idempotente in $C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})$, das durch

$$e(H) = \begin{cases} 1, & \text{für } H \in \mathcal{F}' \cap \Phi G \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert ist und \tilde{e}_p dessen Urbild vermöge ϕ . Dazu gibt es dann das Idempotente $e_p \in U_p$. Nach Konstruktion gilt $\phi'(e_p)(H) = 1$ für $(H) \in \mathcal{F}$, ebenso gilt nach Konstruktion für alle Idempotente e_i mit dieser Eigenschaft $\phi'(e)(H) = 1$ für $(H) \in \mathcal{F}'$. Daraus folgt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_p$ und die Notation e_p für das zugehörige Idempotente ist gerechtfertigt.

Nun ist die Definition von \mathcal{F}' unabhängig von p . Damit folgt für alle Primzahlen p mit $(p, n) = 1$ die Behauptung $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_p$. \square

Damit treten letztlich in $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_p \mathcal{F}_p$ nur endlichviele verschiedene Familien \mathcal{F}_p auf, so dass dies eine kompakte und bezüglich Subkonjugation abgeschlossene Familie ist. Wir notieren hierzu \mathcal{X}_∞ als Induktionsmenge $\{G/H \mid (H) \in \mathcal{F}_\infty\}$.

4.2. Induktionssätze

Abschnitt 3.2 behandelt den Zusammenhang von Idempotenten und Induktionssätzen. Wir beginnen mit einer fest gewählten kompakten Familie \mathcal{F} . Zu jeder Primzahl p erhalten wir wie beschrieben die Familie \mathcal{F}_p und das Idempotente e_p . Zu diesem gibt es wiederum den p -lokalen Basis-Greenfunktoren $U_{e_p} \subset U_p = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes U$. Die direkte Anwendung von Satz 3.2.2 liefert nun schon ein erstes Ergebnis.

Vorher benötigen wir noch folgende Überlegungen. Sei $\mathcal{X} = \{G/K \mid (K) \in \mathcal{F}\}$, da \mathcal{F} nur endlich viele maximale Elemente $(H_0), \dots, (H_t)$ enthält, ist $X = \{G/H_1, \dots, G/H_t\} \subset \mathcal{X}$

und es gilt die disjunkte Vereinigung $X = \bigsqcup_{(H_i) \in \mathcal{F}_m} G/H_i$ als ein Objekt in $\tilde{\Omega}$, das wir ebenso mit X notieren. Dann gilt

LEMMA 4.2.1. *Ein Mackeyfunktorkomplex M ist genau dann (explizit) \mathcal{X} -projektiv, wenn er (explizit) X -projektiv ist.*

BEWEIS. Wegen $\bigoplus_{i=0}^t M(G/H_i) \cong M(X)$ ist die eine Richtung trivial. Die andere Richtung folgt, da jede Untergruppe $K \in \mathcal{F}$ auch eine Untergruppe in einer maximalen in $(H_0), \dots, (H_t)$ ist, d.h. es folgt aus der Transitivität der Induktion die Existenz eines $i(K) \in \{1, \dots, t\}$ mit

$$M(G/K) \longrightarrow M(G/H_{i(K)}) \longrightarrow M(G/G)$$

und somit

$$\bigoplus_{(K) \in \mathcal{F}} M(G/K) \longrightarrow \bigoplus_{(K) \in \mathcal{F}} M(G/H_{i(K)}) \xrightarrow{\pi_*} M(G/G).$$

Zunächst mag die mittlere Summe unendlich viele Summanden haben, doch die Additivität von M gestattet uns, diese auf $\bigoplus_{i=1}^t M(G/H_i)$ zu reduzieren. Dies ist möglich, da für alle Summanden mit $i(K) = i = I(K')$ auch alle Abbildungen $\pi_* : M(G/H_i) \rightarrow M(G/G)$ identisch sind.

Ist also $\sum x_i^K$ aus dem Urbild von π_* , wobei mit x_i^K aus einem $M(G/H_{i(K)})$ und $i(K) = i$ sei, so gilt

$$\pi_*\left(\sum_{i,(K)} x_i^K\right) = \sum_{i,(K)} \pi_*(x_i^K) = \sum_i \pi_*\left(\sum_{(K)} x_i^K\right),$$

wobei die innere Summe des letzten Terms als Element von $M(G/H_i)$ aufgefasst werden kann. Damit ist nun auch $M(X) \rightarrow M(G/G)$ als surjektiv erkannt.

Für etwaige Spalthomomorphismen liefert die entsprechende Komposition mit

$$\bigoplus_{(K) \in \mathcal{F}} M(G/K) \longrightarrow \bigoplus_{(K) \in \mathcal{F}} M(G/H_{i(K)}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^t M(G/H_i)$$

den gesuchten Spalt. Die letzte Abbildung ist, wie schon erwähnt, einfach die Addition in $\bigoplus_{i(K)=i} M(G/H_{i(K)}) \rightarrow M(G/H_i)$ für alle i . \square

SATZ 4.2.2. *Sei $\sum_i n_i [G/K_i]$ die Basisdarstellung von $e_p \in U_p$ und B ein Basis-Greenfunktorkomplex mit kanonischem Homomorphismus $b : U \rightarrow B$. Gilt nach Lokalisierung an p dann $b(e_p) = 1$, so ist die $B_p = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes B$ explizit $\mathcal{X}_{\mathcal{F}_p}$ -projektiv.*

BEWEIS. Wir nutzen das letzte Lemma. Sei $X = \bigsqcup G/K_i$ und $\pi : X \rightarrow *$. Wir zeigen, dass B explizit X -projektiv ist. Gilt $b(e_p) = 1$ in $B_p(*)$, so auch

$$b(\pi^*(e_p)) = \pi^*(b(e_p)) = \pi^*(1) = 1.$$

Nun ist $b(1 - e_p) = 1 - b(e_p) = 0$, womit der Basis-Greenfunktorkomplex U_{1-e_p} im Kern des Homomorphismus $b : U_p \rightarrow B_p$ liegt, so dass wir eine Faktorisierung $U_{e_p} \rightarrow B_p$ erhalten und die Behauptung mit Satz 3.2.2 und Lemma 3.2.1 folgt. \square

THEOREM 4.2.3. Sei B ein Basis-Greenfunktorkomplex und $B(*) \rightarrow B_{\mathbb{Q}}(*)$ injektiv. Weiter sei e_p das Idempotente zu \mathcal{F}_p sowie \mathcal{X}_{∞} die Induktionsmenge der zu $\mathcal{F}_{\infty} = \bigcup_p \mathcal{F}_p$. Faktorisiert dann der kanonische Homomorphismus $U_p \rightarrow B_p$ gemäß

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{\quad} & B_p \\ & \searrow & \nearrow \\ & U_{e_p} & \end{array}$$

über U_{e_p} , so ist B explizit \mathcal{X}_{∞} projektiv.

BEWEIS. Wegen Satz 4.2.2 wissen wir, dass der Induktionshomomorphismus

$$\pi_* : \bigoplus_{(H) \in \mathcal{X}_{\infty}} B_p(G/H) \rightarrow B_p(*)$$

für alle Primzahlen p surjektiv ist. Ein allgemeines Resultat der Algebra gibt nun an, dass dann der Homomorphismus π_* auch schon vor dem Lokalisieren surjektiv war. Wir werden dieses aber auch gleich konkret zeigen, in dem wir ein Urbild der Eins direkt konstruieren.

Nach Theorem 3.1.5 und der speziellen Forderung 3.1.6 für Basis-Greenfunktoren belegen, dass B auch explizit \mathcal{X}_{∞} -projektiv ist. \square

Wie versprochen wollen wir nun angeben, wie man explizit einen expliziten Spalthomomorphismus zur Induktion

$$\pi_* : \bigoplus_{(H) \in \mathcal{X}_{\infty}} B(G/H) \rightarrow B(*)$$

erhält. Es ist genau der in Theorem 3.1.5 als $e \cdot \pi_*$ angegebene, mit einem $e \in \bigoplus_{\mathcal{X}_{\infty}} B(G/H)$, so dass $\pi_*(e) = 1 \in B(*)$. Damit ist lediglich das Element e zu konstruieren.

Da $\pi_* : \bigoplus_{\mathcal{X}_{\infty}} B_p(G/H) \rightarrow B_p(*)$ für alle Primzahlen p surjektiv sind, finden wir dazu jeweils ein Urbild y_p der Eins, d.h. $\pi_*(y_p) = 1 \in B_p(*)$. Zu y_p gibt Untergruppen H_i , $i = 1, \dots, r$, und $y_p(i) \in B_p(G/H_i)$ mit

$$y_p = \sum_{i=1}^r y_p(i).$$

In $B_p(G/H_i)$ können wir das Element $y_p(i)$ als Linearkombination $\sum_{j=1}^s n_p(i, j) y_p(i, j)$ mit $n_p(i, j) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ und $y_p(i, j) \in B_p(G/H_i)$ schreiben. Zusammen erhalten wir also

$$y_p = \sum_i y_p(i) = \sum_{i, j} n_p(i, j) y_p(i, j).$$

Als Element in $\mathbb{Z}_{(p)}$ lässt sich $n_p(i, j)$ durch $\frac{a_p(i, j)}{b_p(i, j)}$ mit $a_p(i, j), b_p(i, j) \in \mathbb{Z}$ und $(p, b_p(i, j)) = 1$ schreiben. Sei $m_p \in \mathbb{Z}$ das kleinste gemeinsame Vielfache dieser $b_p(i, j)$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$.

Damit hat

$$m_p y_p = \sum_{i, j} m_p n_p(i, j) y_p(i, j)$$

ganzahlige Koeffizienten $m_p n_p(i, j)$, d.h. $m_p y_p \in \bigoplus_{i=1}^r B(G/H_i)$ und $\pi_*(m_p y_p) = m_p \cdot 1 \in B(*)$. Hierbei geht ein, dass $B(*) \rightarrow B_p(*)$ injektiv ist, da $B(*) \rightarrow B_{\mathbb{Q}}(*)$ als injektiv vorausgesetzt war.

Ist $m_p = q_1^{e_1} \cdots q_t^{e_t}$ die Primfaktorzerlegung von m_p , so tritt p nach Konstruktion nicht als eine der q_k auf. Analog zu m_p erhalten wir entsprechende m_{q_k} zu den Primzahlen q_k , $k = 1, \dots, t$. Mit $p = q_0$ gilt nun

$$(m_{q_0}, m_{q_1}, \dots, m_{q_t}) = 1,$$

d.h. es gibt $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\lambda_0 m_{q_0} + \lambda_1 m_{q_1} + \cdots + \lambda_t m_{q_t} = 1.$$

Betrachten wir nun $e = \sum_k \lambda_k m_{q_k} y_{q_k}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi_*(e) &= \sum_k \lambda_k \pi_*(m_{q_k} y_{q_k}) = \sum_k \lambda_k m_{q_k} \cdot 1 \\ &= (\lambda_0 m_{q_0} + \lambda_1 m_{q_1} + \cdots + \lambda_t m_{q_t}) \cdot 1 = 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

und wir haben damit das gesuchte Urbild der Eins gefunden, da $\lambda_k m_{q_k} y_{q_k}$ nach Konstruktion in der Basisdarstellung ganzzahlige Koeffizienten hat.

Unsere bisherigen Überlegungen gestatten uns nun folgende Strategie einen Induktionssatz eines Machyfunktors M zu gewinnen.

Zunächst gilt es zum zugehörigen Basis-Greenfunktor $M_{\Delta} = B$ über zu gehen. Dann bestimmt man eine Familie \mathcal{F} mit einer Inklusion

$$\pi^* : B(*) \longrightarrow \prod_{(H) \in \mathcal{F}} B(G/H).$$

Der schwierigste Teil dabei ist sicherlich ein minimales \mathcal{F} zu finden. Unter geeigneten Bedingungen erhält sich die Inklusion nach Lokalisierung an (p) , z.B. wenn $B \rightarrow B_{\mathbb{Q}}$ injektiv ist. Dann bleibt auch

$$\pi_* : B_p(*) \longrightarrow \prod_{(H) \in \mathcal{F}_p} B_p(G/H)$$

injektiv. Wir erhalten zunächst also das äußere Quadrat in folgendem Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} U_p(*) & \xrightarrow{\quad} & \prod_{\mathcal{F}_p} U_p(G/H) \\ & \searrow & \downarrow \\ & U_{e_p}(*) & \xrightarrow{\subset} \prod_{\mathcal{F}_p} U_{e_p}(G/H) \\ & \swarrow & \downarrow \\ B_p(*) & \xrightarrow{\subset} & \prod_{\mathcal{F}_p} B_p(G/H). \end{array}$$

(Additional arrows: $U_p(*) \rightarrow U_{e_p}(*)$, $U_{e_p}(*) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}_p} U_{e_p}(G/H)$, $\prod_{\mathcal{F}_p} U_{e_p}(G/H) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}_p} B_p(G/H)$, $U_{e_p}(*) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}_p} B_p(G/H)$, $\prod_{\mathcal{F}_p} U_p(G/H) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}_p} B_p(G/H)$, and an equality arrow $\prod_{\mathcal{F}_p} U_p(G/H) \xrightarrow{=} \prod_{\mathcal{F}_p} U_{e_p}(G/H)$)

Die innere Zeile ergibt sich aus der Definition von U_{e_p} . Nun ist aber $\bigoplus_{\mathcal{F}_p} U_{e_p}(\ast) \twoheadrightarrow U_{e_p}$ natürlich surjektiv und wir bekommen p -lokale Induktionssätze aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\mathcal{F}_p} U_{e_p}(G/H) & \twoheadrightarrow & U_{e_p}(\ast) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\mathcal{F}_p} B_p(G/H) & \twoheadrightarrow & B_p(\ast) \end{array}$$

und mit dem letzten Theorem auch einen expliziten Induktionssatz für $B = M_\Delta$ und damit für M als Mackeyfunktorkomplex über $\hat{\Omega}_{\mathbb{Z}}$.

All dies fassen wir in folgendem Theorem zusammen.

THEOREM 4.2.4. *Sei \mathcal{F} eine kompakte Familie, \mathcal{F}_∞ wie oben mit zugehörigen Induktionsmenge \mathcal{X}_∞ . Weiter sei B ein Basis-Greenfunktorkomplex und $B(\ast) \rightarrow B_{\mathbb{Q}}(\ast)$ sowie die Restriktion $B_{\mathbb{Q}}(\ast) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}} B_{\mathbb{Q}}(G/H)$ seien injektiv. Dann ist die Induktion*

$$\bigoplus_{G/K \in \mathcal{X}_\infty} B(G/K) \longrightarrow B(\ast)$$

surjektiv sowie B explizit \mathcal{X}_∞ -projektiv.

BEWEIS. Aus der Surjektion $U \rightarrow B$ erhalten wir auch für alle Lokalisierungen an Primidealen (p) einen surjektiven Homomorphismus $b : U_p \rightarrow B_p$, so dass für x und $y \in U_p(G/H)$ aus

$$\phi'(x)(K) = \phi'(y)(K), \text{ für alle } K \leq H$$

in $B_p(H)$ die Gleichheit $b_H(x) = b_H(y) + b_H(n)$ mit einem nilpotenten Element $n \in U_p(G/H)$ folgt.

Nach Voraussetzung ist $\pi_B^* : B(\ast) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}} B(G/H)$ auch nach Lokalisierung an (p) injektiv, insbesondere für $(p) = (0)$. Ebenso ist für jede Primzahl p

$$B(\ast) \longrightarrow B_p(\ast) \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}(\ast)$$

an jeder Stelle injektiv.

Gilt nun für x und $y \in U_p(\ast)$

$$\phi(x)(K) = \phi(y)(K) \text{ für alle } K \in \mathcal{F},$$

so ist nach Restriktion entlang $G/H \rightarrow \ast$ und Lokalisierung an (0)

$$b_H(x) - b_H(y) = b_H(n) = 0 \in \mathbb{Q} \otimes B_p(H).$$

Da dies für alle $H \in \mathcal{F}$ erfüllt ist, besteht die Gleichheit $b_G(x) = b_G(y)$ schon in $\mathbb{Q} \otimes B_p(\ast)$ und damit auch in $B_p(\ast)$.

Sei e_p das idempotente Element zu \mathcal{F}_p in U_p mit $\phi(e_p)(K) = 1$ für alle $K \in \mathcal{F}_p$. Dann ist das Bild von e_p in $B_p(\ast)$ das Eins-Element, da für alle $K \in \mathcal{F}$ gilt

$$\phi(e)(K) = 1 = \phi(1)(K).$$

Nach Folgerung 4.2.2 faktorisiert $U_p \rightarrow B_p$ über U_{e_p} , so dass B_p explizit $\mathcal{X}_{\mathcal{F}_p}$ -projektiv ist. Dies gilt für alle p , wodurch mit Satz 4.2.3, wie behauptet, B als explizit \mathcal{X}_∞ -projektiv erkannt ist. \square

Dieses und das nächste Ergebnis ist schon in [tD87, IV.)] zu finden, jedoch durch andere Methoden bewiesen.

Zu einer kompakten Familie \mathcal{F} und einem Basis-Greenfunktors B betrachten wir nun den Kern $K_p(\mathcal{F})$ des Restriktionshomomorphismus $B_p(*) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}} B_p(G/H)$. Sei $I_p(\mathcal{F}_p)$ das Bild der Induktion $\bigoplus_{\mathcal{F}_p} B_p(G/K) \rightarrow B_p(*)$. Dann gilt

THEOREM 4.2.5.

$$B_p(*) = K_p(\mathcal{F}) + I_p(\mathcal{F}_p).$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung faktorisiert der Restriktionshomomorphismus über die injektive Abbildung $B_p(*)/K_p(\mathcal{F}) \rightarrow \prod_{\mathcal{F}} B_p(G/H)$, welche sich zu einer Inklusion

$$B_p(*)/K_p(\mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{\mathcal{F}} B_p(G/H) \longrightarrow \prod_{\mathcal{F}_p} B_p(G/H)$$

fortsetzt. Damit kommutiert

$$\begin{array}{ccc} B_p(*)/K_p(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \prod_{\mathcal{F}_p} B_p(G/H) \\ \uparrow & & \uparrow \\ U_p(*) & \xrightarrow{\pi^*} & \prod_{\mathcal{F}_p} U_p(G/H). \end{array}$$

Sei $e_p \in U_p$ das Idempotente zu \mathcal{F}_p . Nach Konstruktion ist $\pi^*(1 - e_p) = 0$, so dass die Zuordnung

$$U_{e_p}(*) \longrightarrow B_p(*)/K_p(\mathcal{F}), \quad e_p[X] \longmapsto b(X) + K_p(\mathcal{F})$$

ein wohldefinierter und surjektiver Homomorphismus ist.

Das Bild des Idempotenten e_p in $U_p(*)$ ist ein Element in der Nebenklasse der Eins $1 + K_p(\mathcal{F})$ in $B_p(*)$. D.h. aber, dass die Eins von $B_p(*)$ als Summe $x + y$ mit $x \in K_p(\mathcal{F})$ und y aus $I_p(\mathcal{F}_p)$ geschrieben werden kann. \square

4.2.1. Defektmengen. Wir wollen nun kurz darstellen, dass der Schnitt zweier Induktionsmengen aus homogenen Räumen wieder eine Induktionsmenge ist. Daraus schließen wir die Existenz einer minimalen explizit projektiven Induktionsmenge zu einem Greenfunktors A . Dazu benötigen wir eine partielle Ordnung auf den Familien von Untergruppen in G . Es sei $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$, wenn für alle (K) aus \mathcal{F} ein (H) aus \mathcal{F}' mit $(K) < (H)$ existiert.

