

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
linearer elliptischer stochastischer partieller
Differentialgleichungen mit distributivem
Quellterm

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten

der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt

von

Ingo Bulla

aus

Peine

Göttingen 2005

D 7

Referent: Prof. Hering

Koreferent: Prof. Denker

Tag der mündlichen Prüfung:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	5
2.1	Topologische Vektorräume	5
2.2	Tensorprodukte	8
2.3	Nukleare Räume	11
2.4	Hermite-Polynome und -Funktionen	13
2.5	Der Hidasche Testfunktionenraum und der Hidasche Distribu- tionsraum	13
2.6	Der Wiener-Itô-Segal-Isomorphismus	16
2.7	Sobolevräume	18
2.8	Die Räume \mathcal{S}_t und \mathcal{S}_{-t}	20
2.9	Elliptische Differentialgleichungen	20
2.10	Triangulierungen, Finite Elemente	24
2.11	Die Methode der Finiten Elemente	28
3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen stochastischer partieller Differentialgleichungen	32
3.1	Schwache Lösungen	32
3.2	Verschiedene Ungleichungen	33
3.3	Multiplikationabbildungen in \mathcal{S}_t	34
3.4	Hauptsatz	39
3.5	Verallgemeinerte Randbedingungen	45
4	Numerik stochastischer partieller Differentialgleichungen	49
4.1	Zugrunde liegendes Modell	49
4.2	Numerische Berechnung	51
5	Notationen und Abkürzungen	57

1 Einleitung

Thema dieser Arbeit sind in erster Linie lineare elliptische stochastische partielle Differentialgleichungen (SPDEs) der Form

$$Lu = f \quad \text{auf } D, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial D, \tag{2}$$

wobei

$$Lu = -\nabla \cdot (K(x, \omega) \nabla u(x, \omega)) + c(x, \omega) \cdot \nabla u(x, \omega) + r(x, \omega)u(x, \omega)$$

und D ein beschränktes Gebiet ist.

Während parabolische SPDEs in der Literatur intensiv behandelt wurden, haben sich bisher nur sehr wenige Autoren mit dem elliptischen Fall beschäftigt. Prinzipiell kann man natürlich versuchen, die Transformationsmethoden von Øksendal, Holden, Ubøe und Zhang zu verwenden. Jedoch muss bei dieser Methode (siehe z.B. [11], [12], [13], [14], [15] und [16]) jede SPDE einzeln betrachtet werden, d.h. allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen werden nicht erhalten. Des Weiteren liegen die Lösungen der SPDEs in einem Raum von Funktionen, die stetig in der Raumvariablen sind. Dies erfordert die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x, \omega)$ in x . Våge war einer der ersten, der elliptische SPDEs mit Hilfe von Variationmethoden für PDEs gelöst hat (siehe [24] und [25]). Sein Ansatz führt zu allgemeineren Aussagen als mittels der Transformationsmethoden von Øksendal et al. Våge verwendet jedoch Wick-Produkte, wohingegen wir von gewöhnlichen Produkten Gebrauch machen, was bei einigen Anwendungen angemessener ist. Des Weiteren scheint sein Ansatz weniger geeignet für die numerische Berechnung der Lösungen von SPDEs mittels Finite-Elemente-Methoden. Besold versuchte ebenfalls mittels Variationsmethoden elliptische SPDEs zu lösen (siehe [3]) und inspirierte diese Arbeit (siehe Bemerkung 3.7(2) unten). Rozanov und Sanso (siehe [20]) beschäftigten sich mit stochastischen Randwertproblemen für die Laplace-Gleichung und lösten sie in einem bestimmten Sobolevraum.

Wir behandeln zwei verschiedene, sich jedoch ähnelnde mathematische Formulierungen der Gleichung (1)-(2), wobei der erste vor allem von theoretischem Interesse und der zweite auf die Anwendung im Bereich der numerischen Berechnung der Lösungen von SPDEs zugeschnitten ist.

Beim ersten, theoretischen Fall suchen wir schwache Lösungen der Gleichung (1)-(2) im Tensorproduktraum $H_0^1(D) \otimes_H \mathcal{S}_t$, der aus dem reellwertigen Sobolevraum $H_0^1(D)$ sowie einem den Kondratievräumen ähnelnden stochastischen Funktionenraum \mathcal{S}_t besteht und bezüglich der Hilbert-Schmidt-Norm

vervollständigt ist. Der Quellterm f ist ein Element des Dualraumes von $H_0^1(D) \otimes_H \mathcal{S}_t$, d.h. eine stochastische Distribution. Die Koeffizienten von L sind Elemente des Tensorproduktraums, der aus $L^\infty(D)$ bzw. $W^{1,\infty}(D)$ und den trigonometrischen Polynomen (\mathcal{E}) besteht und bezüglich der π -Topologie vervollständigt ist.

Im zweiten, numerischen Fall stammen die Lösungen aus $H_0^1(D) \otimes_H W^{t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)$, der Quellterm aus dem Dualraum von $H_0^1(D) \otimes_H W^{t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)$ und die Koeffizienten aus $L^\infty(D) \otimes_\pi W^{t,\infty}(\mathbb{R}^k, \nu)$, wobei ν ein Maß auf \mathbb{R}^k ist.

Für beide Fälle wird ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz bewiesen. Dazu werden bei deterministischen PDEs übliche Hilbertraummethode (insbesondere das Lemma von Lax-Milgram) auf unseren stochastischen Rahmen übertragen.

Im folgenden Kapitel 2 werden bekannte Definitionen und Aussagen zusammengestellt, die wir nachfolgend benötigen: Wir gehen auf projektive und induktive Limites, abzählbar-normierte Räume und einige Sätze der Funktionalanalysis ein, geben eine kurze Einführung in die Topologisierung von Tensorprodukträumen und beschäftigen uns schließlich mit White Noise Analysis, um die von uns benötigten stochastischen Funktionen- und Distributionenräume einführen zu können. In Kapitel 3 werden Existenz- und Eindeutigkeitsätze für Lösungen von SPDEs formuliert und bewiesen. Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns schließlich mit Fragen der numerischen Berechnung der Lösung von SPDEs mittels Finite-Elemente-Methoden.

2 Grundlagen

Inhalt dieses Kapitels sind Grundlagen aus den Bereichen topologische Vektorräume, Funktionalanalysis, Tensorprodukte und White Noise Analysis, die wir in den folgenden Kapiteln benötigen werden.

2.1 Topologische Vektorräume

Wir führen zuerst einige grundlegende Begriffe ein und kommen dann zu projektiven bzw. induktiven Limites und abzählbar-normierten Räumen.

Definition 2.1 Sei X ein topologischer Vektorraum. Wir schreiben X^* für den **Raum der linearen stetigen Funktionale** auf X und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Dualprodukt ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ werden wir gelegentlich auch für das Skalarprodukt von Hilberträumen benutzen).

Mit X_σ^* bezeichnen wir die **schwache Topologie** auf X^* , die von der Umgebungsbasis der Null

$$\{x^* \in X^* : \sup_{x \in B} |\langle x^*, x \rangle| \leq 1\}, \quad B \in X \text{ endlich}$$

erzeugt wird (Wenn keine Verwechslungen möglich sind, schreiben wir X^* statt X_σ^*).

Die **starke Topologie** auf X^* erhält man, indem man die Mengen

$$\{x^* \in X^* : \sup_{x \in B} |\langle x^*, x \rangle| \leq 1\}, \quad B \in X \text{ beschränkt}$$

als Umgebungsbasis der Null zu Grunde legt.

Definition 2.2 Sei X ein topologischer Vektorraum und $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Vektorräume. Zu jedem $\alpha \in A$ sei eine lineare Abbildung $\phi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ gegeben. Die **projektive Topologie** auf X ist die schwächste Topologie, so dass alle ϕ_α stetig sind.

Zur Einführung des projektiven und des induktiven Limes benötigen wir den Begriff des direkten Produkts, der direkten Summe und der gerichteten Menge.

Definition 2.3 Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie lokal konvexer Räume. Als **direktes Produkt** bezeichnen wir den Raum

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha\}$$

ausgestattet mit der schwächsten lokal konvexen Topologie, so dass die kanonischen Projektionen $p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ stetig für alle $\beta \in A$ sind.

Existenz und Eindeutigkeit der in der letzten Definition erwähnten "schwächsten lokal konvexen Topologie", wird in [22] gezeigt. Gleiches gilt für die "stärkste lokal konvexe Topologie" in der folgenden Definition.

Definition 2.4 Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie lokal konvexer Räume. Als **direkte Summe** bezeichnen wir den Raum

$$\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : x_\alpha \neq 0 \text{ für nur endlich viele } \alpha \in A\}$$

ausgestattet mit der stärksten lokal konvexen Topologie, so dass die kanonischen Injektionen $i_\beta : X_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ stetig für alle $\beta \in A$ sind.

Definition 2.5 Eine Menge A wird **gerichtet** genannt, falls auf ihr eine reflexive, transitive, antisymmetrische Relation " \leq " definiert ist, so dass es für alle $\alpha, \beta \in A$ ein $\gamma \in A$ mit $\alpha \leq \gamma$ und $\beta \leq \gamma$ gibt.

Nun kommen wir zur Definition des projektiven und des induktiven Limes. Diese kompliziert anmutenden Definitionen sind im Rest der Arbeit nur insofern von Relevanz, dass unter bestimmten Umständen der starke Dualraum eines projektiven Limes ein induktiver Limes ist. Dies wird bei den in Abschnitt 2.5 definierten Räumen (S) und $(S)^*$ benutzt.

Definition 2.6 Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie lokal konvexer Räume, wobei A eine gerichtete Menge sei. Ist zu jedem Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \leq \beta$ eine stetige lineare Abbildung $f_{\alpha,\beta} : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ gegeben und gelte (i) $f_{\alpha,\alpha} = \text{Id}$ für $\alpha \in A$ und (ii) $f_{\alpha,\gamma} = f_{\alpha,\beta} f_{\beta,\gamma}$ für $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, so wird $\{X_\alpha, f_{\alpha,\beta}\}$ ein **projektives System** genannt. Unter diesen Bedingungen wird

$$\text{proj lim}_{\alpha \in A} := \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : f_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha \text{ für alle } \alpha \leq \beta\}$$

ausgestattet mit der von $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ induzierten relativen Topologie der **projektive Limes** von $\{X_\alpha, f_{\alpha,\beta}\}$ genannt.

Satz und Definition 2.7 Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie lokal konvexer Räume, wobei A eine gerichtete Menge sei. Ist zu jedem Paar $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \geq \beta$ eine stetige lineare Abbildung $g_{\alpha,\beta} : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ gegeben und gelte (i) $g_{\alpha,\alpha} = \text{Id}$ für $\alpha \in A$ und (ii) $g_{\alpha,\gamma} = g_{\alpha,\beta} g_{\beta,\gamma}$ für $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, so wird $\{X_\alpha, g_{\alpha,\beta}\}$ ein **induktives System** genannt. Unter diesen Bedingungen ist $\sum_{\alpha \geq \beta} \text{Im}(i_\beta - i_\alpha g_{\alpha,\beta})$ ein Unterraum von $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. Wenn

$\sum_{\alpha \geq \beta} \text{Im}(i_\beta - i_\alpha g_{\alpha,\beta})$ abgeschlossen ist, wird der mit der Quotiententopologie ausgestattete, lokal konvexe Quotientenraum

$$\text{ind lim}_{\alpha \in A} X_\alpha := \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha / \sum_{\alpha \geq \beta} \text{Im}(i_\beta - i_\alpha g_{\alpha,\beta})$$

der **induktive Limes** von $\{X_\alpha, g_{\alpha,\beta}\}$ genannt.

Beweis: Siehe [22]

Wir führen nun die abzählbar-normierten Räume ein. Diese Klasse von Räumen unterscheidet sich nur wenig von den klassischen normierten oder Banach-Räumen, deren Theorie sich in recht weitem Umfang auf die allgemeinere Klasse der abzählbar-normierten Räume übertragen läßt. Andererseits zeigen Räume dieser Klasse, die deutlich enger als die Klasse aller topologischen Vektorräume ist, charakteristische Zusammenhänge und Eigenschaften, welche die unendlichdimensionalen normierten Räume nicht besitzen. Die für uns relevante Eigenschaft ist, dass der Satz von Bochner-Minlos (Satz 2.20, siehe Abschnitt 2.5) nur für eine bestimmte Klasse von abzählbar-normierten Räumen gilt, nicht jedoch für allgemeine normierte Räume.

Um die abzählbar-normierten Räume zu definieren, benötigen wir die folgende Definition:

Definition 2.8 Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum X heißen **koordiniert**, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus X , die bezüglich beider Normen eine Cauchyfolge ist und bezüglich einer Norm gegen Null konvergiert, auch bezüglich der anderen Norm gegen Null konvergiert.

Seien nun ein Vektorraum X und ein abzählbares System von koordinierten Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \dots$ auf X gegeben. Mit Hilfe dieser Normen läßt sich in X auf folgende Weise eine Topologie einführen: Gegeben seien eine beliebige natürliche Zahl n und eine beliebige positive Zahl ϵ . Sei $U_{n,\epsilon}$ die Menge aller $x \in X$, für welche die n Ungleichungen

$$\|x\|_1 < \epsilon, \|x\|_2 < \epsilon, \dots \|x\|_n < \epsilon$$

gelten. Wir erhalten eine Topologie auf X , indem wir die Menge aller $U_{n,\epsilon}$ als Umgebungsbasis der Null wählen. Stattet man X mit dieser Topologie aus, so ist X ein topologischer Vektorraum (siehe [7]).

Definition 2.9 Ein Vektorraum X , in dem mit Hilfe eines abzählbaren Systems paarweise koordinierter Normen auf die oben angegebene Weise eine

Topologie eingeführt worden ist, wird **abzählbar-normierter Raum** genannt. Falls die Normen alle hilbertsch sind (d.h. für jede Norm $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ mit passendem Skalarprodukt gilt), so nennen wir X **abzählbar-hilbertsch**.

Von einer gegebenen Folge von Normen darf stets vorausgesetzt werden, dass sie nicht fallend ist, d.h. dass

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots$$

für jedes $x \in X$ gilt. Anderenfalls braucht man nur $\|x\|_n$ durch

$$\|x\|'_n = \max(\|x\|_1, \dots, \|x\|_n)$$

zu ersetzen. Die Folge der Normen $\|x\|'_n$ ist nicht fallend, sie erzeugt in X dieselbe Topologie und die neuen Normen sind ebenfalls koordiniert (siehe [7]).