LEMMA 4.2.6. *Seien $\mathcal{X}_1 = \{G/H_i\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{G/K_j\}$ zwei projektive Induktionsmengen eines Greenfunktors A . Dann gibt es eine kompakte Familie $\{(L_k)\}$ mit Induktionsmenge $\mathcal{X} = \{G/L_k\}$ sowie $\{(L_k)\} \leq \{(H_i)\}$ und $\{(L_k)\} \leq \{(K_j)\}$, so dass A explizit \mathcal{X} -projektiv ist. Sind \mathcal{X}_1 und \mathcal{X}_2 endlich, so auch \mathcal{X} .*

BEWEIS. Nach Theorem 3.1.5 sind alle Abbildungen in

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus A(G/H_i) & \longrightarrow & A(*) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigoplus A(G/H_i \times G/K_j) & \longrightarrow & \bigoplus A(G/K_j) \end{array}$$

surjektiv. Wegen der Isomorphie $U_{fib}(G/H, G/H \times X) \cong U(G/H \times G/H \times X)$ gibt es allgemein eine Zerlegung

$$[G/H \leftarrow G/H \times X \rightarrow G/H \times X] = \sum_s n_s [G/H \leftarrow G/H_s \rightarrow G/H \times X],$$

so dass es zur Induktion p_* entlang der Projektion $p : G/H \times X \rightarrow G/H$ eine Surjektion θ

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_s A(G/H_s) & \xrightarrow{\theta} & A(G/H) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & A(G/H \times X) & \end{array}$$

gibt. Insbesondere für $X = G/K$ gilt $(H_s) = (H \cap tKt^{-1}) < (K)$ mit geeigneten $t \in G$, d.h. wir können $\bigoplus A(G/H_i \times G/K_j) \rightarrow A(*)$ als folgende Komposition zerlegen

$$\bigoplus A(G/H_i \times G/K_j) \longrightarrow \bigoplus A(H_i \cap tK_j t^{-1}) \longrightarrow \bigoplus A(G/K_j) \longrightarrow A(*) .$$

Dann ist $\{K \mid (K) < (H_s)\}$ eine kompakte Familie, da nur endlich viele maximale Elemente existieren. \square

FOLGERUNG 4.2.7. *Zu jedem Mackeyfunktorkomplex M gibt es eine minimale endliche Induktionsmenge $\mathcal{D}(M)$ aus homogenen Räumen, Defektmenge von M genannt.*

BEWEIS. Nach Lemma 4.2.1 hat jeder Mackeyfunktorkomplex eine endliche projektive Induktionsmenge. Mit Lemma 4.2.6 können wir eine absteigende Folge von endlichen Induktionsmengen bilden, welche nach endlich vielen Schritten wegen der absteigenden Kettenbedingung für abgeschlossene Untergruppen von G stationär wird. \square

Zum Schluß betonen wir noch einmal, dass eine Induktionssatz über $\tilde{\Omega}$ zu einem Induktionssatz über Ω führt, vgl. Lemma 3.1.2.

LEMMA 4.2.8. *Jede Induktionsmenge $\mathcal{X} = \{X_i\}$ führt zu einer Induktionsmenge aus homogenen Räumen.*

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus $U_{fib}(*, X_i) = U(* \times X_i)$. \square

4.3. Hyperelementare Induktion

Nun kommen wir zum hyperelementaren Induktionstheorem (HIT). Für endliche Gruppen stammt dieses Ergebnis von Dress [Dre73], für kompakte Lie-Gruppen von tom Dieck [tD87]; wir wollen einen neuen Beweis vorstellen und damit zeigen, dass die bisher

entwickelte Theorie es gestattet auch eine explizite Version davon zu erhalten. Eine klassische Anwendung des HIT ist im Fall des komplexen Darstellungsring-Greenfunktors gegeben.

4.3.1. Hyperelementare Gruppen. Sei C eine topologisch zyklische Gruppe, was heißt, es gibt einen Element $x \in C$, so dass die von x erzeugte Untergruppe dicht liegt. Ihre Konjugationsklassen bilden eine kompakte Familie $\mathcal{C} \subset \Gamma G$. Sei weiter p eine Primzahl und P eine p -Gruppe. Dann heißen Gruppen S , die C mit P erweitern, also die, zu denen es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow S \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

gibt, p -hyperelementar.

LEMMA 4.3.1. *Ist S p -hyperelementar und $H \leq S$ eine Untergruppe, so ist auch H p -hyperelementar.*

BEWEIS. Entsteht S durch Erweiterung der topologisch zyklischen Gruppe C mit der p -Gruppe P , so sei $C' = H \cap C$. Dann ist auch C' normal in H und als Untergruppe einer topologisch zyklischen Gruppe selbst wieder topologisch zyklisch. Folglich ist H/C' isomorph zu CH/C , einer Untergruppe von P und damit H p -hyperelementar. \square

Damit bilden die Konjugationsklassen der p -hyperelementaren Untergruppen eine Familie $\mathcal{H}_p \subset \Gamma G$. Auf die über alle Primzahlen p variierende Vereinigung $\mathcal{H}_\infty = \bigcup_p \mathcal{H}_p$ all dieser Familien beziehen wir uns als Familie der hyperelementaren Untergruppen. Auf Grund der Beschränktheit der Komponenten von Weylgruppen WH für abgeschlossene Untergruppen $H \leq G$ gibt es lediglich endlich viele p mit $\mathcal{H}_p \neq \mathcal{C}$.

Als nächstes werden wir einige Eigenschaften von p -hyperelementaren Untergruppen und von \mathcal{H}_p zusammenstellen.

LEMMA 4.3.2. *Die Familie \mathcal{H}_p ist offen in ΓG .*

BEWEIS. Folgt mit Lemma 4.1.1 und Lemma 4.3.1, denn damit können wir \mathcal{H}_p als Vereinigung offener Umgebungen von p -hyperelementaren Gruppen schreiben. \square

Ist S eine p -hyperelementare Untergruppe in einer kompakten Lie-Gruppe G , die als Erweiterung von C mit P entsteht, so ist S eine Untergruppe des Normalisators NC von C . Ist die Weylgruppe $WC = NC/C$ von endlicher Ordnung, so ist $P \leq WC$ Untergruppe einer p -Sylow Untergruppe von WC und S Untergruppe im Urbild dieser p -Sylowgruppe.

Grundsätzlich lässt sich zu jeder Untergruppe H mit endlicher Weylgruppe WH zu einer p -Sylowgruppe $P' \leq WH$ deren Urbild in NH betrachten. Da alle p -Sylowgruppen in WH konjugiert sind, erhalten wir also eine wohldefinierte Klasse in ΦG , die wir als $(N_p H)$ notieren werden.

LEMMA 4.3.3. *Sei S eine p -hyperelementare Untergruppe und K ein Untergruppe von G . Weiter sei S normal in K und K/S eine Erweiterung eines Torus mit einer endlichen p -Gruppe. Dann ist auch K eine p -hyperelementare Untergruppe.*

BEWEIS. Als erstes ist festzuhalten, dass wir in S eine charakteristische topologisch zyklische Untergruppe C finden, so dass S/C ein p -Gruppe ist. Eine topologisch zyklische Gruppe ist abstrakt isomorph zu einem Produkt einer endlichen zyklischen Gruppe D und einem Torus H . Dann ist C das Produkt des Torus mit dem zu p primen Anteil in D . Offensichtlich ist eine solche Untergruppe C charakteristisch und damit auch normal in K .

Wir betrachten zunächst den Fall, dass K/S lediglich ein Torus ist. Es reicht anzunehmen, dass K/S ein eindimensionaler Torus ist. Dann ist $K/C \rightarrow K/S$ eine endliche Überlagerung von S^1 und damit selbst eine disjunkte Vereinigung von eindimensionalen Tori. Das Urbild der Komponente der Eins aus K/C in K ist eine Erweiterung von C mit S^1 und damit wieder eine topologisch zyklische Gruppe. Nennen wir diese C' , so können wir folgende Surjektion notieren

$$S/C \longrightarrow S/(C' \cap S) \cong C'S/C' = K/C'$$

und wir sehen, dass es sich bei K/C' auch um eine p -Gruppe handelt und damit K p -hyperelementar ist.

Sei nun K/S eine endliche p -Gruppe. Mit obigem $C \leq S$ hat K/C die Ordnung

$$|K/C| = |K/S| \cdot |S/C|$$

und ist damit auch eine p -Gruppe.

Beide Feststellungen liefern nun die Behauptung, da wir in K eine Untergruppe L finden können, sodass L/S ein Torus und K/L eine endliche p -Gruppe sind. \square

FOLGERUNG 4.3.4. *Sei S eine p -hyperelementare Untergruppe und bezüglich Subkonjugation maximal in \mathcal{H}_p . Dann ist die Ordnung der Weylgruppe WS endlich und teilerfremd zu p .*

BEWEIS. Wäre WS nicht endlich oder enthielte sie eine p -Sylowgruppe, so gäbe es eine Untergruppe $K \leq NS$, so dass K/S ein Torus oder eine p -Gruppe wären. Damit könnte S nach Lemma 4.3.3 nicht maximal sein. \square

Da wir nun über die maximalen Elemente in \mathcal{H}_p geschrieben haben, wollen wir nachweisen, in dem wir die Kompaktheit von \mathcal{H}_p zeigen, dass es nur endlich viele davon gibt.

LEMMA 4.3.5. *In ΓG ist die Familie \mathcal{H}_p abgeschlossen und damit kompakt.*

BEWEIS. Wir zeigen die Behauptung für $\mathcal{H}_p \cap \Phi G$. Ist dies gezeigt, so folgt die Behauptung mit Folgerung 4.1.2, da $\mathcal{H}_p \cap \Phi G$ nur endlich viele maximale Elemente (K_j) enthält und damit \mathcal{H}_p eine endliche Vereinigung der abgeschlossenen Mengen $\{(H) \in \Gamma G \mid (H) \leq (K_j)\}$ ist.

Betrachten wir also eine konvergente Folge von p -hyperelementaren Untergruppen S_i , $i = 1, 2, \dots$, mit Grenzwert S in ΦG . Dazu erhalten wir eine Folge von topologisch zyklischen Untergruppen C_i , die jeweils S_i um die p -Gruppe S_i/C_i erweitern. Für genügend große i können wir $(S_i) \leq (S)$ annehmen. Wegen der Kompaktheit von ΦS gibt es eine konvergente Teilfolge der (C_i) . Sei im Folgenden (C_i) und (S_i) gemäß dieser Teilfolge mit Grenzwerten (C) und (S) ausgewählt. Da alle C_i topologisch zyklisch sind, gilt dies auch für den Grenzwert C , der dann ebenso wie C_i in S_i normal in S ist.

Nach [Hoc65, XIII] Theorem 1.3 gibt es eine in einer zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppe H einen zusammenhängenden abelschen Normalteiler A , so dass H/A halbeinfach ist. Nach [tD87, IV.3] Proposition 3.7 ist eine halbeinfache Gruppe kein Grenzwert echter Untergruppe.

Wir wenden dies auf die Zusammenhangskomponente der Identität S_0 von S an. Sei also A dieser Normalteiler in S_0 , so dass S_0/A halbeinfach ist. Wir setzen nun $C' = CA$ und $S'_i = C'S_i$ sowie $C'_i = C'$. Wir werden zeigen:

- (1) C' ist ein topologisch zyklischer Normalteiler in S ,
- (2) S'_i/C'_i ist eine endliche p -Gruppe,
- (3) S'_i ist eine konvergente Folge von Untergruppen in S mit Grenzwert S .

Damit ist S/C' Grenzwert der p -Gruppen S'_i/C'_i und $C'S_0/C' \cong S_0/(S_0 \cap C')$ halbeinfach. Folglich muss $S_0 = (S_0 \cap C')$ gelten, da $S_0/(S_0 \cap C')$ kein Grenzwert echter Untergruppen ist. Letztlich ist S/C' endlich und als Grenzwert von p -Gruppen, selbst eine p -Gruppe. Somit ist S wie behauptet auch p -hyperelementar.

Nun zu den Behauptungen (1) bis (3). Als zusammenhängende abelscher Normalteiler ist A ein Torus. Ist C_0 die Zusammenhangskomponente der Eins in C , so ist $C_0 \leq A$. Wäre dem nicht so, so hätte S_0/A mit $C_0A/A \cong C_0/(C_0 \cap A)$ einen abelschen Normalteiler und könnten nicht halbeinfach sein. Somit ist $C' = CA \cong C/(C \cap A) \times A$, wie in (1) behauptet, topologisch zyklisch. Teil (2) folgt, da wir, wegen $C_i \leq C' \cap S_i$,

$$S'_i/C'_i = C'S_i/C' \cong S_i/(C' \cap S_i)$$

als Quotient der p -Gruppe S_i/C_i erkennen. Behauptung (3) folgt unmittelbar, da $S_i \leq C'S_i$. \square

Wir haben damit erkannt, dass \mathcal{H}_p eine Zusammenhangskomponente von ΓG ist. Die Zusammenhangskomponenten im Spektrum eines Rings R entsprechen bijektiv den Idempotenten in R . Wir erinnern daran, dass $C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})$ das Spektrum $\Phi G \times \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ hat und wir darin mit $\mathcal{H}_p \times \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ also eine Komponente gefunden haben. Es stellt sich die Frage in wie weit das dazugehörige Idempotente im Bild von $\phi : \mathcal{A}_p \rightarrow C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})$ liegt. Dies beantworten wir im folgenden Abschnitt.

4.3.2. HIT. Zur Familie \mathcal{C} der topologisch zyklischen Untergruppen hatten wir in Abschnitt 4.1.2 gesehen, dass es eine minimale Familie \mathcal{C}_p und ein eindeutiges Idempotentes $e_p \in \mathbb{Z}_{(p)} \otimes U_G$ gibt mit

$$\phi'(e_p)(H) = \begin{cases} 1, & \text{für } (H) \in \mathcal{C}_p \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese lässt sich explizit bestimmen.

THEOREM 4.3.6. *Es gilt $\mathcal{C}_p = \mathcal{H}_p$, d.h. es gibt ein Idempotentes $e_p \in \mathbb{Z}_{(p)} \otimes U_G$ mit*

$$\phi'(e_p)(H) = \begin{cases} 1, & \text{für } (H) \in \mathcal{H}_p \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Zum Beweis nutzen wir die durch ϕ induzierte Abbildung

$$\phi^* : \text{spec}(C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})) \rightarrow \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G)$$

und verwenden, dass die Spektren von $U_p(*)$ und $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G$ homöomorph sind.

Da wir in $\text{spec}(C(\Phi G, \mathbb{Z}_{(p)})) = \Phi G \times \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ mit $\mathcal{H}_p \times \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ nach Lemma 4.3.2 und 4.3.5 eine Komponente gefunden haben, zeigen wir

$$(\phi^*)^{-1}\phi^*(\mathcal{H}_p \times \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)})) = \mathcal{H}_p \times \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$$

und erkennen damit, dass $\phi^*(\mathcal{H}_p \times \text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)}))$ ein Komponente von $\text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G)$ ist. Dies beweist die Existenz des gesuchten Idempotenten in $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G$ und damit auch eines in $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes U_G$.

Da $\text{spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ aus den zwei Primidealen (0) und (p) besteht, gibt es zu $(H) \in \Phi G$ auch zwei Primideale. Diese notieren wir [tD87]IV.4 folgend mit $q(H, 0) = \phi^*((H), (0))$ und $q(H, p) = \phi^*((H), (p))$. Ein Ideal $q(H, p)$ ist jeweils das Urbild von $(p) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ unter

$$\phi_H : \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}, x \mapsto \phi(x)(H).$$

Es bleibt also zu klären, wann zwei Untergruppen das selbe Primideal definieren.

Zunächst zitieren wir kurz die für uns wesentliche Ergebnisse über Primideal im Burnsideing aus [tD87]IV.4 Theorem 4.2 und Proposition 4.5:

- (1) Sei $q \subset \mathcal{A}_G$ ein Primideal und p die Charakteristik von \mathcal{A}_G/q . Dann gibt es eine eindeutige Klasse $(K) \in \Phi G$ mit $q = q(K, p)$ und $(|WK|, p) = 1$. Eine solches K nennt man auch definierende Untergruppe von q .
- (2) Sei H eine normale Untergruppe von K und K/H ein Erweiterung eines Torus mit einer endlichen p -Gruppe, bzw. $p = 0$ falls K/H ein Torus ist. Dann gilt $q(H, p) = q(K, p)$.
- (3) Gilt $q(K, 0) = q(L, 0)$ und $(K) \in \Phi G$, so ist, bis auf Konjugation, L normal in K und K/L ein Torus.

Der letzte Punkt zeigt, dass $(K) \in \Phi G$ mit $q = q(K, 0)$ eindeutig festgelegt ist. Was also zu zeigen bleibt ist, dass mit $(S) \in \mathcal{H}_p$ auch alle (K) mit $q(K, p) = q(S, p)$ Elemente von \mathcal{H}_p sind.

Dazu geben wir zu einer Klasse $(H) \in \Phi G$ eine Folge (H_i) mit

$$(H) = (H_1) < \dots < (H_i) < (H_{i+1}) < \dots$$

und $q(H, p) = q(H_i, p)$ an. Diese ist als strikt aufsteigenden Kette und wegen der Kompaktheit von ΦG konvergent. Wir werden für den Grenzwert (H_∞) zeigen, dass $q(H_i, p) = q(H_\infty, p)$ gilt und dass H_∞ eine definierende Untergruppe ist. Insbesondere folgt mit der Kompaktheit von \mathcal{H}_p , dass mit (H) auch alle (H_i) , und damit auch (H_∞) , aus \mathcal{H}_p sind.

Sei $N_p H$ ein Element der Klasse $(N_p H)$ mit $H \leq N_p H \leq NH$, so ist $N_p H$ die Erweiterung von H mit der endlichen p -Gruppe $W_p H = N_p H / H$ und somit $q(N_p H, p) = q(H, p)$. Dies iterieren wir und schreiben $N_p^{i+1} H$ für $N_p(N_p^i H)$, beginnend mit $N_p^1 H = N_p H$. Nach Eigenschaft (2) der Primideale in \mathcal{A}_G gilt $q(H, p) = q(N_p^i H, p)$ und wir haben eine aufsteigende Folge in ΦG

$$(H) < (N_p H) < \dots < (N_p^i H) < \dots$$

Diese Kette bricht genau dann ab, wenn $N_p^{i+1} H = N_p^i H$ gilt. In diesem Fall haben wir schon mit $N_p^i H = H_\infty$ eine definierende Untergruppe zu $q(H, p)$ gefunden. Dies ist jedoch nicht immer gewährleistet, wohl aber ist die entsprechende Folge in ΦG konvergent. Sei der Grenzwert durch $(N_p^\infty H)$ notiert. Wegen der Stetigkeit von ϕ gilt für hinreichend große i und $x \in \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G$

$$\phi(x)(N_p^i H) = \phi(x)(N_p^\infty H),$$

also $\phi_{N_p^i H} = \phi_{N_p^\infty H}$. Damit stimmen die Urbilder von $(p) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ unter $\phi_{N_p^i H}$ und $\phi_{N_p^\infty H}$ überein; somit auch $q(N_p^i H, p)$ und $q(N_p^\infty H, p)$.