2.2 Tensorprodukte

Wir werden uns in diesem Abschnitt vor allem mit der Topologisierung von Tensorprodukten beschäftigen. Aus diesem Grund definieren wir das Tensorprodukt auf eine Weise, die von der allgemein üblichen abweicht. Beide Definitionen sind jedoch äquivalent. Für den Rest dieses Abschnittes sind Vektorräume stets \mathbb{C} -Vektorräume und alle Räume seien hausdorffsch.

Definition 2.10 Seien X, Y und M Vektorräume. Sei Φ eine bilineare Abbildung von $X \times Y$ nach M . Wir sagen, dass X und Y **Φ -linear disjunkt** sind, wenn folgendes gilt:

Sind x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n endliche Mengen aus X bzw. Y mit je $n \in \mathbb{N}$ Elementen, die die Gleichung

$$\sum_{j=1}^n \Phi(x_j, y_j) = 0$$

erfüllen. Dann gelten die beiden folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_n \text{ linear unabhängig} &\implies y_1 = \dots = y_n = 0 \\ y_1, \dots, y_n \text{ linear unabhängig} &\implies x_1 = \dots = x_n = 0 \end{aligned}$$

Definition 2.11 Seien X und Y Vektorräume. Ein **Tensorprodukt** von X und Y ist ein Paar (M, Φ) , wobei M ein Vektorraum ist und Φ eine bilineare Abbildung von $X \times Y$ nach M , so dass $\Phi(X \times Y)$ den ganzen Raum M aufspannt und X und Y Φ -linear disjunkt sind.

Man bezeichnet das Tensorprodukt (es ist bekanntlich eindeutig) von X und Y normalerweise mit $X \otimes Y$ und erwähnt die Abbildung Φ nicht. Wenn ein Raum R gegeben ist, bei dem es sich um ein Tensorprodukt handelt, und auf diese Räume nicht explizit Bezug genommen wird, so spricht man bei R von einem **Tensorproduktraum**. Man sagt also " R ist das Tensorprodukt von X und Y ", aber " R ist ein Tensorproduktraum".

Die kanonische Abbildung Φ von $X \times Y$ nach $X \otimes Y$ wird mit

$$(x, y) \mapsto x \otimes y.$$

bezeichnet. Die Bilder $x \otimes y$ werden als Tensorprodukte bezeichnet.

Bildet man das n -fache Tensorprodukt eines Raumes X , so schreibt man $X^{\otimes n}$. Das Bild von (x, \dots, x) unter der kanonischen Abbildung bezeichnet man mit $x^{\otimes n}$.

Die **Symmetrisierung** von $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ bezeichnen wir mit $x_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} x_n$ oder $\text{Sym}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$. Sie ist wie folgt definiert:

$$x_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}, \quad (3)$$

wobei S_n die symmetrische Gruppe mit n Elementen sei.

Wir werden Tensorprodukträume auf zwei Arten topologisieren:

Erstens können wir eine Seminorm-Topologie auf $X \otimes Y$ unter Verwendung von Seminorm-Topologien auf X und Y konstruieren, wozu X und Y lokal konvex sein müssen (Die lokal konvexen topologischen Vektorräume sind gerade die topologischen Vektorräume, deren Topologie sich mittels einer Familie von Seminormen definieren läßt).

Zweitens kann man, falls X und Y Hilberträume sind, die Skalarprodukte auf X und Y benutzen, um ein Skalarprodukt und somit eine Topologie auf $X \otimes Y$ zu erhalten.

1. Die erste Möglichkeit wird folgendermaßen realisiert:

Definition 2.12 Seien X und Y lokal konvexe topologische Vektorräume. Die stärkste lokal konvexe Topologie auf $X \otimes Y$, so dass die kanonische bilineare Abbildung $(x, y) \mapsto x \otimes y$ stetig ist, wird **π -Topologie** genannt. Ausgestattet mit dieser Topologie und vervollständigt bezüglich ihr, wird der Raum $X \otimes Y$ mit $X \otimes_{\pi} Y$ bezeichnet.

Diese Definition ist sinnvoll, da es genau eine stärkste lokal konvexe Topologie mit den geforderten Eigenschaften auf $X \otimes Y$ gibt (siehe [23]).

Die π -Topologie läßt sich mit Hilfe eines Tensorprodukts von Seminormen beschreiben: Seien p und q Seminormen auf X bzw. Y . Mit U_p und V_q seien die abgeschlossenen Einheitskugeln bezüglich p bzw. q in X bzw. Y bezeichnet. Wir definieren W als die konvexe Hülle von $U_p \otimes V_q$ und das Tensorprodukt von p und q als

$$p \otimes q(\theta) := \inf_{\rho > 0} \{\rho \in \mathbb{R} : \theta \in \rho W\}.$$

Indem wir über die Seminormen, die die Topologie von X bzw. Y definieren, variieren, erhalten wir eine Familie von Seminormen auf $X \otimes Y$, die die π -Topologie induziert (siehe [23]). Folgende Proposition liefert eine besser handhabbare Formel für $p \otimes q$:

Proposition 2.13 Seien X und Y lokal konvexe topologische Vektorräume und p, q Seminormen auf X bzw. Y . Dann gilt für jedes $\theta \in X \otimes Y$

$$p \otimes q(\theta) = \inf \sum_j p(x_j)q(y_j)$$

wobei das Infimum über alle Darstellungen von θ der Form $\theta = \sum_j x_j \otimes y_j$ gebildet wird. Desweiteren gilt $p \otimes q(x \otimes y) = p(x)q(y)$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Beweis: siehe [23]

2. Nun der Fall, dass X und Y Hilberträume sind:

Definition 2.14 Seien X und Y Hilberträume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$. Die mittels des Skalarprodukts

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m x'_j \otimes y'_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle x_i, x'_j \rangle_X \langle y_i, y'_j \rangle_Y, \quad x_i, x'_i \in X, y_i, y'_i \in Y$$

definierte Topologie auf $X \otimes Y$ wird **Hilbert-Schmidt-Topologie** (H.S.-Topologie) genannt. Der mit der H.S.-Topologie versehene und bezüglich dieser Topologie vervollständigte Raum wird mit $X \otimes_H Y$ bezeichnet.

Wenn auf zwei topologischen Vektorräumen je eine Abbildung gegeben ist, so kann man das Tensorprodukt dieser Abbildungen auf kanonische Weise definieren:

Satz und Definition 2.15 Seien X_1, X_2, Y_1 und Y_2 lokal konvexe topologische Vektorräume und $u : X_1 \rightarrow X_2, v : Y_1 \rightarrow Y_2$ stetige, lineare Abbildungen. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $u \otimes v$ von $X_1 \otimes Y_1$ nach $X_2 \otimes Y_2$, genannt das **Tensorprodukt** von u und v , so dass

$$u \otimes v(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt. Des Weiteren ist $u \otimes v$ stetig, wenn $X_1 \otimes Y_1$ mit der π - oder H.S.-Topologie versehen und bezüglich dieser vervollständigt wird (Die H.S.-Topologie zu verwenden ist natürlich nur möglich, falls vorausgesetzt wird, dass X_1, X_2, Y_1 und Y_2 Hilberträume sind).

Beweis: Siehe [23] und [19]

Wir werden die Vervollständigung des Tensorprodukts $X \otimes Y$ bzgl. der τ -Topologie mit $X \otimes_\tau Y$ bezeichnen, wobei τ entweder für π oder H steht.

Sind X und Y beides Fréchet-Räume, so läßt sich jedes Element aus $X \otimes_\pi Y$ als Reihe darstellen, deren Summanden in einem bestimmten Sinne gegen Null gehen. Dies drückt die folgende Proposition aus.

Proposition 2.16 Seien X und Y Fréchet-Räume. Dann läßt sich jedes Element $\theta \in X \otimes_\pi Y$ als absolut konvergente Reihe der Form

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n$$

darstellen, wobei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen in X bzw. Y sind und $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen aus l^1 ist.

Beweis: Siehe [23]

Des Weiteren werden wir folgende Proposition benötigen:

Proposition 2.17 Seien X und Y normierte Räume. Dann ist $X \otimes_\pi Y$ ein normierter Raum und seine Norm wird π -**Norm** genannt. Eine Norm auf $X \otimes Y$ ist kleiner oder gleich der π -Norm, falls die kanonische bilineare Abbildung von $X \times Y$ nach $X \otimes Y$ stetig ist und Operatornorm kleiner oder gleich Eins hat.

Beweis: Siehe [23]

2.3 Nukleare Räume

Seien X und Y Banach-Räume. Wir betrachten $X^* \otimes Y$ als linearen Unterraum von $L(X; Y)$, indem wir einem Element $\sum_j x_j^* \otimes y_j$ aus $X^* \otimes Y$ die Abbildung

$$x \mapsto \sum_j \langle x_j^*, x \rangle y_j$$

zuordnen. $X^* \otimes Y$ ist dann der Unterraum der Abbildungen mit endlichdimensionalem Bild. Wir bezeichnen mit $L_b(X; Y)$ den **Raum** $L(X; Y)$ **versehen mit der Topologie der beschränkten Konvergenz**, d.h. mit der

Topologie definiert durch die Operatornorm

$$\|u\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|u(x)\|.$$

Dieser Raum ist vollständig. Die kanonische bilineare Abbildung

$$(x^*, y) \mapsto (x \mapsto \langle x^*, x \rangle y)$$

von $X^* \times Y$ nach $L_b(X; Y)$ ist stetig und hat Norm gleich Eins. Wir erhalten daher aufgrund von Prop. 2.17, daß die von $L_b(X; Y)$ auf $X^* \otimes Y$ induzierte Norm kleiner oder gleich der π -Norm ist. Daher und aufgrund der Vollständigkeit von $L_b(X; Y)$ kann die Injektion von $X^* \otimes Y$ nach $L_b(X; Y)$ zu einer stetigen linearen Abbildung von $X^* \otimes_{\pi} Y$ nach $L_b(X; Y)$ fortgesetzt werden.

Definition 2.18 Seien X und Y Banach-Räume. Ein Element aus $L(X, Y)$ wird **nukleare Abbildung** genannt, wenn es im Bild von $X \otimes_{\pi} Y$ unter der kanonischen Abbildung liegt.

Der Begriff "nuklear" rührt daher, daß bei der Konstruktion der nuklearen Abbildungen diejenigen Elemente aus $L(X; Y)$, welche ein Bild endlicher Dimension haben, von zentraler Bedeutung sind. Abbildungen mit endlich-dimensionalem Bild kann man als "Elementarbausteine" ansehen, d.h. als "atomar" bzw. "nuklear".

Sei X ein lokal konvexer topologischer Vektorraum und p eine stetige Seminorm auf X . Wir bezeichnen die Vervollständigung des normierten Raumes $X/\ker p$ mit X_p , wobei wir $X/\ker p$ mit der Norm $p/\ker p$ versehen. Aus der Definition von X_p folgt, daß X_p ein Banach-Raum ist.

Definition 2.19 Ein lokal konvexer topologischer Vektorraum X wird **nuklearer Raum** genannt, wenn zu jeder stetigen Seminorm p auf X eine weitere stetige Seminorm q auf X mit $q \geq p$ existiert, so daß die kanonische Abbildung von X_q nach X_p nuklear ist.

Mit $q \geq p$ ist gemeint, daß $q(x) \geq p(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Die kanonische Abbildung von X_q nach X_p ist wie folgt definiert: Da $q \geq p$, gilt $\ker p \supset \ker q$ und daher gibt es eine kanonische surjektive Abbildung von $X/\ker q$ nach $X/\ker p$. Diese Abbildung ist stetig, wenn man die Räume mit der Norm $q/\ker q$ bzw. $p/\ker p$ versieht.

2.4 Hermite-Polynome und -Funktionen

Die **Hermite-Polynome** $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert als

$$h_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4)$$

Die ersten Hermite-Polynome sind

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1, \quad h_1(x) = 2x, \quad h_2(x) = 4x^2 - 2, \quad h_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ h_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \dots \end{aligned}$$

Die **Hermite-Funktionen** $\xi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert als

$$\xi_n(x) := (\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} h_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5)$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Hermite-Funktionen sind die folgenden:

1. $\xi_n \in S(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
2. Die Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$.
3. Sei der Operator

$$Af(u) := -f''(u) + (u^2 + 1)f(u), \quad u \in \mathbb{R}$$

auf $S(\mathbb{R})$ definiert. A ist selbstadjungiert und hat das Spektrum $\{2k + 2, k \in \mathbb{N}_0\}$. Die Hermite-Funktionen sind Eigenfunktionen von A :

$$A\xi_k = (2k + 2)\xi_k.$$

Eine ausführliche Liste von Eigenschaften der Hermite-Polynome und -Funktionen findet man in [10] und [15].

2.5 Der Hidasche Testfunktionenraum und der Hidasche Distributionsraum

Um den Hidaschen Testfunktionenraum und den Hidaschen Distributionsraum einzuführen, benötigen wir den Satz von Bochner-Minlos:

Satz 2.20 (Bochner-Minlos) Sei \mathcal{N} ein nuklearer, abzählbar-hilbertscher Raum und $C : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (1) C ist stetig,
 (2) C ist positiv definit, d.h.

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j C(\eta_i - \eta_j) \geq 0$$

für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{N}$,

- (3) $C(0) = 1$.

Dann existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{N}^*, \mathcal{B})$ (\mathcal{B} die Borelsche σ -Algebra bzgl. der schwachen Topologie auf \mathcal{N}^*), so dass gilt:

$$\mathbf{E}[\exp[i\langle \cdot, \eta \rangle]] = \int_{\mathcal{N}^*} \exp[i\langle \omega, \eta \rangle] d\mu(\omega) = C(\eta)$$

Beweis: Siehe [9]

Aufgrund der folgenden Proposition können wir $\mathcal{N} = S(\mathbb{R}^d)$ wählen.

Proposition 2.21 Der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R}^d)$ ist ein nuklearer, abzählbar-hilbertscher Raum.