Nun definieren wir $(H) = (H_1)$ und $(H_{i+1}) = (N_p^\infty H_i)$. Iterieren wir nun dies, erhalten wir wiederum eine strikt aufsteigende Folge

$$(H) = (H_1) < (H_2) < \dots < (H_i) < \dots$$

mit $q(H, p) = q(H_i, p)$, die ebenso genau dann abbricht, falls ein H_i eine definierende Untergruppe von $q(H, p)$ ist. Bricht sie nicht nach endlich vielen Schritten ab, so konvergiert sie doch mit Grenzwert (H_∞) . Entsprechend der obigen Überlegungen gilt auch hier $\phi_{H_i} = \phi_{H_\infty}$ für große i und damit $q(H_i, p) = q(H_\infty, p)$.

Nach Konstruktion muss nun aber $N_p H_\infty = H_\infty$ gelten, d.h. $(|WH_\infty|, p) = 1$ und somit ist H_∞ eine definierende Untergruppe von $q(H_\infty, p) = q(H, p)$.

Nun können wir zwei Folgerungen anbringen. Als erstes erkennen wir, dass die definierende Untergruppe eines Primideals $q = q(S, p)$, $(S) \in \mathcal{H}_p$, selbst eine p -hyper-elementare Untergruppe ist. Denn nach Lemma 4.3.3 sind mit S auch alle $N_p^i(S)$ p -hyper-elementar und wegen Lemma 4.3.5 damit auch der Grenzwert $(N_p^\infty(S))$. Mit obiger Notation $S_{i+1} = N_p^\infty(S_i)$ und $S_1 = S$, gilt gleichsam $(S_i) \in \mathcal{H}_p$. Wir erhalten also eine Folge (S_i) in \mathcal{H}_p deren Grenzwert, die definierende Untergruppe (S_∞) , ebenso in \mathcal{H}_p liegt.

Zum zweiten entnehmen wir, dass wir zu jeder Untergruppe $K \leq G$, die auch das Primideal $q = q(K, p)$ liefert, eine Folge von (K_i) finden, die gegen (S_∞) konvergiert. Nach geeigneter Konjugation können wir $K_i \leq S_\infty$ annehmen und mit Lemma 4.3.1 die K_i als p -hyperelementare Untergruppen erkennen. Insbesondere ist also

$$(\phi^*)^{-1}\phi^*(\mathcal{H}_p \times (p)) = \{(K) \times (p) \mid q(K, p) = q(S, p), (S) \in \mathcal{H}_p\} = \mathcal{H}_p \times (p)$$

gezeigt und damit die behauptete Existenz eines Idempotenten zu \mathcal{H}_p bewiesen.

Offensichtlich ist \mathcal{H}_p auch die kleinste Familie, zu der es ein solches Idempotentes geben kann. \square

Nun folgt das HIT direkt aus unseren bisherigen Überlegungen:

FOLGERUNG 4.3.7. *Ist \mathcal{C} die Familie der topologisch zyklischen Untergruppen, so ist $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{H}_\infty$. Sei \mathcal{X}_∞ die zu \mathcal{H}_∞ zugehörige Induktionsmenge.*

Erfüllt ein Basis-Greenfunktorkomplex B die Bedingungen von Theorem 4.2.4 für $\mathcal{F} = \mathcal{C}$, so erfüllt jeder B -Modul M die hyperelementare Induktion, d.h. M ist explizit \mathcal{X}_∞ -projektiv,

$$\pi_* : \bigoplus_{(H) \in \mathcal{H}_\infty} M(G/H) \rightarrow M(G/G)$$

ist surjektiv und hat einen expliziten Spalthomomorphismus im Wertebereich von M .

BEWEIS. Nach Theorem 4.3.6 zeigt $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{H}_\infty$. Damit erfüllt B die hyperelementare Induktion. Nach Theorem 3.1.5 erfüllen dann auch alle B -Moduln M die hyperelementare Induktion. Wegen Folgerung 3.1.6 ist M auch explizit \mathcal{X}_∞ -projektiv. \square

Letztlich lassen sich die Koeffizienten von $e_p \in \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \mathcal{A}_G$ in der Basisdarstellung

$$e'_p = \sum \lambda_H [G/H], \quad \lambda_H \in \mathbb{Z}_{(p)}$$

explizit bestimmen. Wir wollen einen möglichen Ansatz hier kurz vorstellen.

Da mit $(H) \in \mathcal{H}_p$ auch alle Subkonjugierten $(H') \leq (H)$ aus \mathcal{H}_p sind, können wir als erstes $\lambda_K = 0$ für $(K) \notin \mathcal{H}_p$ festhalten; vgl. Lemma 4.1.5.

Für die maximalen Klassen $(H) \in \mathcal{H}_p$ ist $|WH|$ teilerfremd zu p . Damit haben wir λ_H als $|WH|^{-1}$ zu definieren, denn nun gilt $\phi(\lambda_H [G/H])(H) = |WH|^{-1}|WH| = 1$.

Von nun an werden wir alle weiteren Koeffizienten induktiv bestimmen. Sei also $(K) \in \mathcal{H}_p$ und λ_H für alle $(K) < (H)$ bekannt, d.h. für $x = \sum_{(K) < (H)} \lambda_H [G/H]$ gilt

$$\phi(x)(L) = \begin{cases} 0, & \text{für } (L) \notin \mathcal{H}_p \\ 1, & \text{für } (K) < (L) \in \mathcal{H}_p \end{cases}$$

Zu x finden wir einen endlichen G -CW Komplex Y und ein zu p teilerfremdes b mit

$$b \cdot x = [Y].$$

Betrachten wir nun $Y^K = Z$ als $N_p K$ -Raum. So gilt dennoch $\chi(Y^H) = \chi(Z^H)$ für alle H mit $K < H \leq N_p K$. Damit gilt also auch $\chi(Y^K) = \sum_{K \leq H \leq N_p K} \chi_c(Z_H)$.

Nutzen wir die Möbiusinversion der endlichen, partiell geordneten Menge $\{H \mid K \leq H \leq N_p H\}$ mit zugehöriger Möbiusfunktion μ , so erhalten wir

$$\chi_c(Z_K) = \sum_{K \leq H \leq N_p K} \mu(K, H) \chi(Y^H).$$

Mit K sind auch $N_p K$ und entsprechend alle H mit $K \leq H \leq N_p K$ p -hyperelementar, d.h. wir können nach Voraussetzung $\chi(Y^H) = b$ für $K < H \leq N_p K$ annehmen. Damit erkennen wir in der Möbiusinversion

$$\chi_c(Z_K) = \sum_{K < H \leq N_p K} \mu(K, H) \chi(Y^H) + \chi(Y^K) = \sum_{K < H \leq N_p K} \mu(K, H) b + \chi(Y^K).$$

Nach Definition ist aber $\sum_{K < H \leq N_p K} \mu(K, H) = -1$ und damit

$$\chi(Y^K) = b + \chi_c(Z_K) = b + m \cdot |W_p K|,$$

für ein geeignetes m . Folglich können wir $\lambda_K = -\frac{m}{b} \frac{|W_p K|}{|W K|}$ festlegen und rechnen nach:

$$\phi(x + \lambda_K [G/K])(H) = \phi(x)(H)$$

für $(H) \not\leq (K)$ und

$$\begin{aligned} \phi(x + \lambda_K [G/K])(K) &= \phi(x)(K) + \phi(\lambda_K [G/K])(K) \\ &= \phi(x)(K) + \lambda_K \phi([G/K])(K) \\ &= \frac{\chi(Y^K)}{b} - \frac{m}{b} \frac{|W_p K|}{|W K|} |W K| \\ &= 1 + \frac{m}{b} |W_p K| - \frac{m}{b} |W_p K| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Wegen der absteigenden Kettenbedingung für kompakte Lie-Gruppen muss dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten enden.

4.3.3. Beispiel: $R(S_4)$. Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen kennt noch einen stärkeren Induktionssatz, den Satz von Brauer. Er besagt, dass man eine Surjektion auf $R(G)$ schon durch elementare Untergruppen erhält. Doch zeigt das Beispiel 4.3.3 von $R_\Delta(S_4)$, dem Diagonal-Endomorphismenfunktor des Darstellungsrings der Permutationsgruppe von vier Symbolen, dass dieses Ergebnis nicht im Rahmen dieser Theorie zu gewinnen ist. Damit folgt aber auch, dass es für den Satz von Brauer keine Spaltabbildung geben kann, der durch Restriktionsabbildungen gebildet wird. Wir wollen nun dieses einfache, aber, was die Grenzen der hier entwickelten Induktionstheorie angeht, bedeutendes Beispiel besprechen.

Im Mittelpunkt steht der komplexe Darstellungsring $R(G)$ der symmetrischen Gruppe $S_4 = G$. Für endliche Gruppen sind die Induktionskategorien Ω und $\tilde{\Omega}$ hinreichend einfach zu überschauen und die Darstellungstheorie ist voll entwickelt. Induktion und Restriktion

macht $R(H)$ für $H \leq G$ zu einem Mackeyfunktorkomplex. Das Tensorprodukt von Darstellungen induziert eine Ringstruktur für alle H , welche eine Paarung auf R ist und damit den Mackeyfunktorkomplex zu einem Greenfunktorkomplex macht (vgl. [Ser77], [Web00]).

Für die Darstellungstheorie, bzw. Charaktere ist die Bestimmung von Konjugiertenklassen von Elementen $g \in G$ wesentlich; für den Burnside-Ring (Eulerring) die Konjugationsklassen von Untergruppen $H \leq G$.

Die Konjugiertenklassen von Permutationen sind durch die Zykeldarstellung

$$(s_1, \dots, s_k)(s_{k+1}, \dots, s_l) \dots (s_j, \dots, s_n)$$

bestimmt. Die Konjugationsklassen von Untergruppen sind $S_4, A_4, D_4, D_3, D_2 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, V \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, D_1 \cong \mathbb{Z}/2, C_4, C_3, C_2, E$ mit Normalisatoren

$$\begin{array}{c|cccccccccccc} H & S_4 & A_4 & D_4 & D_3 & D_2 & V & D_1 & C_4 & C_3 & C_2 & E \\ \hline NH & S_4 & S_4 & D_4 & D_3 & D_4 & S_4 & V & D_4 & D_3 & D_4 & S_4 \end{array}$$

(Siehe [Hof00]).

Für endliche Gruppen sind Elemente des Burnside-Rings durch formale Differenzen von endlichen G -Mengen $X - Y$ repräsentiert. Die Zuordnung $X \mapsto \mathbb{C}[X]$ induziert den eindeutigen natürlichen Ringhomomorphismus

$$\varphi : \mathcal{A}_G \longrightarrow R(G).$$

Da das Bild eines homogenen Raumes $[G/H]$ die Permutationsdarstellung $\mathbb{C}[G/H]$ ist, bezeichnen wir das Bild von φ auch als Permutationsdarstellungsring $P(G)$. Wir erhalten

$$R_\Delta \cong P(G).$$

Eine Darstellung $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V_\rho)$ ist durch ihren Charakter $\chi(V_\rho)$ eindeutig bestimmt. Für Permutationsdarstellungen $V = \mathbb{C}[X]$ ist der Wert von $\chi(\mathbb{C}[X])$ an $g \in G$ durch die Ordnung der Fixpunktmenge der von g erzeugten zyklischen Untergruppe C_g gegeben. Es gilt somit

$$\chi_V(g) = |X^{C_g}|.$$

Wie schon erwähnt, ist die Restriktion

$$P(G) \longrightarrow \prod_{C \text{ zyklisch}} P(C)$$

injektiv, und nach Theorem 4.3.7 erfüllt der Basis-Greenfunktorkomplex P den hyper-elementaren Induktionssatz, der Induktionhomomorphismus

$$\bigoplus_{N \text{ hyper-elementar}} P(N) \longrightarrow P(G)$$

ist surjektiv. Die nichtzyklischen, hyper-elementaren Untergruppen sind 2-hyper-elementar:

$$D_4, D_3, D_2 \text{ und } V.$$

Die Klasse der trivialen Darstellung und damit die Eins in $P(G)$, wird auch durch

$$\mathbb{C}[G/D_4] + \mathbb{C}[G/D_3] + \mathbb{C}[G/C_2] - \mathbb{C}[G/V] - \mathbb{C}[G/D_1]$$

repräsentiert, so dass wir nach Lemma 4.2.1 schon bei $P(D_4) \oplus P(D_3) \rightarrow P(G)$ mit

$$(\mathbb{C}[D_4/D_4] + \mathbb{C}[D_4/C_2] - \mathbb{C}[D_4/V], \mathbb{C}[D_3/D_3] - \mathbb{C}[D_3/D_1]) \mapsto (\mathbb{C})$$

über eine Surjektion verfügen. Man verifiziert dies leicht, indem man die entsprechenden Fixpunktmenge für zyklische Untergruppen zählt.

Nach Brauers Induktionssatz benötigen wir jedoch nur elementare Untergruppen, also Untergruppen von G , die isomorph zu einem direkten Produkt von einer zyklischen Gruppe und einer p -Gruppe sind, um eine Surjektion des Induktionshomomorphismus

$$\bigoplus_{S \text{ elementar}} R(S) \longrightarrow R(G)$$

zu erhalten. Hätte diese Abbildung einen expliziten Spalt, so wäre die zur Familie der elementaren Untergruppen gehörende Induktionsmenge explizit projektiv, da R ein effektiver P -Modul ist und für beliebige Induktionsmengen \mathcal{X} gilt

$$R \text{ explizit } \mathcal{X}\text{-projektiv} \iff P \text{ explizit } \mathcal{X}\text{-projektiv.}$$

Die nicht-zyklischen elementaren Untergruppen von S_4 sind D_2 und V . Dazu zeigen wir jedoch

LEMMA 4.3.8. *Sei $[X] = \sum n_{S_i}[G/S_i]$ eine Linearkombination und seien S_i elementare Untergruppen in S_4 . Dann ist*

$$|X^{C_3}| = 0 \pmod{2}.$$

BEWEIS. Die einzige elementare Untergruppe, die C_3 enthält, ist C_3 selbst. Damit gilt

$$|X^{C_3}| = n_{C_3}|(G/C_3)^{C_3}| = n_{C_3}|NC_3/C_3| = n_{C_3}2 = 0 \pmod{2}.$$

□

Damit kann es keinen Spalthomomorphismus zur Brauerinduktion geben, der durch Restriktionshomomorphismen gebildet wird.

Der Grund dafür, dass wir hier einen Satz in solcher Stärke nicht zeigen können, liegt in unserer Ausgangssituation. Der Darstellungsringsring ist auch ein kovarianter Funktor über einer zur Induktionskategorie Ω gewissermaßen dualen Kategorie, deren Objekte die Untergruppen von G und Morphismen die Inklusionen $K \leq H$ sind. Diese Kategorie hat jedoch weit weniger Symmetrien. So sind die Automorphismen von H durch Elemente des Zentralisators ZH gegeben. Die elementaren Untergruppen erhält man nun ähnlich wie wir auf die hyperelementaren Untergruppen kamen.

Die hyperelementaren Gruppen waren $N_p C$ für C zyklisch, genau die Untergruppen von NC , so dass die Ordnung von $NC/N_p C$ teilerfremd zu p ist. Eine analoge Betrachtung für den Zentralisator führt zu elementaren Gruppen. Ist $Z_p C$ die Untergruppe von ZC , so dass die Ordnung von $ZC/Z_p C$ teilerfremd zu p ist, so ist $Z_p C$ eine p -elementare Untergruppe.

Homologische Algebra von Mackeyfunktoren

In diesem Abschnitt wollen wir nun die schon oft erwähnte, in [Dre73] entwickelte, homologische Algebra von Dress in unseren Rahmen übersetzen. Dabei ist unser Ziel die Amitsur-Tate-Kohomologie eines Mackeyfunktors M an einem Objekt X zu definieren sowie das zugehörige Annulations-Theorem. Wir arbeiten im gesamten Abschnitt über $\tilde{\Omega}$.

5.1. Grundbegriffe

5.1.1. Mackeyfunktoren M_X . Bisher haben wir den Begriff der expliziten \mathcal{X} -Projektivität von Mackeyfunktoren und damit Situationen $\bigoplus M(X_i) \rightarrow M(*) \rightarrow 0$ untersucht. Nun werden wir uns aber für die durch $X \times ? \rightarrow * \times ?$ induzierten natürlichen Transformationen

$$M_X = M(X \times ?) \longrightarrow M(* \times ?) = M$$

der Mackeyfunktoren M und M_X interessieren, wobei M_X der durch das Bilden der Produkte mit X entstehende Mackeyfunktorkomplex

$$M_X : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega} \rightarrow R\text{-MOD}, Y \mapsto X \times Y \mapsto M(X \times Y)$$

ist.

Eine grundlegende Motivation der Verallgemeinerung von Ω zu $\tilde{\Omega}$ war, dass $\tilde{\Omega}$ zu zwei Objekten X und Y auch ihr kartesisches Produkt $X \times Y$ als Objekt enthält. Jedoch ist dieses nicht ein Produkt in $\tilde{\Omega}$. So wollen wir uns dennoch sprachlich auf $X \sqcup Y$ als die direkte Summe von X und Y beziehen, während wir $X \times Y$ als das Produkt von X und Y bezeichnen, auch wenn dies nur das Produkt der topologischen Räume ist und nicht das Produkt in $\tilde{\Omega}$.

Nach Definition von $\tilde{\Omega}$ sind alle direkten Summen und Produkte vorhanden, es bleibt also nur noch die Existenz des Funktors $X \times ?$ zu bestätigen. Die Zuordnung

$$U_{fib}(Y, Z) \longrightarrow U_{fib}(X \times Y, X \times Z)$$

entsteht auf Repräsentanten durch Pullback (Restriktion) entlang der Faserung

$$1 \times pr \times 1 : Y \times X \times Z \longrightarrow Y \times * \times Z$$

und Komposition (Induktion) mit der Diagonalabbildung

$$1 \times \Delta \times 1 : Y \times X \times Z \longrightarrow Y \times X \times X \times Z,$$

was nach Lemma 6.2.16 im Anhang 6.2.2 additiv und damit wohldefiniert ist.

Auch betrachten wir von nun an nur endliche Induktionsmengen $\mathcal{X} = \{X_i\}$, so dass wir diese als einelementig, bestehend aus dem Objekt $X = \coprod X_i$ annehmen können. Dies ist im Wesentlichen eine Vereinfachung der Notation, die wir im Folgenden auch nutzen wollen.

Zu X induziert die Produktbildung

$$Y \longmapsto X \times Y, \quad (\beta, \alpha) \longmapsto (1_X \times \beta, 1_X \times \alpha)$$

einen kontravarianten Funktor $X \times ? : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$. Damit definiert dies in Komposition mit einem Mackeyfunktor M vermöge $M_X(Y) = M(X \times Y)$ und $M_X(\beta, \alpha) = M(1_X \times \beta, 1_X \times \alpha)$ den Funktor

$$M_\gamma : \tilde{\Omega} \longrightarrow R\text{-MACK}(\tilde{\Omega}).$$

Die durch (δ, γ) induzierte natürliche Transformation

$$\begin{array}{ccc} M_X(A) & \xrightarrow{M_{(\delta, \gamma)}(1_A, 1_A)} & M_Y(A) \\ \parallel & & \parallel \\ M(X \times A) & \xrightarrow{M(\delta \times 1_A, \gamma \times 1_A)} & M(Y \times A) \end{array}$$

schreiben wir zur Unterscheidung von $\gamma_* \delta^*$ auch als

$$\gamma_\times \delta^\times : M_X \longrightarrow M_Z \longrightarrow M_Y.$$

Die Kommutativität des Produktes und damit die des Diagramms

$$(5.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X \times A & \xleftarrow{1_X \times \alpha} & X \times C & \xrightarrow{1_X \times \beta} & X \times B \\ \uparrow \gamma \times 1_A & & \uparrow \gamma \times 1_C & & \uparrow \gamma \times 1_B \\ Z \times A & \xleftarrow{1_Z \times \alpha} & Z \times C & \xrightarrow{1_Z \times \beta} & Z \times B \\ \downarrow \delta \times 1_A & & \downarrow \delta \times 1_C & & \downarrow \delta \times 1_B \\ Y \times A & \xleftarrow{1_Y \times \alpha} & Y \times C & \xrightarrow{1_Y \times \beta} & Y \times B \end{array}$$

sichert die Natürlichkeit dieser Festlegung. An diversen Stellen werden wir auf diese Erkenntnis zurückkommen, da sie jeweils die Funktorialität von M unmittelbar auf M_X vererbt.

Bisher haben wir vor allem explizit X -projektive Mackeyfunktoren und damit die Situation $M(X) \rightarrow M(*) \rightarrow 0$ studiert. Dies wollen wir nun für die induzierten Mackeyfunktoren untersuchen, d.h. wir betrachten die durch $p : X \rightarrow *$ induzierten natürlichen Transformationen

$$p_\times : M_X \rightarrow M \quad \text{und} \quad p^\times : M \rightarrow M_X.$$

In Anlehnung an bisherige Begriffsbildungen nennen wir einen Mackeyfunktor M

- natürlich X -projektiv, wenn die Sequenz $M_X \xrightarrow{p_\times} M \rightarrow 0$ spaltet, d.h. es existiert eine natürliche Transformation $s : M \rightarrow M_X$ mit $p_\times s = 1_M$.
- natürlich X -injektiv, wenn die Sequenz $0 \rightarrow M \xrightarrow{p^\times} M_X$ spaltet.

Es sei darauf hingewiesen, dass in [Dre73], wie auch sonst üblich, nur die Begriffe natürlich X -projektiv und natürlich X -injektiv betrachtet werden und das ohne den Zusatz 'natürlich'. Jedoch setzt dies jeweils die Existenz von Produkten voraus, was für uns nicht immer sinnvoll war, weswegen wir an diesen Stelle genauer differenzieren mussten. Offensichtlich sind aber natürlich X -projektive (injektive) Mackeyfunktoren auch X -projektiv (injektiv).

LEMMA 5.1.1. *Der Mackeyfunktorkomplex M_X ist natürlich X -injektiv. Induziert weiter die Diagonalabbildung $\Delta : X \rightarrow X \times X$ Morphismen $(1, \Delta \times 1)$ in $\tilde{\Omega}$, so ist M_X auch natürlich X -projektiv.*

BEWEIS. Die Komposition der Diagonalabbildung $\Delta : X \rightarrow X \times X$ gefolgt von der kanonischen Projektion $1_X \times p : X \times X \rightarrow X$ ist die Identität. Damit wird die Identität von X in $\tilde{\Omega}$ durch

$$(1_X \times p, 1_{X \times X}) \circ (\Delta, 1_X) : X \longrightarrow X \times X \longrightarrow X$$

sowie

$$(1_X, \Delta) \circ (1_{X \times X}, 1_X \times p) : X \longrightarrow X \times X \longrightarrow X$$

repräsentiert. Die Anwendung von M auf $(\Delta, 1_X)$, bzw. $(1_X, \Delta)$ liefert damit die gesuchten spaltenden natürlichen Transformationen von $\Delta^\times : M_{X \times X} \rightarrow M_X$ zu p^\times , bzw. $\Delta_\times : M_X \rightarrow M_{X \times X}$ zu p_\times . \square

LEMMA 5.1.2. *Ein Mackeyfunktorkomplex M ist genau dann natürlich X -injektiv, wenn M_X natürlich X -injektiv und M ein direkter Summand von M_X ist.*

Ebenso ist M genau dann natürlich X -projektiv, wenn M_X natürlich X -projektiv und M ein direkter Summand von M_X ist.

BEWEIS. Ist M natürlich X -injektiv, so ist M nach Definition ein direkter Summand von M_X . Nach Konstruktion ist M_X genau die Einschränkung von M auf Morphismen $(\beta \times 1_X, \alpha \times 1_X)$ und damit gleichermaßen natürlich X -injektiv. Dieselben Überlegungen gelten für den natürlich X -projektiven Fall.

Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung. Seien $i : M \rightarrow M_X$ und $r : M_X \rightarrow M$ die natürlichen Transformationen mit $r \circ i = 1_M$, die M zu einem direkten Summanden von M_X machen. Dann sind

$$i_X = i(X \times ?) : M(X \times ?) \rightarrow M(X \times X \times ?)$$

und

$$r_X = r(X \times ?) : M(X \times X \times ?) \rightarrow M(X \times ?)$$

natürliche Transformationen, die M_X zu einem direkten Summanden von M_{X^2} machen. Weiter sei S ein Spalt zu $P_\times : M_{X^2} \rightarrow M_X$ mit $P = 1_X \times p : X \times X \rightarrow X$. Dann ist $r \circ S \circ i_X = s$ ein Spalt zu p_\times .

Dies entnehmen wir folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 M_X & \xleftarrow{p_\times} & M & & \\
 i_X \downarrow & & \downarrow i & & \searrow 1 \\
 M_{X^2} & \xleftarrow{P_\times} & M_X & & \\
 & \searrow S & \downarrow 1 & & \\
 & & M_X & \xrightarrow{r} & M
 \end{array}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
 s \circ p_\times &= r \circ S \circ i_X \circ p_\times \\
 &= r \circ S \circ (1_X \times p)_\times \circ i \\
 &= r \circ S \circ P_\times \circ i \\
 &= r \circ 1_{M_X} \circ i \\
 &= r \circ i = 1_M.
 \end{aligned}$$

Aus dualen Überlegungen folgt entsprechend die zweite Aussage des Lemmas. \square

Eine genaue Betrachtung der Beweise von Theorem 3.1.5 und Folgerung 3.1.6 zeigen, dass analoge Aussagen auch im gegenwärtigen Kontext gelten.

THEOREM 5.1.3. *Sei A ein Greenfunktor und $p : X \rightarrow *$ die kanonische Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) A ist X -surjektiv, d.h. $p_* : A(X) \rightarrow A(*)$ ist surjektiv.
- (2) Jeder A -Modul M ist natürlich X -projektiv.
- (3) Jeder A -Modul M ist natürlich X -injektiv.

BEWEIS. Aussagen (2) und (3) implizieren nach Definition jeweils (1). Um zu sehen, dass auch die Umkehrungen gelten, zeigen wir die Natürlichkeit der Spalthomomorphismen aus Theorem 3.1.5. Dazu schreiben wir e_Y für $q_Y^*(e')$ aus $q_Y^* : A(X) \rightarrow A(X \times Y)$ und erhalten für die Spalthomomorphismen die Darstellungen

$$\pi : M \longrightarrow M_X \text{ mit } M(Y) \longrightarrow M_X(Y), m \longmapsto e_Y \cdot p_Y^\times(m)$$

zu p_\times und

$$\pi' : M_X \longrightarrow M \text{ mit } M_X(Y) \longrightarrow M(Y), m \longmapsto (p_Y)_\times(e_Y \cdot m)$$

zu p^\times .

Die Natürlichkeit rechnet man direkt nach. Dazu wollen wir einen Morphismus $(\beta, \alpha) : Y \leftarrow C \rightarrow Z$ betrachten. Dieser definiert durch Pullback entlang $p : X \rightarrow *$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{q_Z} & X \times Z & \xleftarrow{\beta_Z} & X \times C & \xrightarrow{\alpha_Y} & X \times Y \\
 p \downarrow & & p_Z \downarrow & & p_C \downarrow & & p_Y \downarrow \\
 * & \xleftarrow{q} & Z & \xleftarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\alpha} & Y.
 \end{array}$$

Wir werden $(\beta, 1)$ und $(1, \alpha)$ getrennt nachrechnen.

$$\begin{aligned} e_C \cdot p_C^\times(\beta^*(m)) &= q_C^\times(e') \cdot p_C^\times(\beta^*(m)) \\ &= (q_Z \beta_Z) 1^*(e') \cdot \beta_Y^*(p_Z^\times(m)) \\ &= \beta_Z^* q_Z^*(e') \cdot \beta_Y^*(p_Z^\times(m)) \\ &= \beta_Z^*(e_Z \cdot p_Z^\times(m)), \end{aligned}$$

was zunächst, neben den grundlegenden Eigenschaften von Mackeyfunktoren und der Paarung nur die Kommutativität des obigen Diagramms ausnutzt. In

$$\begin{aligned} e_Y \cdot p_Y^\times(\alpha_*(m)) &= q_Y^*(e') \cdot (\alpha_C)_* p_C^\times(m) \\ &= (\alpha_C)_*(\alpha_C^* q_Y^*(e') \cdot p_C^\times(m)) \\ &= (\alpha_C)_*(q_C^*(e') \cdot p_C^\times(m)) \end{aligned}$$

geht obendrein ein, dass $q_Y \circ \alpha_C = q_C = q_Z \circ \beta_Z$ gilt. Zusammen folgt die Natürlichkeit von π . Für π' rechnet man analog. \square

5.2. Amitsur-Kohomologie

An dieser Stelle führen wir kurz in die Konstruktion der Amitsur-Homologie und -Kohomologie ein und übertragen die für uns relevanten Ergebnisse aus [Dre73].

Mit Hilfe der durch die Projektionen $p_i : X^{n+1} \rightarrow X^n$,

$$(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

induzierten natürlichen Transformationen $p_{i \times}$ bilden wir den Amitsur-Komplex

$$0 \longleftarrow M_X \xleftarrow{d_1} M_{X^2} \xleftarrow{d_2} M_{X^3} \xleftarrow{d_3} \dots$$

mit Differential $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i p_{i \times}$. Die duale Konstruktion liefert den kontravarianten Amitsur-Komplex

$$0 \longrightarrow M_X \xrightarrow{d^1} M_{X^2} \xrightarrow{d^2} M_{X^3} \xrightarrow{d^3} \dots$$

mit Differential $d^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i p_i^\times$.

BEMERKUNG 5.2.1. *Nur unter den Voraussetzungen von Lemma 5.1.1 ist sichergestellt, dass der über $M \rightarrow M_X$ augmentierte Amitsur-Komplex eine projektive Auflösung von M darstellt.*

Entsprechendes gilt für den augmentierten kontravarianten Komplex. Nur unter obigen Voraussetzungen ist er als injektive Auflösung von M anzunehmen.

Wie üblich bildet man Homologie,

$$H_i^X(M) = \text{Kern}(d_i) / \text{Bild}(d_{i+1}),$$

Kohomologie

$$H_X^i(M) = \text{Kern}(d^{i+1}) / \text{Bild}(d^i).$$

Beide Amitsur-Komplexe lassen sich über die Augmentationen $\pi^\times : M \rightarrow M_X$, bzw. $\pi_\times : M^X \rightarrow M$ zu $\pi : X \rightarrow *$ vermöge

$$\begin{array}{ccc} M_X & \xrightarrow{\delta^0} & M_X \\ & \searrow \pi_\times & \nearrow \pi^\times \\ & & M \end{array}$$

und eines neuen Differentials

$$\delta^i = \begin{cases} d^i & \text{für } i > 0 \\ \delta^0 & \text{für } i = 0 \\ d_{-i} & \text{für } i < 0 \end{cases}$$

zu einem Komplex verbinden:

$$\dots \longrightarrow M_{X^2} \xrightarrow{\delta^{-1}} M_X \xrightarrow{\delta^0} M_X \xrightarrow{\delta^1} M_{X^2} \longrightarrow \dots$$

Damit definieren wir die Amitsur-Tate-Kohomologie

$$\hat{H}_X^i M = \text{Kern}(\delta^{i+1}) / \text{Bild}(\delta^i).$$

Unmittelbar ergibt sich für $i > 0$:

$$\hat{H}_X^i(M) = H_X^i(M) \quad \text{und} \quad \hat{H}_X^{-i-1}(M) = H_i^X(M).$$

LEMMA 5.2.2. Sowohl Amitsur-Homologie $H_i^X(M)$, Amitsur-Kohomologie $H_X^i(M)$ und Amitsur-Tate-Kohomologie $\hat{H}_X^i(M)$ eines Mackeyfunktors M an X sind selbst Mackeyfunktoren.

BEWEIS. Da M_X durch

$$M_X(\beta, \alpha) = M(1_X \times \beta, 1_X \times \alpha)$$

als Mackeyfunktors definiert ist und die Differentiale nur die ersten Faktoren berühren, kommutieren die entsprechenden Homomorphismen (siehe Diagramm 5.1.1). Damit sind die Kerne und Bilder in der Definition der (Ko-)Homologie selbst wohldefinierte Mackeyfunktoren. Gleiches gilt für ihre Quotienten. \square

SATZ 5.2.3. Induziere die Diagonalabbildung $\Delta : X \rightarrow X \times X$ Morphismen $(1, 1 \times \Delta)$ und sei M ein natürlich X -projektiver Mackeyfunktors. Dann ist der augmentierte Amitsur-Komplex von M an X

$$0 \longleftarrow M \xleftarrow{\epsilon} M_X \xleftarrow{d_1} M_{X^2} \xleftarrow{d_2} M_{X^3} \xleftarrow{d_3} \dots$$

azyklisch, so dass

$$H_n^X(M) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

gilt. Entsprechend ist der Wert von M an dem terminalen Objekt durch

$$M(*) \cong \text{Kokern}(d_1 : M(X^2) \rightarrow M(X))$$

bestimmt.

BEWEIS. Nach Lemma 5.1.1 und Lemma 5.1.2 ist M ein direkter Summand von M_X . Ist der augmentierte Amitsur-Kokomplex von M_X azyklisch, so auch der von M .

Mit Hilfe der Diagonalabbildung geben wir eine Kettennullhomotopie s in

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & M_X & \longleftarrow & (M_X)_X & \longleftarrow & (M_{X^2})_X & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow 1 & \searrow s_0 & \downarrow 1 & \searrow s_1 & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longleftarrow & M_X & \longleftarrow & (M_X)_X & \longleftarrow & (M_{X^2})_X & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

an. Es sei $s_n : (M_{X^n})_X = M(X^n \times X) \rightarrow M(X^{n+1} \times X) = (M_{X^{n+1}})_X$ der Wert des Morphismus $(-1)^{n+1}(1, \sigma)$ unter M , wobei

$$\sigma = 1_{X^n} \times \Delta : (x_0, \dots, x_n, x) \longmapsto (x_0, \dots, x_n, x, x).$$

Da hier das Differential $d_n = \sum_{i=0}^n p_{i \times}$ mit Hilfe der Projektionen

$$p_i : (x_0, \dots, x_n, x) \longmapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x)$$

definiert ist, erhält man

$$\begin{aligned} & s_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ s_n(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \\ &= s_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x) \right) \\ & \quad + d_{n+1} \left((-1)^{n+1} (x_0, \dots, x_n, x, x) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{i+n} (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x, x) \\ & \quad + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+n+1} (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x, x) \\ & \quad + (-1)^{n+1+n+1} (x_0, \dots, x_n, x) \\ &= (x_0, \dots, x_n, x). \end{aligned}$$

Damit verschwindet die Homologie des augmentierten Amitsur-Komplexes und wir erhalten für $n > 0$

$$H_n^X(M) = 0$$

sowie

$$M = H_0^X(M) = \text{Kokern}(d_1 : M_{X^2} \rightarrow M_X).$$

□

Eine duale Version des letzten Satzes gilt wegen der gesicherten Existenz der Diagonalabbildung allgemein für natürlich X -injektive Mackeyfunktoren.

SATZ 5.2.4. *Sei M ein natürlich X -injektiver Mackeyfunktorkomplex. Dann ist der zugehörige augmentierte kontravariante Amitsur-Komplex*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} M_X \xrightarrow{d^1} M_{X^2} \xrightarrow{d^2} M_{X^3} \xrightarrow{d^3} \dots$$

azyklisch und es gilt

$$H_X^n(M) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0. \end{cases}$$

Es folgt

$$M(*) \cong \text{Kern}(d^1 : M(X) \rightarrow M(X^2)).$$

BEWEIS. Dual zu Satz 5.2.3. □

Die letzten zwei Sätze beschreiben, dass in diesen Fällen der Wert von M an $*$ durch $M(X^2)$ und $M(X)$ bestimmt und mit Hilfe der Amitsur-Komplexe berechenbar ist.

5.3. Paarungen der Amitsur-Kohomologie

Wir wollen nun klären, unter welchen Umständen eine Paarung von Mackeyfunktoren eine Paarung auf ihrer Kohomologie induziert. Wesentlich wird sein, dass die Diagonalabbildung $\Delta : X \rightarrow X \times X$ den Morphismen $(\Delta \times 1, 1)$ in $\tilde{\Omega}$ induziert.

LEMMA 5.3.1. *Sei $\mu : M \times N \rightarrow L$ eine Paarung von Mackeyfunktoren. Dann induziert sie Paarungen*

$$M \times N_X \rightarrow L_X \quad \text{und} \quad M_X \times N \rightarrow L_X.$$

BEWEIS. Sei $p : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion. Dann sind die Paarungen durch

$$m \cdot n' = \mu(m, p^*(n')), \quad \text{bzw.} \quad m' \cdot n = \mu(p^*(m'), n)$$

für $m \in M(X \times Y)$, $n \in N(Y)$, $m' \in M(Y)$ und $n \in N(X \times Y)$ zu definieren.