Beweis: Siehe [9]

Des Weiteren setzen wir $C(\eta) = \exp[-\frac{1}{2}\|\eta\|_2^2]$. Es ist leicht nachzurechnen, dass diese Funktion die obigen Bedingungen (1)-(3) erfüllt. Wir erhalten so den Wahrscheinlichkeitsraum

$$(S^*(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}, \mu). \quad (6)$$

Im Folgenden geben wir die wesentlichen Gründe für diese Wahl an:

1. $S(\mathbb{R}^d)$ ist ein relativ einfacher Raum unter den nuklearen, abzählbar-hilbertschen Räumen und außerdem kann man gut analytisch mit ihm arbeiten.
2. Für die Fourier-Transformierte ϕ_X einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt

$$\phi_X(y) = \exp[i\mu y - \frac{1}{2}y^2\sigma^2], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Sei $X_\eta(\omega) := \langle \omega, \eta \rangle$, $\omega \in \mathcal{N}^*$. Wegen

$$\begin{aligned} \phi_{X_\eta}(y) &= \int_{\mathcal{N}^*} \exp[iyX_\eta(\omega)] d\mu(\omega) \\ &= \int_{\mathcal{N}^*} \exp[i\langle \omega, y\eta \rangle] d\mu(\omega) \\ &= C(y\eta) \\ &= \exp[-\frac{1}{2}y^2\|\eta\|_2^2], \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sind die Zufallsvariablen $X_\eta(\omega)$ $N(0, \|\eta\|_2^2)$ -verteilt.

3. Durch

$$B_{t_1, \dots, t_d}(\omega) := \langle \omega, \mathbf{1}_{[0, t_1] \times \dots \times [0, t_d]} \rangle$$

ist eine d-parametrische Brownsche Bewegung definiert. Das Problem, dass $\mathbf{1}_{[0, t_1] \times \dots \times [0, t_d]}$ nur in $L^2(\mathbb{R}^d)$, nicht aber in $S(\mathbb{R}^d)$ liegt, löst man, indem man eine gegen $\mathbf{1}_{[0, t_1] \times \dots \times [0, t_d]}$ konvergierende Folge von Elementen des $S(\mathbb{R}^d)$ betrachtet und den Grenzübergang durchführt (siehe [15]).

Wir schreiben (L^p) für den komplexen $L^p(S^*(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}, \mu)$. Als nächstes führen wir die als trigonometrische Polynome bezeichnete Algebra (\mathcal{E}) ein.

Definition 2.22 Sei $\eta \in S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. Wir definieren die als **Wick-Exponential** bezeichnete Funktion $\exp^\diamond[\langle \cdot, \eta \rangle]$ wie folgt:

$$\exp^\diamond[\langle \omega, \eta \rangle] := \exp[\langle \omega, \eta \rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|_2^2], \quad \omega \in S^*(\mathbb{R}^d)$$

Definition 2.23 Die von der Menge $\{\exp^\diamond[i\langle \cdot, \eta \rangle] \mid \eta \in S(\mathbb{R}^d)\}$ erzeugte Algebra (\mathcal{E}) bezeichnen wir als **trigonometrische Polynome**.

Proposition 2.24 Für $p \in [1, \infty]$ ist (\mathcal{E}) eine dichte Untermenge von (L^p) .

Beweis: Siehe [10]

Wir führen nun die Räume (S) , $(S)^*$ und (S_p) ein. Es läßt sich einfach zeigen, dass sich ein beliebiges Element ϕ aus (\mathcal{E}) in der Form

$$\phi = \sum_{n=1}^N a_n \exp^\diamond[i\langle \cdot, \eta_n \rangle]$$

darstellen läßt. Wir definieren den Operator $\Gamma(A) : (\mathcal{E}) \longrightarrow (\mathcal{E})$ (Zur Definition von A siehe Abschnitt 2.4), indem wir $\Gamma(A)\phi$ für ϕ in der obigen Form angeben:

$$\Gamma(A)\phi = \sum_{n=1}^N a_n \exp^\diamond[i\langle \cdot, A\eta_n \rangle] \quad (7)$$

Für $p \in \mathbb{N}_0$ können wir nun die folgende Norm auf (\mathcal{E}) definieren:

$$\|\phi\|_{2,p} = \|\Gamma(A)^p \phi\|_2 = \|\Gamma(A^p)\phi\|_2 \quad (8)$$

Man kann zeigen, dass $\|\cdot\|_{2,p}$ hilbertsch ist (siehe [18]). Somit ist die Vollständigkeit von (\mathcal{E}) bzgl. dieser Norm ein Hilbertraum. Wir bezeichnen

diesen Hilbertraum mit (S_p) und seinen Dualraum mit (S_{-p}) . Des weiteren definieren wir $(S) := \bigcap_{p \geq 0} (S_p)$. Versehen mit der projektiven Topologie bzgl. der Einbettungen $i_p : (S) \longrightarrow (S_p)$ wird dieser Raum **Hidascher Testfunktionsraum** genannt. Der zu (S) duale, mit der starken Topologie versehene Raum wird mit $(S)^*$ bezeichnet und wird **Hidascher Distributionsraum** genannt.

2.6 Der Wiener-Itô-Segal-Isomorphismus

Wir wollen nun auf den Wiener-Itô-Segal-Isomorphismus eingehen. Er ermöglicht uns, Elemente aus (L^2) so darzustellen, dass Rechnungen mit ihnen einfach durchzuführen sind. Dazu müssen wir die wickgeordneten Polynome und den Fock-Raum einführen.

Definition 2.25 Sei $f \in S(\mathbb{R}^{2d})$. Dann wird das durch

$$\text{Tr}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, t) dt$$

definierte Element von $S^*(\mathbb{R}^{2d})$ als **Spur** bezeichnet.

Definition 2.26 Sei $\omega \in S^*(\mathbb{R}^d)$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die **wickgeordneten Polynome** $\omega^{\diamond n} \in S^*(\mathbb{R}^{nd})$ per Induktion als

$$\begin{aligned} \omega^{\diamond 0} &= 1 \\ \omega^{\diamond 1} &= \omega \\ \omega^{\diamond n} &= \omega \hat{\otimes} \omega^{\diamond(n-1)} - (n-1) \text{Tr} \hat{\otimes} \omega^{\diamond(n-2)}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Der Grund, warum man die wickgeordneten Polynome benötigt und nicht einfach die Polynome der Form

$$\omega \mapsto \langle \omega, \zeta_1 \rangle \cdots \langle \omega, \zeta_n \rangle, \quad \omega \in S^*(\mathbb{R}^d),$$

mit $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in S(\mathbb{R}^d)$, benutzt, liegt darin, dass diese Polynome nicht dieselben Orthogonalitätseigenschaften bzgl. des (L^2) -Skalarprodukts ($\langle \phi, \psi \rangle_{(L^2)} = \int_{S^*(\mathbb{R}^d)} \phi(\omega) \psi(\omega) d\mu(\omega)$) wie die wickgeordneten Polynome besitzen (siehe [18]).

Definition 2.27 Sei H ein komplexer Hilbertraum mit Norm $|\cdot|$. Sei $\Gamma(H)$ der Raum aller Folgen $\mathbf{f} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $f_n \in H^{\otimes n}$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2 < \infty$ gilt. Versehen mit der Norm

$$\|\mathbf{f}\|_{\Gamma(H)}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2$$

wird $\Gamma(H)$ **Fock-Raum** über H genannt.