Wir nutzen wieder Diagramm 5.1.1. Sei $f : Y \rightarrow Z$ aus G -FAS. Nun gilt

$$\begin{aligned} f_*(f^*(m) \cdot n') &= f_*\mu(f^*(m), p^*(n')) = \mu(m, f_*p^*(n')) \\ &= \mu(m, p^*f_*(n')) = m \cdot f_*(n'), \end{aligned}$$

genauso wie

$$f_*(m \cdot f^*(n')) = f_*\mu(m, f^*p^*(n')) = \mu(f_*(m), p^*(n')) = f_*(m) \cdot n'$$

und für allgemeine Morphismen $(f, 1) : Y \rightarrow Z$

$$\begin{aligned} f^*(m \cdot n') &= f^*(\mu(m, p^*(n'))) = \mu(f^*(m), f^*p^*(n')) \\ &= \mu(f^*(m), p^*f^*(n')) = f^*(m) \cdot f^*(n'). \end{aligned}$$

□

SATZ 5.3.2. Sei $\mu : M \times N \rightarrow L$ eine Paarung von Mackeyfunktoren. Dann induziert diese eine Paarung in der Amitsur-Kohomologie

$$\mu' : H_X^i(M) \times H_X^j(N) \rightarrow H_X^{i+j}(L).$$

BEWEIS. Mit Lemma 5.3.1 erhalten wir aus der Paarung $\mu : M \times N \rightarrow L$ auch Paarungen für

$$\mu : M_{X^{i+1}} \times N_{X^{j+1}} \longrightarrow L_{X^{i+1} \times X^{j+1}}.$$

Sowohl $M_{X^{i+1}} \times N_{X^{j+1}}$ als auch $L_{X^{i+1} \times X^{j+1}}$ bilden mit Differentialen auf den einzelnen Faktoren Doppelkomplexe, d.h. Komplexe in jedem Grad und Faktor. Zu einem Doppelkomplex hat man den Totalkomplex; hier

$$Tot_n(M \times N) = \bigoplus_{i+j=n} M_{X^{i+1}} \times N_{X^{j+1}}$$

mit Differential $\partial_n = d^{i+1} \times 1 + (-1)^i 1 \times d^{n-i+1}$

$$\partial_n : M_{X^{i+1}} \times N_{X^{j+1}} \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} M_{X^{i+1}} \times N_{X^{j+1}}.$$

Analog bildet man die Totalkomplexe $Tot_*(M \otimes N)$ und $Tot_*(L)$. Für Letztere induziert die Paarung eine lineare Kettenabbildung

$$\mu_* : Tot_*(M \otimes N) \longrightarrow Tot_*(L),$$

denn es gilt $\partial_n \mu_* = \mu_* \partial_n$. In Komposition mit

$$M_{X^{i+1}} \times N_{X^{j+1}} \longrightarrow M_{X^{i+1}} \otimes N_{X^{j+1}} \longrightarrow Tot_{i+j}(M \otimes N)$$

erhalten wir eine bilineare Abbildung in der Homologie

$$H_X^i(M) \times H_X^j(N) \longrightarrow H_{i+j}(Tot(L)).$$

Zuletzt konstruieren wir noch mit Hilfe der Diagonalabbildung eine Kettenabbildung

$$\tilde{\phi}^* : \bigoplus_{i+j=n} L_{X^{i+1} \times X^{j+1}} \longrightarrow L_{X^{n+1}},$$

das Bild von $(\phi, 1)$ unter L . Dabei sei

$$\phi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (x_0, \dots, x_i; x_i, \dots, x_n),$$

mit $(x_0, \dots, x_i; x_i, \dots, x_n) \in X^{i+1} \times X^{n-i+1}$. Diese gestattet es uns, unsere bisherige Abbildungskette um

$$\phi^* : H_{i+j}(Tot(L)) \longrightarrow H_X^{i+j}(L)$$

zu ergänzen. Zusammen resultiert eine wohldefinierte bilineare Abbildung in der Kohomologie

$$\tilde{\mu} : H_X^i M \times H_X^j N \longrightarrow H_X^{i+j}(L),$$

die auf Repräsentanten durch

$$\tilde{\mu}([m], [n]) = \phi^*[\mu(m, n)]$$

erklärt ist. Auch hier kommutieren die induzierten Morphismen f^* und f_* mit ϕ^* , da $\phi^* = (\phi^* \times 1_Y)^*$ und damit

$$\phi^* \circ f^* = (\phi \times f)^* = f^* \circ \phi^*$$

sowie

$$\phi^* f_* = L(\phi \times 1_Y, 1_X \times f) = f_* \circ \phi^*.$$

Damit vererben sich, wie schon in Lemma 5.2.2 und Lemma 5.3.1, die Eigenschaften einer Paarung unmittelbar auf $\tilde{\mu}$. \square

Um auch eine Paarung in der Amitsur-Tate-Kohomologie zu erhalten, benötigen wir noch Vorbereitungen.

Zum Morphismus $(f, 1) : Y \rightarrow X$ bezeichne $K_f M = \text{Kern}(f^* : M(X) \rightarrow M(Y))$ und zu $(1, f) : X \rightarrow Y$ entsprechend $I_f M = \text{Bild}(f_* : M(Y) \rightarrow M(X))$. Ist $\mu : M \times N \rightarrow L$ mit $m \cdot n = \mu(m, n)$ eine Paarung, so folgt unmittelbar aus den Axiomen

LEMMA 5.3.3. *Es gilt*

$$K_f M \cdot N \subset K_f L, \quad M \cdot K_f N \subset K_f L, \quad I_f M \cdot N \subset I_f L, \quad M \cdot I_f N \subset I_f L,$$

als auch

$$K_f M \cdot I_f N = 0 = I_f M \cdot K_f N.$$

LEMMA 5.3.4. *Sei $\pi : X \rightarrow *$. Dann gilt*

$$\hat{H}_X^0(M) \cong H_X^0(M) / I_{\pi \times 1}(H_X^0(M)).$$

BEWEIS. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\pi^*} & M_x & \longrightarrow & M_{X^2} \\ \pi_* \uparrow & \nearrow \delta^0 & \uparrow \pi' & & \uparrow \\ M_X & \longrightarrow & (M_X)_X & \longrightarrow & (M_X)_{X^2} \end{array}$$

in dem die untere Zeile nach Satz 5.2.3 exakt ist, so können wir erkennen, dass

$$M_X \cong H_X^0(M_X) \cong H_X^0(M)(X \times ?).$$

Nach Definition der Amitsur-Tate-Kohomologie in Grad 0 erhalten wir

$$\hat{H}_X^0(M) = H_X^0(M) / \text{Bild}(\pi' : H_X^0(M_X) \rightarrow H_X^0(M)).$$

Nun gilt aber $\text{Bild}(\pi') = I_{\pi \times 1}(H_X^0(M))$ und folglich

$$\hat{H}_X^0(M)(Y) = H_X^0(M)(Y) / I_{\pi \times 1_Y}(H_X^0(M)).$$

\square

SATZ 5.3.5. *Sei $\mu : M \times N \rightarrow L$ eine Paarung von Mackeyfunktoren. Dann induziert diese eine Paarung in den nicht negativen Grade der Amitsur-Tate-Kohomologie*

$$\hat{\mu} : \hat{H}_X^i(M) \times \hat{H}_X^j(N) \rightarrow \hat{H}_X^{i+j}(L),$$

$i, j \geq 0$.

BEWEIS. Nach Satz 5.3.2 erhalten wir eine Paarung für die nicht negativen Grade der gewöhnlichen Amitsur-Kohomologie. Aus den Feststellungen in Lemma 5.3.3 erhalten wir

$$I_\pi(H_X^0(M)) \cdot H_X^0(N) \subset I_\pi(H_X^0(L))$$

und damit die Wohldefiniertheit für $i, j = 0$.

Da für $j > 0$ nach Satz 5.2.3 $H_X^q(N_X) = 0$ ist, erkennen wir

$$H_X^q(N)(Y) = \text{Kern}(\pi^* : H_X^q(N)(X \times Y) \rightarrow H_X^q(N)(Y)) = K_\pi(N),$$

da $H_X^q(N)(Y) = 0$. Damit gilt nach Lemma 5.3.3

$$I_\pi(H_X^0(M)) \cdot H_X^q(N) = I_\pi(H_X^0(M)) \cdot K_\pi(H_X^q(N)) = 0,$$

wodurch die induzierte Paarung $\hat{H}_X^0(M) \times \hat{H}_X^q(N) \rightarrow \hat{H}_X^q(L)$ ebenso wohldefiniert ist. Da in höheren Graden kein Unterschied zwischen gewöhnlicher und Tate-Kohomologie besteht, ist somit auch eine Paarung in allen nicht negativen Graden erklärt. \square

Die Ursache, weshalb es nicht immer möglich ist, auch eine Paarung in negativen Graden zu definieren, liegt darin, dass unter unseren Annahmen in Ermangelung einer geeigneten Diagonalabbildung

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow M_X \longleftarrow M_{X^2} \longleftarrow \dots$$

keine projektive Auflösung von M darstellt.

BEMERKUNG 5.3.6. Sind sowohl $(\Delta \times 1, 1)$ und $(1, \Delta \times 1)$ Morphismen in $\tilde{\Omega}$, so ist $\hat{H}_X^i(M_X) = 0$ für alle Mackeyfunktoren M . Nun kann man eine Dimensionsverschiebung nutzen um auch Paarungen in negativen Graden der Amitsur-Tate-Kohomologie zu definieren. Siehe Dress [Dre73, Proposition 2.3].

LEMMA 5.3.7. Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Mackeyfunktoren. Dann induziert diese eine lange exakte Sequenz in Kohomologie, insbesondere in der Amitsur-Tate-Kohomologie

$$\dots \rightarrow \hat{H}_X^{n-1}(M'') \rightarrow \hat{H}_X^n(M') \rightarrow \hat{H}_X^n(M) \rightarrow \hat{H}_X^n(M'') \rightarrow \hat{H}_X^{n+1}(M') \rightarrow \dots$$

BEWEIS. Siehe Neukirch [Neu69, Satz 3.2] oder Weibel [Wei94, Theorem 1.3.1]. \square

Hieraus schließen wir auf die Möglichkeit der Dimensionsverschiebung. So seien zu einem Mackeyfunktoren M die Mackeyfunktoren

$$KM_X = \text{Kern}(p_\times : M_X \rightarrow M) \quad \text{und} \quad M/M_X = \text{Kokern}(p^\times : M \rightarrow M_X)$$

erklärt, die auch Brauer-Kern, bzw. Brauer-Kokern von M an X genannt werden. Diese kommen mit kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow KM_X \longrightarrow M_X \xrightarrow{p_\times} M \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{p^\times} M_X \longrightarrow M/M_X \longrightarrow 0,$$

die mit $\hat{H}_X^n(M_X) = 0$ die Dimensionsverschiebungen

$$\hat{H}_X^{n-1}(M/M_X) \cong \hat{H}_X^n(M) \cong \hat{H}_X^{n+1}(KM_X)$$

liefern. Siehe hierzu [**Dre73**].

5.4. Annulations-Theorem

Wir haben gerade die Amitsur-Tate-Kohomologie von Mackeyfunktoren eingeführt. Nun werden wir das Annulations-Theorem [**Dre73**, Theorem 2, S.204] für unsere Situation verallgemeinern.

Nach Definition der Amitsur-Tate-Kohomologie und nach Satz 5.3.5 ist $\hat{H}_X^p(M)$ für $p \geq 0$ ein $\hat{H}_X^0(U)$ -Modul sowie $\hat{H}_X^0(U)$ nach Konstruktion ein Basis-Greenfunctor.

Es sei \mathcal{F} eine kompakte Familie von Untergruppen, sowie $\{(K_i)\}_{i=1,\dots,n}$ die Menge der maximalen Klassen von \mathcal{F} und $X = \bigsqcup_{i=1,\dots,n} G/K_i$.

Zu $\mathcal{F} \cap \Phi G$ haben wir in $C(\Phi G, \mathbb{Z})$ das Idempotente $e_{\mathcal{F}}$:

$$e_{\mathcal{F}}(H) = \begin{cases} 1 & \text{für } H \in \mathcal{F} \cap \Phi G \\ 0 & \text{für } H \notin \mathcal{F} \cap \Phi G. \end{cases}$$

Ist q das kleinste gemeinsame Vielfache der Anzahl der Komponenten der Weylgruppen $W_G H$ für alle $H \leq G$, so gilt $q \cdot C(\Phi G, \mathbb{Z}) \subset A_G \subset C(\Phi G, \mathbb{Z})$, d.h. $q \cdot e_{\mathcal{F}} \in A_G$. Siehe auch [**tD87**, IV.6].

THEOREM 5.4.1. *Die Multiplikation mit q auf $\hat{H}_X^p(M)$ ist für $p \geq 0$ nilpotent, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$, so dass die Multiplikation mit q^m ganz $\hat{H}_X^p(M)$ annulliert.*

BEWEIS. Da $\hat{H}_X^p(M)$ ein $\hat{H}_X^0(U)$ -Modul ist, reicht es $q \cdot 1 = 0$ mit $1 \in \hat{H}_X^0(U)$ nachzuweisen. Die Eins in $\hat{H}_X^0(U)$ ist das Bild der Eins in $U(*)$ unter der Abbildung

$$p^* : U(*) \longrightarrow U(X) \cong \bigoplus_{i=1,\dots,n} U(G/K_i).$$

Es sei $K\mathcal{F}$ der Kern von p^* und $I\mathcal{F}$ das Bild von $p_* : U(X) \longrightarrow U(*)$. Wie schon erwähnt, sind beides Ideale in $U(*)$. Unmittelbar aus der Definition von $\hat{H}_X^0(U)$ folgt, dass $q \cdot 1$ nilpotent ist, wenn $q^m \cdot 1$ für ein m aus $K\mathcal{F} + I\mathcal{F}$ ist. Wir behaupten, das dies der Fall ist, falls wir $x \in K\mathcal{F}$ und $y \in I\mathcal{F}$ finden, so dass $q \cdot 1 - (x+y)$ im Nilradikal N von $U(*) = U_G$ liegt.

Seien also x und y wie gefordert mit $q \cdot 1 - (x+y) = n \in N$. Wir betrachten dann $q^m \cdot 1$ als

$$(q \cdot 1)^m = ((x+y) + n)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x+y)^k n^{m-k}.$$

Nun ist n nilpotent, d.h. für genügend großes m ist $n^m = 0$.

Nun sind $K\mathcal{F}$ und $I\mathcal{F}$ Ideale und folglich

$$q^m \cdot 1 = (x + y)^m + \binom{m}{1}(x + y)^{m-1}n + \cdots + \binom{m}{m-1}(x + y)n^{m-1}$$

aus $K\mathcal{F} + I\mathcal{F}$, was die Behauptung zeigt.

Die Inklusion

$$\psi_G : U_G \longrightarrow C(\Gamma G, \mathbb{Z}), [Z] \longmapsto (\psi_G(Z) : (H) \mapsto \chi(Z^H/WH))$$

gestattet eine alternative Beschreibung von $K\mathcal{F}$ und $I\mathcal{F}$, welche auch die hier gewählte Notation erklärt:

$$K\mathcal{F} = \{[Z] \mid \psi_L(Z)(K) = 0 \text{ für } K \leq L \in \mathcal{F}\}$$

ergibt sich unmittelbar, da $K\mathcal{F}$ ein Kern ist und

$$I\mathcal{F} = \{[Z] \mid \psi_G(Z)(H) = 0 \text{ für } H \notin \mathcal{F}\}$$

gilt, weil $I\mathcal{F}$ durch die Basiselemente $[G/K]$ mit $K \in \mathcal{F}$ aufgespannt wird. Da \mathcal{F} eine kompakte Familie ist, folgt $\psi_H(G/K) = 0$ für $H \notin \mathcal{F}$. Ist umgekehrt $[Z] = \sum n_L[G/L]$ und gilt $\psi_H(Z) = 0$ für $H \notin \mathcal{F}$, so gilt für ein maximales L mit nicht verschwindenden Koeffizienten n_L

$$\psi_L(Z) = n_L \psi_L(G/L) = n_L \neq 0$$

und somit $L \in \mathcal{F}$.

Die kanonische Abbildung $\pi : U_G \rightarrow \mathcal{A}_G$ hat das Nilradikal N als Kern

$$N = \{[Z] \mid \chi(Z^H) = 0 \text{ für alle } H \leq G\}.$$

Dies folgt aus der Inklusion

$$\phi : \mathcal{A}_G \longrightarrow C(\Phi G, \mathbb{Z}), [Z] \longmapsto (\phi(Z) : (H) \mapsto \chi(Z^H)).$$

Identifizieren wir \mathcal{A}_G vermöge ϕ mit seinem Bild in $C(\Phi G, \mathbb{Z})$ so folgt aus [tD87, IV. Proposition 6.15] $q \cdot C(\Phi G, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}_G$. Damit ist auch das q -Fache des Idempotenten $e_{\mathcal{F}} \in C(\Phi G, \mathbb{Z})$ ein Element in \mathcal{A}_G .

Für $q \cdot e_{\mathcal{F}}$ gilt $\phi(q \cdot e_{\mathcal{F}})(K) = q$ für $K \in \mathcal{F} \cap \Phi G$ sowie $\phi(q \cdot e_{\mathcal{F}})(H) = 0$ für $H \notin \mathcal{F} \cap \Phi G$ und liegt damit in $\pi(I\mathcal{F})$, entsprechend gilt $q(1 - e_{\mathcal{F}}) \in \pi(K\mathcal{F})$.

Sei y ein Urbild von $qe_{\mathcal{F}}$ in $I\mathcal{F} \subset U(*)$ und x ein Urbild von $q(1 - e_{\mathcal{F}})$ in $K\mathcal{F} \subset U_G$.

Wegen

$$\phi\pi(x) + \phi\pi(y) = \phi(qe_{\mathcal{F}}) + \phi(q(1 - e_{\mathcal{F}})) = q\phi(e_{\mathcal{F}} + 1 - e_{\mathcal{F}}) = q\phi(1) = \phi\pi(q \cdot 1)$$

liegt $q \cdot 1 - (x + y) =: n$ im Kern von π und ist folglich nilpotent. Somit liegt $q^m \cdot 1$ in $K\mathcal{F} + I\mathcal{F}$, was das Theorem beweist. \square

Es ist leider nicht klar, ob ein solches m unabhängig von \mathcal{F} gefunden werden kann. Für endliche G ist dies sicherlich $m = 1$, was schon in [Dre73] zu finden ist, was sich auch aus der nächsten Folgerung ergibt.

FOLGERUNG 5.4.2. *Sei A eine Greenfunktorenerweiterung des Burnside-Ringfunktors $A(G/H) = \mathcal{A}_H$ und M ein A -Modul. Dann wird $\hat{H}_X^*(M)$ durch die Multiplikation mit q annulliert.*

BEMERKUNG 5.4.3. *Betrachtet man den Beweis des letzten Theorems über \mathbb{Q} , so entspricht dies Theorem 4.2.5 für $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Somit enthält $\mathbb{Q} \otimes U_G$ selbst ein Idempotentes \tilde{e} zu \mathcal{F} . Für das entsprechende Idempotente $e \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{A}_G$ gilt $q \cdot e \in \mathcal{A}_G$. Ein einfaches Beispiel zeigt jedoch, dass daraus nicht immer $q \cdot e \in U_G$ folgt.*

Sei $G = SU(2)$ und \mathcal{F} die Familie der (topologisch-)zyklischen Untergruppen, d.h. die Untergruppen eines maximalen Torus $T \cong S^1$. Das rationale Idempotente \tilde{e} zu \mathcal{F} ist dann

$$\tilde{e} = \frac{1}{2}[G/T] + \frac{1}{4}[G/Z],$$

wobei Z das Zentrum von G ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Komponenten der Weylgruppen q ist 6 und damit $q \cdot \tilde{e} \notin U(*)$, wohl aber $q^2 \cdot \tilde{e}$.

Das Idempotente e zu \mathcal{F} in \mathcal{A}_G ist folglich $\frac{1}{2}[G/T]$ und damit $q \cdot e \in \mathcal{A}_G$.

Auch liegt kein Urbild von e im Kern $K\mathcal{F} = \{[Z] \mid [Z] = 0 \in U(G/T) = U(T)\}$, da

$$p^*(6[G/T] + \sum_{H < T} n_H[G/H]) = 12[T/T] - 6[T/Z] + \sum_{H < T} 2n_H[T/H].$$

Multiplikationstabellen für Eulerringe $U(H)$, $H \leq SU(2)$ und weitere grundlegende Informationen hierzu sind in [Hof00] zu finden.

Anhang

6.1. Grundbegriffe der äquivarianten Topologie

6.1.1. Notationen. An dieser Stelle wollen wir einige grundlegende Begriffe der äquivarianten Topologie zusammenstellen. Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe und alle betrachteten Untergruppen $H \leq G$ abgeschlossen und somit gleichermaßen kompakte Lie-Gruppen. Zu H haben wir den Normalisator

$$NH = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

und die Weyl-Gruppe $WH = NH/H$.