In [10] wird gezeigt, dass $\Gamma(H)$ ein Hilbertraum ist.

Satz 2.28 Sei $\phi \in (L^2)$. Dann existiert ein eindeutiges $\mathbf{f} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus $\Gamma(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))$, so dass

$$\phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \omega^{\otimes n}, f_n \rangle \quad \mu - f.s. \quad (9)$$

gilt. Umgekehrt wird durch jedes $\mathbf{f} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \Gamma(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))$ mittels (9) eine Funktion in (L^2) definiert. In diesem Fall gilt

$$\|\phi\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2 = \|\mathbf{f}\|_{\Gamma(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))}^2.$$

Kurz, es gilt folgende Isomorphie:

$$(L^2) \cong \Gamma(L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d))$$

Beweis: Siehe [18]

Wir wollen nun eine Formel angeben, mit der man aus den Wiener-Itô-Segal-Entwicklungen von $\phi, \psi \in (S)$ die Entwicklung von $\phi \cdot \psi$ berechnen kann. Hierzu müssen wir uns mit der Kontraktion von Tensorprodukten beschäftigen, genauer mit der Rechts- und Linkskontraktion und ihrer Symmetrisierung.

Definition 2.29 Seien $l, m, n \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin seien $f \in S(\mathbb{R}^{d(l+m)})$ und $g \in S(\mathbb{R}^{d(l+n)})$. Dann wird

$$f \otimes_l g := \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{i}} \langle f, \eta_{\mathbf{j}} \otimes \eta_{\mathbf{i}} \rangle \langle g, \eta_{\mathbf{k}} \otimes \eta_{\mathbf{i}} \rangle \right) \eta_{\mathbf{j}} \otimes \eta_{\mathbf{k}}$$

die **Rechtskontraktion** von f und g genannt, wobei mit den Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das $L^2(\mathbb{R}^{d(l+m)})$ - bzw. $L^2(\mathbb{R}^{d(l+n)})$ -Skalarprodukt gemeint ist und die Summation über $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{N}^l$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{N}^m$ und $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ erfolgt.

In [18] wird gezeigt, dass $f \otimes_l g$ ein wohldefiniertes Element aus $S(\mathbb{R}^{d(m+n)})$ ist.

Die Rechtskontraktion läßt sich auch in der Form

$$(f \otimes_l g)(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \int_{\mathbb{R}^l} f(s_1, \dots, s_l, x_1, \dots, x_m) g(s_1, \dots, s_l, y_1, \dots, y_n) ds_1 \cdots ds_l$$

schreiben.

Die **Linkskontraktion** wird als

$$f \otimes^l g := \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{i}} \langle f, \eta_{\mathbf{i}} \otimes \eta_{\mathbf{j}} \rangle \langle g, \eta_{\mathbf{i}} \otimes \eta_{\mathbf{k}} \rangle \right) \eta_{\mathbf{j}} \otimes \eta_{\mathbf{k}} \quad (10)$$

definiert, im Folgenden jedoch nicht benötigt. Die Symmetrisierung von $f \otimes_l g$ wird mit $f \hat{\otimes}_l g$ bezeichnet. Analog verhält es sich mit $f \otimes^l g$.

Proposition 2.30 Seien $\phi \in (S)$, $\psi \in (S_p)$, $p \geq 0$, wobei

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle \omega^{\circ m}, f_m \rangle, \\ \psi(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \omega^{\circ n}, g_n \rangle. \end{aligned}$$

Dann gilt für die Wiener-Itô-Segal-Entwicklung von $\phi \cdot \psi$:

$$(\phi \cdot \psi)(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \langle \omega^{\circ l}, h_l \rangle$$

mit

$$\begin{aligned} h_l &= \sum_{m+n=l} \sum_{k=0}^{\infty} k! \binom{m+k}{k} \binom{n+k}{k} f_{m+k} \hat{\otimes}_k g_{n+k} \\ &= \sum_{m+n-2k=l, k \leq m \wedge n} k! \binom{m}{k} \binom{n}{k} f_m \hat{\otimes}_k g_n \end{aligned}$$

Beweis: Siehe [18]

2.7 Sobolevräume

Wir führen nun die Sobolevräume in zwei verschiedenen Allgemeinstufen ein:

Definition 2.31 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $l \in \mathbb{N}$. Der **Sobolev-Raum** $W^{t,2}(D)$ ist die Menge aller Funktionen $f \in L^2(D)$, für welche die Distributionsableitungen $D^s f$ für $s = (s_1, \dots, s_n)$, $|s| \leq t$, wieder Elemente aus $L^2(D)$ sind:

$$W^{t,2}(D) := \{f \in L^2(D) : D^s f \in L^2(D) \text{ für } |s| \leq t\}$$

Wir führen auf $W^{t,2}(D)$ ein Skalarprodukt durch

$$\langle f, g \rangle_r := \sum_{|s| \leq t} \int_D D^s f(x) \overline{D^s g(x)} dx$$

ein. Die abgeschlossene Hülle von C_0^∞ in $W^{t,2}(D)$ nennen wir $W_0^{t,2}(D)$, d.h.

$$W_0^{t,2}(D) := \overline{C_0^\infty(D)}^{W^{t,2}(D)}.$$

Wir benötigen in dieser Arbeit von den soeben definierten Sobolevräumen ausschließlich $H_0^1(D)$ und den dazugehörigen Dualraum $H^{-1}(D)$.

Proposition 2.32 (1. Poincarésche Ungleichung) Sei D ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n . Dann existiert eine nur vom Durchmesser von D abhängige Konstante c_0 , so dass für alle $u \in H_0^1(D)$ gilt:

$$\|u\|_{H_0^1(D)}^2 \leq c_0 \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 = c_0 \sum_{i=1}^n \int_D \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right|^2 dx$$

Beweis: Siehe [26]

Wir kommen nun zu einer allgemeineren Formulierung des Begriffs des Sobolevraums:

Definition 2.33 Sei $k \geq 1$, $t \geq 0$, $p \in [1, \infty]$ und seien ν_1, \dots, ν_k Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Dann wird

$$W^{t,p}(\mathbb{R}^k, \nu) := \left\{ f \in W^{t,p}(\mathbb{R}^k) : \sum_{s=0}^t \|\nabla^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^k, \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_k)} < \infty \right\},$$

Sobolevraum genannt, wobei

$$\nabla^s f := \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^k \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_r}} f.$$

Wir schreiben $W_{-t,p}(\mathbb{R}^k, \nu)$ für den Dualraum von $W^{t,p}(\mathbb{R}^k, \nu)$. Der Raum $W^{t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)$ ist ein Hilbertraum (siehe [17], Satz V-2.1.4 für den Beweis eines Spezialfalls dieser Aussage).

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein Gebiet. Wir werden die folgenden Abkürzungen benutzen: $\|\cdot\|_0 := \|\cdot\|_{L^2(D)}$, $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{H_0^1(D)}$. Dieselbe Notation benutzen wir bei Skalarprodukten.

2.8 Die Räume \mathcal{S}_t und \mathcal{S}_{-t}

Wir führen nun die Räume \mathcal{S}_t und \mathcal{S}_{-t} ein:

Definition 2.34 Sei \mathcal{P} der Raum der Funktionen der Form

$$\sum_{n=0}^N \langle \omega^{\diamond n}, f_n \rangle, \quad N \in \mathbb{N}_0$$

und $t \geq 0$. Der Raum \mathcal{S}_t wird als die Vervollständigung von \mathcal{P} bezüglich der Norm

$$\left\| \sum_{n=0}^N \langle \omega^{\diamond n}, f_n \rangle \right\|_{2,t} = \sum_{n=0}^N (1+n)^t n! |f_n|^2$$

definiert und \mathcal{S}_{-t} als sein Dualraum.

Die Funktionen

$$\langle \omega^{\diamond m_0}, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \hat{\xi}_i^{\otimes n_i} \rangle$$

bilden eine Orthogonalbasis von \mathcal{S}_t und von (L^2) . Offensichtlich gilt

$$\dots \subset \mathcal{S}_t \subset \dots \subset \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0 = (L^2) \subset \mathcal{S}_{-1} \subset \mathcal{S}_{-2} \subset \dots \subset \mathcal{S}_{-t} \subset \dots$$

2.9 Elliptische Differentialgleichungen

Die folgenden drei Abschnitte über elliptische Differentialgleichungen, Triangulierung, Finite Elemente und die Methode der Finiten Elemente wurden freundlicherweise von Richard Sachsenhausen zur Verfügung gestellt. Es wurde nur kleinere Anpassungen bezüglich der Notation gemacht.

Im nun folgenden Abschnitt sollen einige der wesentlichen Erkenntnisse der Theorie elliptischer, partieller Differentialgleichungen rekapituliert werden. Eine umfassende Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen findet sich z.B. in [21], [26].

Zunächst sollen in den folgenden Definitionen die verschiedenen Klassen von Differentialgleichungen bzw. -operatoren vorgestellt werden.

Definition 2.35 (Differentialoperator, Differentialgleichung, Ordnung)

Sei $D \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet, X ein Raum reellwertiger Funktionen über D , $k \in \mathbf{N}$ und $F : D \times \mathbf{R}^{\frac{n^{k+1}-1}{n-1}} \rightarrow \mathbf{R}$ eine Abbildung. Ein Operator $L : D \times X^{\frac{n^{k+1}-1}{n-1}} \rightarrow X$

$$Lu := F(x, u(x), D^{\alpha_{lm}}u(x))$$

mit Multiindizes $|\alpha_{lm}| = l$, $l = 1, \dots, k$, $m = 0, \dots, n^l$ heißt *Differentialoperator* der *Ordnung* k . Eine Gleichung

$$Lu = f$$

mit einer Abbildung $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ heißt *Differentialgleichung* der Ordnung k .

Ein spezieller Typ von Differentialoperatoren, der im folgenden untersucht werden soll, wird nun ausgezeichnet.

Definition 2.36 (Linearer elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung)

Ein Differentialoperator L der Ordnung 2 heißt *linear*, falls er von der Form

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} u + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + ru$$

mit geeigneten Koeffizienten $k_{ij}, c_i, r : D \rightarrow \mathbf{R}$ ist. Er heißt *elliptisch*, falls alle Eigenwerte der Matrix $A = (k_{ij})_{i,j=1}^n$ von 0 verschieden und von gleichem Vorzeichen sind.

Ein typischer Unterschied zwischen partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht darin, dass bei ersteren der *Typ* des zugehörigen Operators eine wichtige Rolle spielt. Man zeichnet gewisse Klassen von Differentialoperatoren aus, die ähnliches Lösungsverhalten haben. So existieren neben den elliptischen Differentialoperatoren noch weitere Klassen, etwa parabolische und hyperbolische Operatoren. Für Differentialoperatoren 2. Ordnung ist diese Einteilung bereits erschöpfend.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist im Allgemeinen eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung (falls sie überhaupt existiert) nicht eindeutig bestimmt. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung k benötigt i. A. die Angabe von k Anfangs- oder Randwerten. Dabei spielt jedoch die Art der Vorgaben keine Rolle, lediglich ihre Anzahl ist festgelegt. Bei partiellen Differentialgleichungen ist dies anders.

Hier ist der Typ des Operators für die Art der Vorgabewerte verantwortlich, d.h. je nach Art des Operators ist eine andere Vorgabe erforderlich, um ein

wohlgestelltes Problem (im Sinne von Hadamard) zu erhalten. Für elliptische Operatoren der Ordnung $2k$ schreibt man die Funktions- und Ableitungswerte bis zur Ordnung $k - 1$ auf dem Rand ∂D des betrachteten Gebietes vor, es werden also nur Randbedingungen gestellt.

Die Randbedingungen können in verschiedene Klassen eingeteilt werden. Man betrachte z.B. einen elliptischen Operator der 2. Ordnung. So genannte *Dirichlet-Bedingungen* liegen vor, wenn Funktionswerte auf dem Rand vorgegeben sind; man spricht von *Neumann-Bedingungen*, wenn die Werte der Normalenableitungen (oder Konormalenableitungen) auf dem Rand gegeben sind. Schließlich nennt man Randbedingungen, die eine Linearkombination der beiden vorigen Typen sind, *Robin-Bedingungen* oder *gemischte Randbedingungen*. Die Randbedingungen können natürlich auch auf Teilen des Randes in verschiedener Form gestellt sein.

Es soll hier das Standardbeispiel eines linearen elliptischen Operators 2. Ordnung, die Poissongleichung, betrachtet werden. Es ist u die gesuchte Funktion, die auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbf{R}^n$ mit Lipschitz-stetigem Rand betrachtet sei.

Beispiel 2.37 (Poissongleichung)

Die Gleichung

$$-\Delta u = f$$

ist linear, von zweiter Ordnung und vom elliptischen Typ. Sie spielt eine Rolle in der Elektrodynamik, wo sie als so genannte Potentialgleichung etwa das Grundproblem der Elektrostatik darstellt.

Ob ein gegebenes Problem eine Lösung besitzt, und ob diese ggf. eindeutig ist, ist eine i. A. nicht einfach zu beantwortende Frage. Für die Zwecke dieser Arbeit ist jedoch die Lösbarkeitsaussage des folgenden Lemmas ausreichend.

Lemma 2.38 (Lemma von Lax / Milgram)

Sei V ein Hilbertraum, $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige und strikt V -koerzive Bilinearform, $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Linearform, d.h. es gelte:

- (1) $\exists C_1 > 0 : |a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$
- (2) $\exists c > 0 : a(v, v) \geq c \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$ und
- (3) $\exists C_2 > 0 : |f(v)| \leq C_2 \|v\|_V \quad \forall v \in V.$

Dann besitzt die Variationsgleichung

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \tag{11}$$

eine eindeutige Lösung $u \in V$.

Beweis: siehe etwa [2], Satz 4.7.

□

Das Lemma von Lax-Milgram bezieht sich auf Variationsprobleme, während man doch eigentlich an der Lösung einer partiellen Differentialgleichung interessiert ist. Anhand der Poissongleichung aus Beispiel 2.37 soll der Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben erläutert werden. Dies wird auf einen neuen Lösbarkeitsbegriff führen.