Zu G betrachten wir G -Räume (genauer kompakte erzeugte topologische Räume) X mit stetiger G -Operation $X \ni x \mapsto g.x$ für $g \in G$. Eine G -Abbildung ist eine G -äquivariante stetige Abbildung zwischen G -Räumen $f : X \rightarrow Y$, d.h. es gilt $g.f(x) = f(g.x)$. Zu $H \leq G$ bezeichnet $f^H : X^H \rightarrow Y^H$ die durch f auf den Fixpunkt Mengen induzierte WH -Abbildung, da

$$X^H = \{x \in X \mid h.x = x \text{ für } h \in H\}$$

und Y^H WH -Räume sind. Die Fixpunktmenge X^H enthält den WH -invarianten Teilraum

$$X_H = \{x \in X \mid g.x = x \text{ genau dann, wenn } g \in H\}.$$

Wir sagen $x \in X_H$ hat Standgruppe $G_x = H$. Die Menge der G -Orbits, die X^H , resp. X_H schneiden, notieren wir mit $G.X^H = X^{(H)}$, resp. $G.X_H = X_{(H)}$. Zu H beschreibt (H) auch die Konjugationsklasse

$$(H) = \{gHg^{-1} \leq G \mid g \in G\}$$

und wir sagen ein Orbit $G.x$ hat Orbittyp H , wenn $G.x \subset X_{(H)}$ gilt; insbesondere gilt dann $G.x \cong G/H$. Für die Orbiträume gilt $X^H/WH \cong X^{(H)}/G$ und $X_H/WH \cong X_{(H)}/G$.

6.1.2. G -Kofaserungen. Unter einem G -Paar (X, A) verstehen wir einen G -Raum X und einen abgeschlossenen G -invarianten Teilraum A . Ein G -Paar ist ein G -äquivarianter Umgebungsdeformationsretrakt, kurz G -NDR (Neighbourhood Deformation Retract), wenn es G -Abbildungen $u : X \rightarrow I$ und $h : X \times I \rightarrow X$ gibt, die für $a \in A$ und $x \in X$ folgende Eigenschaften haben.

- (1) $A = u^{-1}(0)$
- (2) $h(x, 0) = x$
- (3) $h(a, t) = a$ für $t \in I$
- (4) $h(x, t) \in A$ für $u(x) < t$.

Eine G -Abbildung $j : A \rightarrow X$ heißt G -Kofaserung, wenn $j(A)$ in X abgeschlossen ist und j für alle G -Räume Y die Homotopieerweiterungseigenschaft (HEE) hat. Dabei hat $j : A \rightarrow X$ für Y die HEE, wenn es zu jeder G -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und jeder G -Homotopie $h : A \times I \rightarrow Y$ eine Erweiterung $H : X \times I \rightarrow Y$ mit $H(x, 0) = f(x)$ in folgendem Diagramm gibt:

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{h} & Y \\ j \times 1 \downarrow & \nearrow H & \uparrow f \\ X \times I & \longleftarrow & X \end{array}$$

LEMMA 6.1.1. *Sei (X, A) ein G -Paar. So ist $i : A \subset X$ genau dann eine G -Kofaserung, wenn (X, A) ein G -NDR ist.*

BEWEIS. Analog dem gewöhnlichen Fall, siehe [Str66] sowie [Lüc89, I.1]. □

LEMMA 6.1.2. *Ist $j : A \rightarrow X$ eine G -Kofaserung, so ist $j : A \rightarrow j(A)$ ein G -Homöomorphismus und damit j eine abgeschlossene G -Einbettung.*

BEWEIS. Analog dem gewöhnlichen Fall, siehe [Ste67] sowie [Lüc89, I.1]. □

LEMMA 6.1.3. *Es sei $j : A \rightarrow X$ eine G -Kofaserung und $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann gilt:*

(1) *Sei $f : A \rightarrow A'$ eine G -Abbildung und*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ j \downarrow & & \downarrow J \\ X & \xrightarrow{F} & X' \end{array}$$

das entsprechende Pushout-Diagramm. Dann ist $J : A' \rightarrow X'$ auch eine G -Kofaserung.

(2) *j ist auch eine H -Kofaserung.*

(3) *$j^H : A^H \rightarrow X^H$ ist eine WH -Kofaserung.*

BEWEIS. Siehe [Lüc89, I.1]. □

6.1.3. G -CW Komplexe. Eine bedeutende Klasse von G -Räumen sind G -CW Komplexe. Für allgemeine Einführungen siehe [tD87, II.1], [Ill75], [Lüc89, I.1 und I.2] oder auch [Mat71].

Ein G -Paar (X, A) ist ein relativer G -CW Komplex, wenn eine Filtrierung

$$A = X_{-1} \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset \bigcup_n X_n = X$$

existiert, $\bigcup_n X_n$ die Kolimestopologie trägt und X_n aus X_{n-1} durch Anheften von G -Zellen $G/H_i \times D^n$ entsteht. An A heften wir vermöge eines Pushout-Diagramms

$$\begin{array}{ccc} G/H_i \times S^{n-1} & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/H_i \times D^n & \longrightarrow & X \end{array}$$

eine G -Zelle von Typ G/H_i an. Eine G -Abbildung zwischen G -CW Komplexen $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ heißt zellulär, wenn $F(X_n) \subset Y_n$ gilt.

Ist A leer, so ist X ein G -CW Komplex. Ein G -CW Komplex X ist genau dann endlich, wenn X/G kompakt ist.

Die Inklusion des n -Gerüsts $X_n \subset X$ ist eine G -Kofaserung. Entsteht X durch Anheften endlich vieler Zellen an A , so heißt (X, A) ein endlicher G -CW Komplex; ist A kompakt, so auch X .

THEOREM 6.1.4. *Sei M eine kompakte glatte G -Mannigfaltigkeit. Dann ist M triangulierbar und damit ein endlicher G -CW Komplex.*

BEWEIS. Siehe [III83]. □

THEOREM 6.1.5. *Sei $f : X \rightarrow Y$ ein G -Abbildung zwischen G -CW Komplexen. Dann gibt es eine G -Homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$, so dass $H_0 = f$ und H_1 zellulär ist.*

BEWEIS. Siehe Theorem 2.1 in [tD87, II.2]. □

SATZ 6.1.6. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine G -Abbildung zwischen G -CW Komplexen. Dann ist f genau dann eine G -Homotopieäquivalenz, wenn f^H für alle $H \leq G$ eine Homotopieäquivalenz ist.*

BEWEIS. Nach [tD79, 8.2.4] erfüllt ein G -CW Komplex die Voraussetzungen des folgenden Lemma 6.1.7. □

LEMMA 6.1.7. *Seien X_1 und X_2 G -Räume mit endlichem Orbittyp, so dass $X_i^{(H)} \setminus X_{i(H)} \subset X_i^{(H)}$ G -Kofaserungen und $(X_i)_H \rightarrow (X_i)_H/WH$ ein nummerierbares WH -Hauptfaserbündel sind, sowie $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ eine G -Abbildung. Dann ist φ genau dann eine G -h-Äquivalenz, wenn φ^H für alle $H \leq G$ eine gewöhnliche Homotopieäquivalenz ist.*

BEWEIS. Siehe [Lüc89, I.2]. □

THEOREM 6.1.8. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine G -Abbildung zwischen G -CW Komplexen und sei f^H für alle $H \leq G$ schwache Homotopieäquivalenz, d.h. f^H induziere Isomorphismen der Homotopiegruppen. Dann ist f eine G -Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Siehe Theorem 2.4 in [Lüc89, I.2]. □

FOLGERUNG 6.1.9. Sei X ein G -Raum, der die Voraussetzungen von Lemma 6.1.7 erfüllt. So hat X genau dann den Homotopietyp eines G -CW Komplex Y , wenn X^H den Homotopietyp eines CW Komplexes hat.

BEWEIS. Siehe Corollary 2.8 in [Lüc89, I.2]. \square

SATZ 6.1.10. Ein G -Raum X hat genau dann den Homotopietyp eines G -CW Komplexes, wenn er von einem G -CW Komplex Y dominiert wird, es gibt also G -Abbildungen $i : X \rightarrow Y$ und $r : Y \rightarrow X$ mit $ri \simeq 1_X$.

BEWEIS. Siehe Proposition 2.12 in [Lüc89, I.2] und Theorem 4.9 in [Wan80]. \square

6.1.4. G -Faserungen. Eine G -Abbildung $f : X \rightarrow B$ heißt G -Faserung, wenn f für alle G -Räume Y die Homotopiehochhebungseigenschaft (HHE) hat. Dabei hat f die HHE für Y , wenn es zu jeder Abbildung $\phi : Y \rightarrow X$ und jeder Homotopie $h : Y \times I \rightarrow B$ eine Hochhebung $H : Y \times I \rightarrow X$ mit Anfangsbedingung $f(y) = H(y, 0)$ in folgendem Diagramm gibt:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & X \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow f \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

Die Eigenschaft, eine G -Faserung zu sein, ist lokal, denn es gilt:

SATZ 6.1.11. Sei $f : X \rightarrow B$ eine G -Abbildung und $\{V_j \mid j \in J\}$ eine nummerierbare Überdeckung mit offenen G -Mengen. Ist die Einschränkung $p^{-1}(V_j) \rightarrow V_j$ für alle $j \in J$ eine G -Faserung, so auch f .

BEWEIS. Analog dem nicht äquivarianten Fall, vgl. Theorem 9.4 [tDKP70]. \square

LEMMA 6.1.12. Sei $f : X \rightarrow B$ eine G -Faserung und $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann gilt:

- (1) Sei $\psi : B' \rightarrow B$ eine G -Abbildung und

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\Psi} & X \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

das entsprechende Pullback-Diagramm. Dann ist $F : X' \rightarrow B'$ auch eine G -Faserung.

- (2) f ist auch eine H -Faserung.
(3) $f^H : X^H \rightarrow B^H$ ist eine gewöhnliche Faserung.
(4) $f : f^{-1}(B^H) \rightarrow B^H$ ist eine WH -Faserung.

BEWEIS. Siehe [tD87, I.7]. \square

Mit $G \times_H ?$ bezeichnen wir den Funktor, der einem H -Raum X den G -Raum $G \times_H X$ zuordnet. Dabei ist $G \times_H X$ der Orbitraum von $G \times X$ nach der H -Operation

$$h(g, x) \longmapsto (gh^{-1}, hx)$$

und erhält eine G -Operation durch die Multiplikation auf dem linken Faktor.

LEMMA 6.1.13. *Sei $H \leq G$. Dann ist jede G -Abbildung $p : X \rightarrow G/H$ eine G -Faserung.*

BEWEIS. Sei ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{\Psi} & G/H \end{array}$$

gegeben. Dies entspricht bis auf G -Homöomorphie einem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times_H B & \xrightarrow{\psi} & G \times_H A \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ G \times_H B' & \xrightarrow{\Psi} & G \times_H * \end{array}$$

mit H -Räumen $*$, A , B und B' , siehe Proposition 4.4 [tD87, I.4]. Nach Lashof [Las82] gibt es einen H -Homöomorphismus $\phi : B' \cong B \times I$, so dass wir mittels

$$\Phi : B' \xrightarrow{\phi} B \times I \xrightarrow{pr_B} B \xrightarrow{\psi} A$$

eine Hochhebung von Ψ durch $G \times_H \Phi$ erhalten. □

Theorem 4.4 in [tD87, I.4] sagt uns, dass eine G -Faserung $X \rightarrow G/H$ für eine kompakte Lie-Gruppe G durch den Funktor $G \times_H ?$ aus einer H -Abbildung $Z \rightarrow *$ entsteht, d.h. es gilt

$$X \cong G \times_H Z.$$

Ist Z ein endlicher H -CW Komplex, so ist X ein natürlicher endlicher G -CW Komplex. Daher ist es naheliegend zu fragen, wann bei einer G -Faserung $f : X \rightarrow B$ von G -CW Komplexen, X und B vom Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe sind.

Dies beantwortet der nächste Satz. Wir hatten schon in Satz 6.1.10 gesehen, dass ein G -Raum X genau dann vom G -Homotopietyp eines G -CW Komplexes ist, wenn er von einem G -CW Komplex dominiert wird.

Eine G -Faserung $f : X \rightarrow B$ heißt *faserweise schwach endlich*, wenn für alle $b \in B$ die Fasern $F_b = f^{-1}(b)$ als G_b -Räume G_b -homotopieäquivalent zu endlichen G_b -CW Komplexen sind.

SATZ 6.1.14. Sei B ein G -Raum, der von einem endlichen G -CW Komplex dominiert wird und $f : X \rightarrow B$ eine G -Faserung, so dass für alle $b \in B$ die Fasern $F_b = f^{-1}(b)$ als G_b -Raum G_b -homotopieäquivalent zu einem endlichen G_b -CW Komplex sind. Dann ist auch X von einem endlichen G -CW Komplex dominiert. Ist B vom G -Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplexes, so auch X .

BEWEIS. Siehe Lemma 1.2 und Corollary 2.5 in [Sum91]. \square

Eine G -Faserung mit Eigenschaften wie in Satz 6.1.14 heißt faserweise schwach endlich.

Unmittelbar aus der Definition einer Faserung folgt, dass, wenn

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\Phi} & X \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{\phi} & B \end{array}$$

ein Pullback ist und f eine Faserung, ebenso F eine Faserung ist.

SATZ 6.1.15. Sind im obigen Pullback-Diagramm B, B' und X von h -äquivalent zu endlichen G -CW Komplexen sowie f eine faserweise schwach endliche G -Faserung, dann sind dies auch X' und F .

BEWEIS. Zunächst ist festzuhalten, dass in diesem Fall auch X' von einem G -CW Komplex dominiert wird. Ist X endlich dominiert, so auch X' . Beide sind als Ergebnisse von Sumi in [Sum91] zu finden. Damit ist Satz 6.1.14 anwendbar und die Behauptung folgt unmittelbar. \square

SATZ 6.1.16. Der G -Homotopietyp von X' und die G -Homotopieklassen von F sind invariant unter G -Homotopien von f und ϕ .

BEWEIS. Da X' und Y' vom Homotopietyp G -CW Komplexe sind, ist dieser nach Theorem 6.1.8 durch schwache Homotopieäquivalenzen bestimmt. Aus den langen exakten Homotopie-Sequenzen der Faserungen ϕ^H und Φ^H erhalten wir Mayer-Vietoris Sequenzen der Pullback-Diagramme, siehe [Sel97, p. 78]. Sei $h : X \times I \rightarrow B$ eine G -Homotopie mit $h_0(x) = \phi$, so ist $i_0 : X \subset X \times I$ ein starker Deformationsretrakt und induziert damit die Identität in

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(X'^H) & \longrightarrow & \pi_n(X^H) \oplus \pi_n(B'^H) & \longrightarrow & \pi_n(B^H) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow i_{0*} \oplus 1 & & \downarrow 1 \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_n((X \times I)^H) & \longrightarrow & \pi_n((X \times I)^H) \oplus \pi_n(B'^H) & \longrightarrow & \pi_n(B^H) \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow 1 & & \uparrow i_{1*} \oplus 1 & & \uparrow 1 \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_n(Y'^H) & \longrightarrow & \pi_n(X^H) \oplus \pi_n(B'^H) & \longrightarrow & \pi_n(B^H) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Gleiches gilt für i_1 und $\psi = h_1$ mit Pullback Y' an Stelle von X' . Nach Theorem 6.1.8 haben X' und Y' den gleiche Homotopietyp.

Die gleiche Argumentation zeigt die Behauptung auch für eine Homotopie von f . \square

FOLGERUNG 6.1.17. Sei $\sigma : Y \rightarrow X$ eine h -Äquivalenz, d.h. σ ist eine gewöhnliche h -Äquivalenz und

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

kommutiert. Dann ist die durch das Pullback in Satz 6.1.15 induzierte G -Abbildung $\sigma' : X' \rightarrow Y'$ eine h -Äquivalenz.

BEWEIS. Wieder nutzen wir die Mayer-Vietoris Sequenz aus Folgerung 6.1.16.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(X'^H) & \longrightarrow & \pi_n(X^H) \oplus \pi_n(B'^H) & \longrightarrow & \pi_n(B^H) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \sigma'^H_* & & \downarrow \sigma_*^H \oplus 1 & & \downarrow 1 \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_n(Y'^H) & \longrightarrow & \pi_n(Y^H) \oplus \pi_n(B'^H) & \longrightarrow & \pi_n(B^H) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Aus dem Fünfer-Lemma folgt, dass alle senkrechten Abbildungen für $n \geq 1$ Isomorphismen sowie Bijektionen für $n = 0$ sind und damit σ' eine h -Äquivalenz. \square

FOLGERUNG 6.1.18. Sei $f' : C' \rightarrow B'$ eine h -Äquivalenz von kompakten G -ENR und $\phi : X \rightarrow B$ ein kompakter G -ENR $_B$. Dann ist die durch das Pullback

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xrightarrow{F'} & X' & \xrightarrow{F} & X \\ \Psi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ C' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

wie in Satz 6.1.15 induzierte G -Abbildung $F' : Y' \rightarrow X'$ eine h -Äquivalenz von kompakten G -ENR.

BEWEIS. Folgt genauso wie Folgerung 6.1.17 mit Hilfe der Mayer-Vietoris Sequenz. \square

6.1.5. G -Kofaserungen über B . Eine G -Kofaserung über einem Basisraum B ist durch ein kommutatives Diagramm von G -Räumen

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

mit abgeschlossenem Bild $j(A) \subset X$ gegeben, welche die HEE für alle G -Räume $Y \rightarrow B$ über B hat. Ist $f : X \rightarrow B$ eine G -Abbildung und $A \subset X$ eine G -Kofaserung, so nennen wir (X, A, f) einen G -Umgebungsdeformationsretrakt über B , kurz G -NDR $_B$.

LEMMA 6.1.19. Ist $j : A \rightarrow X$ eine G -Kofaserung über B . Dann gilt: Sei $f : A \rightarrow A'$ eine G -Abbildung über B und

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ j \downarrow & & \downarrow J \\ X & \xrightarrow{F} & X' \end{array}$$

das entsprechende Pushout-Diagramm. Dann ist $J : A' \rightarrow X'$ auch eine G -Kofaserung über B .

BEWEIS. Folgt aus der universellen Eigenschaft des Pushouts zusammen mit Lemma 6.1.3. \square

LEMMA 6.1.20. Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f : X \rightarrow B$ eine G -Abbildung. So ist $i : A \subset X$ genau dann eine G -Kofaserung über B , wenn es eine Retraktion r mit

$$1 : X \times \{0\} \cup A \times I \xrightarrow{i} X \times I \xrightarrow{r} X \times \{0\} \cup A \times I$$

gibt, so dass $f = f \circ i \circ r$ gilt.

BEWEIS. Analog dem gewöhnlichen, nicht-äquivarianten Fall, siehe dazu [CJ98, Proposition 4.1]. \square

FOLGERUNG 6.1.21. Sei (X, A, f) ein G -NDR $_B$ und $\phi : B \rightarrow C$ eine G -Abbildung. Dann ist $(X, A, \phi f)$ ein G -NDR $_C$.

BEWEIS. Die Komposition mit ϕ macht die nach Lemma 6.1.20 existierende Retraktion über B zu einer über C . \square

FOLGERUNG 6.1.22. Sei (X, A, f) ein G -NDR $_B$ und $\psi : B' \rightarrow B$ eine G -Abbildung. Sei weiter

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{c} & X' & \xrightarrow{F} & B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi \\ A & \xrightarrow{c} & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

ein Diagramm von Pullbacks. Dann ist (X', A', F) ein G -NDR $_{B'}$.

BEWEIS. Ist $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ eine Retraktion über B , so definiert das Pullback

$$\begin{array}{ccccc} X' \times I & \xrightarrow{R} & X' \times \{0\} \cup A' \times I & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi \\ X \times I & \xrightarrow{r} & X \times \{0\} \cup A \times I & \longrightarrow & B \end{array}$$

eine Retraktion R , die $A' \subset X' \xrightarrow{F} B'$ zu einem G -NDR $_D$ macht. \square

Wir wollen nun das Zusammenspiel von kompakten G -ENR, G -Faserungen und G -Kofaserungen studieren.

LEMMA 6.1.23. Sei $q : A \subset X$ eine G -Kofaserung, $f : X' \rightarrow X$ eine G -Faserung und

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{F} & A \\ Q \downarrow & & \downarrow q \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

ein Pullback-Diagramm von G -Abbildungen zwischen kompakten G -ENR. Dann ist auch $Q : A' \subset X'$ eine G -Kofaserung.

BEWEIS. Für den nicht-äquivarianten Fall siehe auch [Whi78, I.7.14].

Wir betrachten (X, A) als G -NDR und haben dies auch für (X', A') nachzuweisen. Seien also $u : X \rightarrow I$ und $h : X \times I \rightarrow X$ die nötigen G -Abbildungen zu (X, A) . Dann liefert die HHE in

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{1} & X' \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow f \\ X' \times I & \xrightarrow{h \circ (1 \times f)} & X \end{array}$$

eine G -Abbildung $H : X' \times I \rightarrow X'$ und wir definieren

$$h'(x', t) = \begin{cases} H(x', t) & \text{für } t \leq u(f(x')) \\ H(f(x'), u(f(x'))) & \text{für } t \geq u(f(x')) \end{cases}$$

und $u' = u \circ f$. Diese erfüllen die Bedingungen um (X', A') als G -NDR zu erkennen. Offensichtlich gilt für $x' \in X'$ und $a' \in A'$

$$A' = u'^{-1}(A), \quad h'(x', 0) = x' \quad \text{und} \quad h'(a', t) = a'.$$

Wir zeigen noch $h'(x', t) \in A'$ für $x' \in X'$ mit $u'(x') < t$. Nach Definition von h' gilt

$$fh'(x', t) = fH(x', u'(x')) = h(f(x'), u(f(x'))),$$

und für $s > u(p(x'))$ ist nach Voraussetzung $h(s, f(x')) \in A$. Da aber A abgeschlossen in X ist, folgt $fh'(x', t) = h(u(f(x')), f(x')) \in A$ und $h'(x', t) = H(x', u'(x')) \in f^{-1}(A) = A'$. Somit ist $A' \subset X'$ ein G -NDR. \square

LEMMA 6.1.24. Es sei $\varphi : B' \rightarrow B$ eine G -Abbildung und

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{q} & X_2 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X_1 & \xrightarrow{Q} & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

ein Pushout-Diagramm von G -Abbildungen zu dem die Kompositionen

$$X_i \longrightarrow X \xrightarrow{f} B$$

mit f_i , $i = 0, 1, 2$ notiert seien. Nach Pullback entlang φ von f_i und f ergibt sich wieder ein Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \xrightarrow{q'} & X'_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'_1 & \xrightarrow{Q'} & X' \xrightarrow{F} B'. \end{array}$$

BEWEIS. Wegen der Transitivität von Pullbacks können wir $X = B$ und $X' = B'$ annehmen. Sei weiter $\bar{X} = X'_1 \cup_{X'_0} X'_2$ das Pushout von $X'_1 \leftarrow X'_0 \rightarrow X'_2$. Dann liefern die universellen Eigenschaften der Pushouts und Pullbacks eine stetige, bijektive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\psi} & X' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B'. \end{array}$$

Doch ist ψ nur die Einschränkung des Homöomorphismus

$$X' \times X_1 \cup_{X' \times X_0} X' \times X_2 \longrightarrow X' \times X$$

auf $\{(x', x) \mid \varphi(x') = x\} \cong \bar{X}$ und damit auch offen. □

6.2. Additive Invarianten

6.2.1. Universelle additive Invarianten. Eine additive Invariante für die Kategorie der endlichen G -Komplexe $f : Z \rightarrow X$ über einem G -Raum X besteht aus einer abelschen Gruppe A und einer Zuordnung a , die jeder G -Abbildung f von einem endlichen G -CW Komplex Z in einen G -Raum X ein Element $a(f) \in A$ zuordnet und folgende Axiome erfüllt:

Invarianz: Für zwei Objekte $f : Z \rightarrow X$ und $f' : Z' \rightarrow X$ mit einer G -Homotopieäquivalenz $\sigma : Z \rightarrow Z'$ mit $f'\sigma \simeq f$, gilt $a(f) = a(f')$.

Additivität: Seien Z_i , $i = 0, 1, 2$ endliche G -Komplexe, Z_0 ein Unterkomplex von Z_1 und $Z_0 \rightarrow Z_1$ eine abgeschlossene G -Kofaserung sowie

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \rightarrow & Z_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_2 & \rightarrow & Z \end{array}$$

ein Pushout endlicher G -Komplexe. Für eine G -Abbildung $f : Z \rightarrow X$ und die durch Komposition resultierenden Abbildungen $f_i : Z_i \rightarrow X$ gilt $a(f) + a(f_0) = a(f_1) + a(f_2)$.

Normierung: Für das initiale Objekt $\emptyset : \emptyset \rightarrow X$ gilt $a(\emptyset) = 0$.

Eine additive Invariante (A, a) heißt universell, wenn zu jeder additiven Invariante (B, b) ein Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ mit $\varphi a = b$ existiert. Je zwei universelle additive Invarianten sind isomorph. Mittels folgender Grothendieck-Konstruktion lässt sich die Existenz zeigen. Sei F die freie abelsche Gruppe mit einer Basis aus G -Homotopieäquivalenzklassen $[f]$ endlicher G -Komplexe $f : Z \rightarrow X$ über X . Weiter sei N die Untergruppe, erzeugt durch $[\emptyset : \emptyset \rightarrow X]$ und Elemente $[f] + [f_0] - [f_1] - [f_2]$ für Pushouts wie in den Axiomen beschrieben. Die resultierende Faktorgruppe F/N mit der Zuordnung $f \mapsto [f] \in F/N$ ist offensichtlich eine universelle additive Invariante.

Wir geben noch eine weitere Beschreibung einer universellen additiven Invarianten.

So wie im gewöhnlichen äquivarianten Fall ($X = *$) homogene Räume G/H die Rolle von Punkten im nichtäquivarianten Fall einnehmen, sind es nun G -Abbildungen $G/H \rightarrow X$. Diese werden wir näher studieren. Dazu ist es sinnvoll die Komponenten-Kategorie $\pi_0(G, X)$ zu betrachten. Die Objekte sind G -Homotopieklassen von Abbildungen $\alpha : G/H \rightarrow X$. Ein Morphismus $\sigma : [\alpha] \rightarrow [\beta]$ zwischen zwei Klassen $[\alpha : G/H \rightarrow X]$ und $[\beta : G/K \rightarrow X]$ ist eine G -Abbildung $\sigma : G/H \rightarrow G/K$, so dass α G -homotop zu $\beta\sigma$ ist. Die Komposition zweier Morphismen ist die offensichtliche, welche durch die Komposition der entsprechenden G -Abbildungen definiert ist.

Da $\alpha : G/H \rightarrow X$ durch das Bild von der Nebenklasse eH bestimmt ist, können Objekte der Form $[G/H \rightarrow X]$ in $\pi_0(G, X)$ und Wegekompenten $\pi_0(X^H)$ von X^H miteinander identifiziert werden. Die Restriktion der NH -Operation auf X^H induziert eine Operation auf $\pi_0(X^H)$ mit dem Stabilisator $N_\alpha H$ der Komponente von $\alpha(eH)$. Dann ist die Abbildung $\varphi : N_\alpha H \rightarrow \text{Aut}(f)$ mit $\varphi(n) = (eH \mapsto nH)$ surjektiv und hat den Kern H , d.h. $\text{Aut}(\alpha) \cong N_\alpha H/H =: W_\alpha H$.

Für einen endlichen G -Komplex $f : Z \rightarrow X$ über X zerlegen wir nun die Fixpunktmenge Z^H entsprechend der induzierten Abbildung $\pi_0(f^H) : \pi_0(Z^H) \rightarrow \pi_0(X^H)$. Wir bezeichnen $Z^{f,\alpha}$ als die Vereinigung der Komponenten im Urbild von $\pi_0(\alpha)$ unter $\pi_0(f^H)$. Gemäß der Konstruktion ist $Z^{f,\alpha}$ ein $N_\alpha H/H$ -Raum.

Eine Äquivalenzrelation auf endlichen G -Komplexen über X wird uns zur universellen additiven Invarianten $U(X)$ führen. Dazu nennen wir zwei $f_i : Z_i \rightarrow X$ mit $i = 0, 1$ genau dann äquivalent, wenn für alle $\alpha : G/H \rightarrow X$ die Gleichheit $\chi(Z_0^{f_0,\alpha}/W_\alpha H) = \chi(Z_1^{f_1,\alpha}/W_\alpha H)$ für Euler-Charakteristiken gilt. Die Menge der Äquivalenzklassen $[f]$ bezeichnen wir mit $U(X)$, die durch disjunkte Vereinigung zu einer abelschen Gruppe mit neutralem Element $[\emptyset \rightarrow X]$ wird. Sei Y ein endlicher CW-Komplex mit trivialer G -Operation und Euler-Charakteristik $\chi(Y) = -1$. Dann wird das inverse Element einer Klasse $[f : Z \rightarrow X]$ durch $Z \times Y \rightarrow Z \rightarrow X$ repräsentiert.

Zum Schluss dieses Abschnitts notieren wir noch die Ergebnisse aus [tD87], um $U(X)$ als universelle additive Invariante zu erkennen.

SATZ 6.2.1. (i) Seien $f_i : Z_i \rightarrow X$ mit $i = 0, 1$ gegeben und $\sigma : Z_0 \rightarrow Z_1$ eine G -Homotopieäquivalenz, so dass $f_1 \sigma$ G -homotop zu f_0 ist. Dann ist $[f_0] = [f_1]$.

(ii) Seien Z_i , $i = 0, 1, 2$ endliche G -Komplexe, $Z_0 \rightarrow Z_1$ eine G -Kofaserung und

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \rightarrow & Z_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_2 & \rightarrow & Z \end{array}$$

ein Pushout endlicher G -Komplexe. Für eine G -Abbildung $f : Z \rightarrow X$ und durch Komposition resultierende Abbildungen $f_i : Z_i \rightarrow X$ gilt dann $a(f) + a(f_0) = a(f_1) + a(f_2) \in U(X)$.

BEWEIS. Siehe Proposition 1.15 [tD87, IV]. □

Für $f : Z \rightarrow X$ und $\alpha : G/H \rightarrow X$ definieren wir $Z_{f,(\alpha)} \subset Z_{(H)}$ als den G -Teilraum der Orbits $C \subset Z$, für die $f|_C : C \rightarrow X$ in $\pi_0(G, X)$ isomorph zu $\alpha : G/H \rightarrow X$ ist.

SATZ 6.2.2. $U(X)$ ist eine freie abelsche Gruppe mit einer Basis, bestehend aus den Isomorphieklassen $[\alpha]$ von Objekten in $\pi_0(G, X)$. Für $f : Z \rightarrow X$ gilt in $U(X)$ die Gleichheit

$$[f] = \sum_{[\alpha]} \chi_c(Z_{f,(\alpha)}/G)[\alpha].$$

BEWEIS. Siehe Proposition 1.16 [tD87, IV]. □

Die Restriktion von $f : Z \rightarrow X$ auf eine offene i -Zelle $G/H \times E^i \subset Z$ definiert ein Objekt $\alpha : G/H \rightarrow X$ und damit auch eine Isomorphieklass $[\alpha]$ in $\pi_0(G, X)$. Sei $n(\alpha, i)$ die Anzahl der i -Zelle von Z , die die gleiche Klasse $[\alpha]$ definiert und $n(\alpha)$ die alternierende Summe $\sum_i (-1)^i n(\alpha, i)$.

SATZ 6.2.3. Sei (A, a) eine additive Invariante für endliche G -Komplexe über X . Dann gilt für $f : Z \rightarrow X$ die Gleichheit

$$a(f) = \sum_{[\alpha]} n(\alpha) a(\alpha),$$

wobei die Summe über alle Isomorphieklassen von Objekten in $\pi_0(G, X)$ läuft.

BEWEIS. Siehe Proposition 1.18 [tD87, IV]. □

FOLGERUNG 6.2.4. $U(X)$ ist eine universelle additive Invariante.

BEWEIS. Nach Satz 6.2.1 ist $U(X)$ eine additive Invariante. Damit gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow U(X)$, der nach Satz 6.2.3 surjektiv ist. Er ist aber auch injektiv, was aus Satz 6.2.2 folgt. □

LEMMA 6.2.5. Sei $g : X \rightarrow Z$ eine G -Abbildung zwischen G -Räumen. Dann induziert die Komposition mit g auf Repräsentanten $\phi : W \rightarrow X$ eine wohldefinierte Abbildung

$$g_* : U(X) \longrightarrow U(Z), [\phi] \longmapsto [g \circ \phi],$$

die Induktion entlang g .

BEWEIS. Die Komposition mit ϕ ist G -homotopieinvariant und ändert nicht die Additivitäts-Relationen. Daher ist die induzierte Abbildung wohldefiniert und additiv. □

LEMMA 6.2.6. Sei $\phi : Y \rightarrow X$ eine faserweise schwach endliche G -Faserung zwischen G -Räumen vom Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe. Dann induzieren Pullbacks auf Repräsentanten $f : Z \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{\Phi} & Z \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

entlang ϕ die wohldefinierte Abbildung

$$\phi^* : U(X) \longrightarrow U(Y), [f] \longmapsto [F],$$

die Restriktion entlang ϕ

BEWEIS. Da ϕ faserweise schwach endlich und Y von G -Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplexes ist, hat Z' auch den G -Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplexes, wie in Satz 6.1.15 gezeigt. Folgerung 6.1.16 und 6.1.18 implizieren, dass die Zuordnung

$$[f : Z \rightarrow X] \longmapsto [F : Z' \rightarrow Y]$$

auf h -äquivalenten Repräsentanten wohldefiniert ist. Lemma 6.1.23 und Lemma 6.1.24 besagen, dass ein Pushout-Diagramm der Additivitätsrelationen von $U(X)$ unter Pullbacks entlang Faserungen wieder in ein solches überführt wird. Somit ist ϕ^* additiv und letztlich wohldefiniert. □

FOLGERUNG 6.2.7. Sei X die disjunkte Vereinigung von X_1 und X_2 mit Inklusionen $i_j : X_j \rightarrow X$, $j = 1, 2$. Dann ist

$$U(X_1) \oplus U(X_2) = U(X).$$

BEWEIS. Die Abbildungen $i_j^* : U(X) \rightarrow U(X_j)$ und $(i_j)_* : U(X_j) \rightarrow U(X)$ bilden die Projektionen und Inklusionen der direkten Summen. \square

LEMMA 6.2.8. Das Produkt zweier G -Abbildungen $f : Y \rightarrow X$ und $f' : Y' \rightarrow X'$ induziert eine bilineare Abbildung

$$m : U(X) \times U(X') \longrightarrow U(X \times X'), \quad ([f], [f']) \longmapsto [f \times f'].$$

BEWEIS. Die Abbildung m ist bilinear, da sie in beiden Variablen linear ist. So entsteht $m(?, f')$ mit $f' : Y' \rightarrow X'$ als Komposition

$$U(X) \xrightarrow{(1_X \times \text{pr}_{Y'})^*} U(X \times Y') \xrightarrow{(1_X \times f')^*} U(X \times X').$$

Entsprechend ist $m(f, ?)$ die Komposition

$$U(X') \xrightarrow{(\text{pr}_Y \times 1_{X'})^*} U(Y \times X') \xrightarrow{(f \times 1_{X'})^*} U(X \times X').$$

\square

Für $X = G/G = *$ heißt $U(X) = U_G$ der Eulerring von G , er ist ein Funktor für Inklusionen $H \leq G$.

Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G , so gibt es entsprechende additive Invarianten für H . Für den Rest dieses Abschnitts wollen wir daher die Gruppe H als Zusatz mit notieren: U^H , bzw U^G für G selbst.

SATZ 6.2.9. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G und X ein H -Raum. Dann induziert der Funktor $G \times_H ?$ den kanonischen Isomorphismus

$$U^H(X) \rightarrow U^G(G \times_H X), \quad [f : Z \rightarrow X] \mapsto [G \times_H f : G \times_H Z \rightarrow G \times_H X].$$

Insbesondere gilt $U^G(G/H) \cong U^H(*) = U_H$.

BEWEIS. Siehe Proposition IV.1.21 [tD87]. \square

6.2.2. Fibrante additive Invarianten. Seien X, Y und Z G -Räumen vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe. Eine linksseitig-fibrante G -Abbildung ist eine G -Abbildung $F : Z \rightarrow X \times Y$, so dass die Projektion auf den ersten Faktor $F_X : Z \rightarrow X$ eine faserweise schwach endliche G -Faserung ist. Im Hinblick auf die Verwendung dieser Abbildungen notieren wir f als

$$(F_Y, F_X) : X \leftarrow Z \rightarrow Y.$$

Auch für diese Klasse von G -Abbildungen gibt es spezielle additive Invarianten.

Eine additive Invariante für linksseitig-fibrante G -Abbildungen $F : Z \rightarrow X \times Y$ ist ein Paar $(A(X, Y), a)$, bestehend aus einer abelschen Gruppe $A(X, Y)$ und einer Zuordnung a , die jeder Abbildung F ein Element $a(F) \in A(X, Y)$ zuordnet und folgende Axiome erfüllt:

Invarianz. Für zwei Objekte $F : Z \rightarrow X \times Y$ und $F' : Z' \rightarrow X \times Y$, so dass es eine G -Homotopieäquivalenz $\sigma : Z \rightarrow Z'$ mit $F'\sigma \simeq F$ gibt, gilt $a(F) = a(F')$.

Additivität. Sei
$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \longrightarrow & Z_2 \\ \cap \downarrow & & \downarrow \\ Z_1 & \longrightarrow & Z' \xrightarrow{F} X \times Y \end{array}$$
 ein

Pushout und $F_i : Z_i \rightarrow X \times Y$ resultierende linksseitig-fibrante G -Abbildungen für $i = 0, 1, 2$ sowie $(Z_1, Z_0, pr_X F_1)$ eine G -Kofaserung über X . Dann gilt $a(F) + a(F_0) = a(F_1) + a(F_2)$.

Normierung. Für $\emptyset : \emptyset \rightarrow X \times Y$ gilt $a(\emptyset) = 0$.

Eine linksseitig-fibrante universelle additive Invariante ist dann eine additive Invariante (U_{fib}, u) , so dass jede additive Invariante (A, a) vermöge eines Homomorphismus $\varphi : U_{fib} \rightarrow A$ entsteht.

Eine Grothendieck-Konstruktion analog zu 6.2.1 sichert ihre Existenz. Zwei linksseitig-fibrante G -Abbildungen $Z \rightarrow X \times Y$ und $Z' \rightarrow X \times Y$ sind äquivalent, wenn eine G -Homotopieäquivalenz σ existiert, so dass

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\sigma} & Z' \\ & \searrow & \swarrow \\ & X \times Y & \end{array}$$

bis auf G -Homotopie kommutiert. Es sei \mathcal{F} die freie abelsche Gruppe über diesen Äquivalenzklassen und \mathcal{N} der Normalteiler erzeugt durch $[\emptyset : \emptyset \rightarrow X \times Y]$ und $[F_1] + [F_2] - [F_0] - [F]$ aus dem Additivitäts-Axiom. So ist \mathcal{F}/\mathcal{N} mit der Zuordnung der Repräsentanten eine universelle additive Invariante und bis auf Isomorphie eindeutig.

Mit Hilfe der Additivität zeigt man unmittelbar, dass jedes Element in $U_{fib}(X, Y)$ durch eine G -Abbildung repräsentiert wird.

LEMMA 6.2.10. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis mit Grundpunkt 1 und $S^1 \vee S^1$ die verbundene Summe, jeweils mit trivialer G -Operation. Dann gilt für $a = [F : A \rightarrow X \times Y] \in U_{fib}(X, Y)$ und $n \in \mathbb{N}$

- (1) $n \cdot a$ wird durch die n -fache disjunkte Vereinigung von F als G -Abbildung $\bigsqcup A \rightarrow X \times Y$ und
- (2) $-a$ wird durch $A \times (S^1 \vee S^1) \rightarrow A \rightarrow X \times Y$ repräsentiert.

Inbesondere ist jedes Element in $U_{fib}(X, Y)$ durch eine G -Abbildung repräsentiert.

BEWEIS. (1) folgt unmittelbar aus den Äquivalenzrelationen der Konstruktion von $U_{fib}(X, Y)$.

(2) Sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall. Wir betrachten zunächst das Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0, 1\} & \xrightarrow{\subset} & A \times I \\ \cap \downarrow & & \downarrow \\ A \times I & \longrightarrow & A \times S^1. \end{array}$$

Mit der jeweiligen Projektion auf A und der Komposition mit $F : A \rightarrow X \times Y$ erhalten wir die Abbildungen $F_{\{0,1\}}$, F_I und F_{S^1} . In $U_{fib}(X, Y)$ gilt nun $[F_{\{0,1\}}] = 2[f]$ sowie $[F_I] = [f]$ und damit folgt aus

$$[F_{\{0,1\}}] + [F_{S^1}] = [F_I] + [F_I]$$

unmittelbar $[F_{S^1}] = 0$. Eine analoge Überlegung zu dem Pushout

$$\begin{array}{ccc} A \times \{1\} & \xrightarrow{\subset} & A \times S^1 \\ \cap \downarrow & & \downarrow \\ A \times S^1 & \longrightarrow & A \times (S^1 \vee S^1) \end{array}$$

liefert dann die Behauptung. □

Analog definiert und konstruiert man rechtsseitig-fibrante additive Invarianten, deren universelle additive Invariante wir mit $U^{fib}(X, Y)$ notieren. Auf Grund der offensichtlichen Analogie $U_{fib}(X, Y) = U^{fib}(Y, X)$ gehen wir an dieser Stelle nicht weiter auf den rechtsseitig-fibranten Fall ein.

Unter der fibranten universellen additiven Invarianten zu X verstehen wir dann $U_{fib}(X, *)$. Setzt man den Punkt in der anderen Variablen ein, erhalten wir wieder die ursprüngliche additive Invariante für endliche G -CW Komplexe, denn es gilt:

LEMMA 6.2.11. *Sei Y vom Homotopietyp eines endlicher G -CW Komplexes, so gilt*

$$U_{fib}(*, Y) \cong U(Y).$$

BEWEIS. Da für Repräsentanten $X \rightarrow * \times Y$ von Elementen in $U_{fib}(*, Y)$ auch $X \rightarrow *$ faserweise schwach endlich ist, muss Z vom G -Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplexes sein. Folglich gibt es die Abbildung

$$U(Y) \longrightarrow U_{fib}(*, Y), [F : Z \rightarrow Y] \longmapsto [F : Z \rightarrow * \times Y].$$

Da jeweils die gleichen Relationen gelten ist dies ein Isomorphismus. □

In dem nächsten Satz vergleichen wir die universellen additiven Invarianten für verschiedene Gruppen $H \leq G$, so dass wir diese dann durch U_{fib}^H , bzw. U_{fib}^G unterscheiden müssen.

SATZ 6.2.12. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe in G und X vom Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplexes. Dann induziert der Funktor $G \times_H ?$ den kanonischen Isomorphismus

$$U_{fib}^H(*, X) \cong U_{fib}^G(G/H, X).$$

BEWEIS. Generell ist $G \times_H Z \rightarrow G \times_H * \cong G/H$ eine G -Faserung mit Fasern H -isomorph zu Z und damit $G \times_H Z \rightarrow G/H$ ein G -ENR über G/H . Ist $Z \rightarrow *$ eine faserweise schwach endliche Faserung, d.h. Z vom H -Homotopietyp eines endlichen H -CW Komplexes, so ist auch $G \times_H Z \rightarrow G/H$ faserweise schwach endlich und $G \times_H Z$ nach Satz 6.1.14 vom G -Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplexes.

Weiter ist der Funktor $G \times_H ?$ kanonisch verträglich mit Pushouts und Pullbacks. Ist $Z \times I \rightarrow Z'$ eine H -Homotopie, so ist auch $G \times_H (Z) \times I \cong G \times_H (Z \times I) \rightarrow G \times_H Z'$ eine G -Homotopie. Es wird auch eine H -Homotopieäquivalenz in eine G -Homotopieäquivalenz überführt. Damit induziert dies eine wohldefinierte Abbildung zwischen den Isomorphieklassen der Diagramme

$$[F : Z \rightarrow X] \mapsto [G \times_H F : G \times_H Z \rightarrow G \times_H X].$$

Um einzusehen, dass dies auch für $U_{fib}^H(*, X)$ wohldefiniert ist, bleibt nur zu überlegen, dass eine H -Kofaserung zu einer G -Kofaserung über G/H wird. Dies folgt aber umgekehrt aus der Retraktionseigenschaft in Lemma 6.1.20 und der Funktorialität von $G \times_H ?$.

Mit Proposition 4.4 in [tD87] sehen wir, dass die Zuordnung

$$(F : Y \rightarrow G/H \times X) \longmapsto (F|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow X)$$

mit $Y_1 = F^{-1}(H/H \times X)$, den inversen Homomorphismus $U_{fib}^G(G/H, X) \rightarrow U_{fib}^H(*, X)$ induziert, da $Y \cong G \times_H Y_1$. \square

FOLGERUNG 6.2.13. Sei $H \leq G$ eine Untergruppe und Y ein kompakter G -ENR. Dann gilt

$$U_{fib}^G(G/H, Y) \cong U(G/H \times Y).$$

BEWEIS.

$$U_{fib}^G(G/H, Y) \cong U_{fib}^H(*, Y) \cong U^H(Y) \cong U^G(G/H \times Y).$$

\square

Von nun an betrachten wir wieder additive Invarianten für eine feste Gruppe G , so dass wir U_{fib}^G und U^G einfach als U_{fib} und U notieren.

LEMMA 6.2.14.

$$U_{fib}(\cup_i B_i, \cup_j X_j) = \bigoplus U_{fib}(B_i, X_j)$$

BEWEIS. Wie Lemma 6.2.7. \square

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine G -Faserung und $(\delta, \gamma) : Z \leftarrow A \rightarrow Y$ eine linksseitig-fibrante Abbildung. Dazu betrachten wir das Pullback

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow \Delta & & \downarrow f \\ Z & \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\delta} & Y \end{array}$$

und nutzen nun diese Notation der resultierenden Abbildung.

LEMMA 6.2.15. *Ist $f : X \rightarrow Y$ eine faserweise schwach endliche G -Faserung und X, Y vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe, so induziert diese durch*

- (1) *Komposition einen wohldefinierten Homomorphismus*

$$f_* : U_{fib}(X, Z) \rightarrow U_{fib}(Y, Z), (\beta, \alpha) \mapsto (\beta, f\alpha),$$

- (2) *obige Pullback-Konstruktion einen Homomorphismus*

$$f^* : U_{fib}(Z, Y) \rightarrow U_{fib}(Z, X), (\delta, \gamma) \mapsto (F, \gamma\Delta).$$

Sind f_0 und f_1 G -homotope Abbildungen $X \rightarrow Y$, so induzieren sie die gleichen Homomorphismen.

BEWEIS. Die homotopen Abbildungen $f_0 \simeq f_1$ definieren wegen der Homotopieinvarianz und Satz 6.1.15 mit Folgerung 6.1.18 in beiden Fällen isomorphe Klassen. Ebenso wird aus einer h -Isomorphie zwischen zwei Repräsentanten eine h -Isomorphie der Repräsentanten des Bildes. Dies folgt für die Komposition unmittelbar. Die Additivitäts-Relationen werden nach Lemma 6.1.21, 6.1.23 und 6.1.24 respektiert. \square

Für das nächste Resultat betrachten wir ein Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{F} & B \\ f \downarrow & & \downarrow \Gamma \\ Z & \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\delta} & X, \end{array}$$

in dem f eine G -Abbildung und $(\delta, \gamma) : Z \leftarrow A \rightarrow X$ eine linksseitig-fibrante Abbildung ist.

LEMMA 6.2.16. *Ist $f : Y \rightarrow Z$ eine G -Abbildung zwischen G -Räumen vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe, so induziert f*

- (1) *durch Komposition einen wohldefinierten Homomorphismus*

$$f_* : U_{fib}(X, Y) \rightarrow U_{fib}(X, Z), (\beta, \alpha) \mapsto (f\beta, \alpha),$$

- (2) *mittels obigem Pullback einen Homomorphismus*

$$f^* : U_{fib}(Z, X) \rightarrow U_{fib}(Y, X), (\delta, \gamma) \mapsto (\delta\Gamma, F).$$

Sind f_0 und f_1 G -homotope Abbildungen $X \rightarrow Y$, so induzieren sie die gleichen Homomorphismen.

BEWEIS. Die Additivität-Relationen folgen in diesen Fällen aus Lemma 6.1.22 und 6.1.24, der Rest wie in Lemma 6.2.15. \square

FOLGERUNG 6.2.17. Seien $(\beta, \alpha) : X \leftarrow A \rightarrow Y$ und $(\delta, \gamma) : Y \leftarrow B \rightarrow Z$ zwei linksseitig-fibrante Abbildungen. Sei $(\beta', \gamma') : A \leftarrow C \rightarrow B$ durch das folgende Pullback definiert:

$$\begin{array}{ccccc} & & C & \xrightarrow{\gamma'} & B & \xrightarrow{\delta} & Z \\ & & \downarrow \beta' & & \downarrow \gamma & & \\ X & \xleftarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\beta} & Y & & \end{array}$$

Dann induziert die Zuordnung

$$m : (\beta, \alpha), (\delta, \gamma) \mapsto (\delta\gamma', \alpha\beta')$$

eine bilineare Abbildung

$$m : U_{fib}(X, Y) \times U_{fib}(Y, Z) \longrightarrow U_{fib}(X, Z).$$

BEWEIS. Nach Lemma 6.2.15 und 6.2.16 ist m in jeder Variablen auf G -Homotopieklassen wohldefiniert und additiv. Dem Satz 6.1.15 entnehmen wir, dass G -Homotopieäquivalenzen durch Pullbacks wieder in G -Homotopieäquivalenzen überführt werden. Damit ist m unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten einer Isomorphieklasse der Diagramme. Zusammengenommen ist m bilinear. \square

FOLGERUNG 6.2.18. Sei X vom G -Homotopietyp eines endlichen G -CW Komplex. Die bilineare Abbildung m in Folgerung 6.2.17 macht $U_{fib}(X, X)$ zu einem Ring mit Eins und $U_{fib}(X, Y)$ zu einem linken, sowie $U_{fib}(Y, X)$ zu einem rechten $U_{fib}(X, X)$ -Modul.

BEWEIS. Die Abbildung m ist durch Pullbacks

$$\begin{array}{ccccc} & & C & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Y \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \longleftarrow & A & \longrightarrow & Y & & \end{array}$$

induziert. Die Transitivität dieser Konstruktion macht die Multiplikation m assoziativ, die Additivität ist Bestandteil der Folgerung 6.2.17. Das Einselement finden wir in der Klasse des Diagramms

$$X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{1} X.$$

\square

LEMMA 6.2.19. Seien A, X vom G -Homotopietyp endlicher G -CW Komplexe und $p : A \times X \rightarrow X$ die Projektion. Dann ist

$$\phi : U(*) \longrightarrow U_{fib}(X, X), [A] \mapsto [X \xleftarrow{p} A \times X \xrightarrow{p} X]$$

ein unitaler Ringhomomorphismus.

BEWEIS. Zunächst können wir festhalten, dass nach Lemma 6.2.13 $U(*) = U_{fib}(*, *)$ gilt. Weiter ist die Projektion $p : A \times X \rightarrow X$ trivialerweise eine faserweise schwach endliche G -Faserung. Jede Kofaserung $A \subset B$ wird zu einer G -Kofaserung $A \times X \subset B \times X$ über X und jedes Pushout über $*$ zu einem über X , womit ϕ additiv und wohldefiniert ist. Die Verträglichkeit von Pullbacks mit Produkten macht ϕ zu einem Ringhomomorphismus, welcher unital ist, da das Eins-Element in $U(*)$ der Punkt $*$ repräsentiert und damit

$$\phi(1) = \phi([*]) = [X \leftarrow X \rightarrow X] = 1_X$$

gilt. □

Literaturverzeichnis

- [Art30] Emil Artin, *Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren.*, Abhandlungen Hamburg **8** (1930), 292–306.
- [Bol90] Robert Boltje, *A canonical Brauer induction formula*, Astérisque 181-182 (1990), 31–59.
- [Bra51] Richard Brauer, *Beziehungen zwischen Klassenzahlen von Teilkörpern eines galoisschen Körpers*, Math. Nachr. **4** (1951), 158–174 (German).
- [BSS92] Robert Boltje, Victor Snaithe and Peter Symonds, *Algebraicisation of explicit Brauer induction*, J. Algebra **148** (1992), no. 2, 504–527.
- [CJ98] Michael C. Crabb and Ioan James, *Fibrewise homotopy theory*, Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 1998.
- [DL98] James F. Davis and Wolfgang Lück, *Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in K- and L-theory*, K-Theory **15** (1998), no. 3, 201–252.
- [tD79] Tammo tom Dieck, *Transformation Groups and Representation Theory*, Springer Lecture Notes in Mathematics, no. 766, Springer, Heidelberg, Berlin, New York, 1979.
- [tD87] ———, *Transformation Groups*, de Gruyter, Berlin, New York, 1987.
- [tDKP70] ———, Klaus H. Kamps and Dieter Puppe, *Homotopietheorie*, Lecture Notes in Mathematics. 157. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. VI, 1970.
- [Dor02] Wojciech Dorabiała, *The double coset theorem formula for algebraic K-theory of spaces*, K-Theory **25** (2002), no. 3, 251–276.
- [Dre73] Andreas W.M. Dress, *Contributions to the theory of induced representations*, Algebraic K-Theory II, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972, Lecture Notes Math. 342, 183-240, Springer, 1973.
- [Fes79] Mark Feshbach, *The transfer and compact Lie groups*, Trans. Am. Math. Soc. **251** (1979), 139–169.
- [Gre98] John P.C. Greenlees, *Rational Mackey functors for compact Lie groups. I*, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **76** (1998), no. 3, 549–578.
- [GM92] ——— and J. Peter May, *Some remarks on the structure of Mackey functors*, Proc. Am. Math. Soc. **115** (1992), no. 1, 237–243.
- [Hoc65] Gerhard P. Hochschild, *The structure of Lie groups*, San Francisco-London-Amsterdam: Holden-Day, Inc. IX, 1965.
- [Hof00] Jan-Philipp Hoffmann, *Der Eulerring von $SU(2)$* , Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Universität Göttingen, 2000.
- [Ill75] Sören Illman, *Equivariant singular homology and cohomology. I*, Mem. Am. Math. Soc. **156** (1975), 74 p.
- [Ill83] ———, *The equivariant triangulation theorem for actions of compact Lie groups*, Math. Ann. **262** (1983), 487–501.
- [Las82] Richard K. Lashof, *Equivariant bundles.*, Ill. J. Math. **26** (1982), 257–271.
- [Lew98] L. Gaunce jun. Lewis, *The category of Mackey functors for a compact Lie group*, Adem, Alejandro (ed.) et al., Group representations: cohomology, group actions and topology, Seattle 1996, Proc. Symp. Pure Math. 63, 301-354, American Mathematical Society, 1998.
- [LMM81] ———, J. Peter May and James E. McClure, *Ordinary $RO(G)$ -graded cohomology*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **4** (1981), 208–212.
- [Lin76] Harald Lindner, *A remark on Mackey-functors.*, Manuscr. Math. **18** (1976), 273–278.
- [Lüc89] Wolfgang Lück, *Transformation groups and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1408, Berlin: Springer-Verlag. xii, 1989.
- [Mac71] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics. 5. New York-Heidelberg-Berlin: Springer- Verlag, 1971.
- [Mat71] Takao Matumoto, *On G -CW complexes and a theorem of J. H. C. Whitehead*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A **18** (1971), 363–374.

- [Neu69] Jürgen Neukirch, *Klassenkörpertheorie*, B.I.-Hochschulschriften. 713/713a. Mannheim etc.: Bibliographisches Institut, 1969.
- [Oli86] Bob Oliver, *A transfer for compact Lie group actions*, Proc. Am. Math. Soc. **97** (1986), 546–548.
- [Oli98] ———, *The representation ring of a compact Lie group revisited*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), no. 3, 353–378.
- [Seg68] Graeme B. Segal, *The representation ring of a compact Lie group*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 30, 113–128.
- [Seg71] ———, *Equivariant stable homotopy theory.*, Actes Congr. internat. Math. 1970, 2, 59–63 , ., 1971.
- [Sel97] Paul Selick, *Introduction to homotopy theory*, Fields Institute Monographs. 9. Providence, RI: AMS, 1997.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Mathematics. 42. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, X, 170, 1977.
- [Sna88] Victor Snaith, *Explicit Brauer induction*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 455–478.
- [Ste67] Normen E. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Mich. Math. J. **14** (1967), 133–152.
- [Str66] Arne Strøm, *Note on cofibrations*, Math. Scand. **19** (1966), 11–14.
- [Sum91] Toshio Sumi, *Finiteness obstructions of equivariant fibrations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **27** (1991), no. 4, 627–637.
- [TW95] Jacques Thévenaz and Peter J. Webb, *The structure of Mackey functors*, Trans. Am. Math. Soc. **347** (1995), no. 6, 1865–1961.
- [Wan80] Stefan Waner, *Equivariant homotopy theory and Milnor’s theorem*, Trans. Am. Math. Soc. **258** (1980), 351–368.
- [Web00] Peter J. Webb, *A guide to Mackey functors*, Hazewinkel, M. (ed.), Handbook of algebra. Volume 2. Amsterdam: North-Holland. 805–836, North-Holland, 2000.
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 38. Cambridge: Cambridge University Press. xiv, 450, 1994.
- [Whi78] George W. Whitehead, *Elements of homotopy theory.*, Graduate Texts in Mathematics. 61. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XXI, 1978.