Schon einfache Beispiele zeigen, dass die Lösbarkeit im klassischen Sinne (also $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ für die Poissongleichung) einer PDE nur unter sehr starken Anforderungen an die Koeffizienten der PDE und die Glattheit des Gebietes sicherzustellen ist. Meist schwächt man daher den Lösungsbegriff ab. So fordert man etwa, dass die PDE nicht punktweise zu erfüllen ist, sondern nur im Sinne des L^2 . Von dieser Idee ausgehend kommt man zu besser angepassten Lösungsbegriffen.

Es seien der Einfachheit wegen nun *homogene Dirichlet-Randbedingungen*, also

$$u|_{\partial D} = 0,$$

betrachtet. Nimmt man nun an, dass eine Funktion $u \in H^2(D)$ die Poissongleichung im Sinne des L^2 erfüllt, so gilt die Gleichheit sicherlich noch immer nach der Skalarmultiplikation beider Seiten mit einer *Testfunktion* $v \in C^\infty(D)$. Partielle Integration der linken Seite liefert dann (wobei die Randintegrale aufgrund der homogenen Dirichlet-Bedingungen verschwinden) die *Variationsgleichung*

$$(\nabla u, \nabla v)_0 = (f, v)_0.$$

Diese Beziehung gilt für alle $v \in C^\infty(D)$ und durch einen Dichteschluss kann man dies auf

$v \in H^1(D)$ erweitern. Man sieht, dass nur erste Ableitungen von u in der Variationsgleichung auftreten. Deshalb wird man eine Funktion $u \in H^1(D)$, die die Variationsgleichung erfüllt, als eine verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung auffassen.

Diese Vorgehensweise - Skalarmultiplikation mit einer Testfunktion, partielle Integration, Einarbeiten der Randbedingungen, Dichteschluss und Abschwächen der Glattheitsforderung an die Lösung - läßt sich auch auf andere PDEs übertragen. Dadurch wird die Differentialgleichung in ein Variationsproblem überführt. Man nennt eine Lösung der Variationsformulierung *schwache Lösung*. Eine schwache Lösung, die die Differentiagleichung im Sinne des $L^2(D)$ erfüllt, heißt *starke Lösung*.

Bemerkung 2.39 (Randwerte für L^2 -Funktionen)

Es stellt sich natürlich die Frage, wie Randwerte für Funktionen $v \in H^1(D) \subset L^2(D)$ überhaupt zu verstehen sind. Eine L^2 -Funktion ist schließlich nur bis auf Nullmengen festgelegt und der Rand eines Gebietes ist eine Nullmenge. Für stetige Funktionen $v \in C(\overline{D})$ ist der Operator

$$T : C(\overline{D}) \rightarrow C(\partial D), \quad Tv := v|_{\partial D}$$

wohldefiniert. Mit Hilfe des Satzes von Hahn/Banach kann man nun zeigen (vgl. etwa [26]), dass dieser Operator eine stetige Fortsetzung

$$Tr : H^1(\overline{D}) \rightarrow L^2(\partial D)$$

besitzt. Im Sinne dieses so erklärten Spuroperators sind nun alle Randwertvorgaben für schwache bzw. starke Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zu verstehen.

Es sei noch angemerkt, dass

$$\text{Im}(Tr) \neq L^2(\partial D)$$

ist. Daher ist bei der Vorgabe von Randwerten zu beachten, dass diese im Bild des Spuroperators liegen sollen. Für die homogenen Dirichlet-Randbedingungen ist dies der Fall. Näheres zu diesem Thema findet man etwa in [26].

Beispiel 2.40 (Schwache Lösbarkeit der Poissongleichung)

Für die Poissongleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen ergibt sich die eindeutige, schwache Lösbarkeit unter der Voraussetzung $f \in L^2(D)$ mit dem Lemma von Lax-Milgram. Die zugehörige Bilinearform

$$a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_0$$

ist nach der Poincaré-Ungleichung stetig und strikt H^1 -koerziv. Die Stetigkeit der Linearform

$$f(v) := \langle f, v \rangle_0$$

ist aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes ebenfalls klar und so liefert das Lemma 2.38 die gewünschten Aussagen.

2.10 Triangulierungen, Finite Elemente

In diesem Abschnitt werden die Grundbegriffe der Finiten-Elemente-Methode erklärt. Dazu zählt neben dem Begriff des Finiten Elementes auch die Triangulierung eines Gebietes. Einige Beispiele Finiten Elemente bilden den Abschluss dieses Abschnittes. Eine detailliertere Betrachtung der Grundbegriffe

der FEM findet sich in [1], [4], [5] und [8].

Sei $D \subset \mathbf{R}^n$ nun ein polygonal berandetes Gebiet, d.h. ein Gebiet, dessen Rand durch einen geschlossenen Streckenzug gegeben ist. Dabei sei jetzt und im Folgenden der \mathbf{R}^n stets mit der natürlichen Topologie ausgestattet und alle auftretenden Maße seien Lebesgue-Maße; wobei natürlich stets das transformierte, k -dimensionale Maß auf einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit der \mathbf{R}^n gemeint ist, falls eine solche betrachtet wird.

Definition 2.41 (Triangulierung)

Ein endliches System von Teilmengen $\mathcal{T} := \{T_j \subset D\}$ heißt *Triangulierung* (von D), falls gilt:

- $\forall T \in \mathcal{T} : T$ ist nichtleer und ein Lipschitzgebiet;
- $\bar{D} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \bar{T}$;
- Für $T_1, T_2 \in \mathcal{T}, T_1 \neq T_2$ ist $T_1 \cap T_2$ leer.

Eine Zerlegung heißt *zulässig*, falls der Schnitt des Abschlusses zweier verschiedener Teilgebiete $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ stets entweder eine vollständige, k -dimensionale Randmannigfaltigkeit ($0 \leq k < n$) von T_1 und T_2 oder leer ist.

Eine Zerlegung heißt *simplizial*, falls sie zulässig ist und der Abschluss jedes Element $T \in \mathcal{T}$ ein n -Simplex ist.

Für die spätere Analysis reicht die Forderung der Zulässigkeit einer Triangulierung noch nicht aus. In der folgenden Definition werden deshalb weitere Bedingungen gestellt.

Definition 2.42 (Quasiuniforme Zerlegung)

Sei $D \subset \mathbf{R}^n$ ein polygonal berandetes Gebiet. Sei J eine abzählbare Indexmenge und sei $\{\mathcal{T}_j\}_{j \in J}$ eine Familie zulässiger Triangulierungen von D mit der folgenden Eigenschaft:

Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass jedes $T \in \mathcal{T}_j$ für alle $\mathcal{T}_j \in \{\mathcal{T}_j\}_{j \in J}$ das Element T stets in eine Kugel mit Radius $c_1 h$ eingeschrieben werden kann und stets eine Kugel mit Radius $c_2 h$ enthält.

Eine solche Zerlegung heißt *quasiuniform*. Es sei zu einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T} bzw. einem Element $T \in \mathcal{T}$

$$h_T := \text{diam}(T),$$

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T.$$

Dabei heißt h_T *Elementdurchmesser* und h *Feinheit der Zerlegung*. Das Symbol

$$\{\mathcal{T}_h\}_h$$

bezeichnet im Folgenden stets eine Familie von Triangulierungen, die durch die Feinheit parametrisiert seien. Diese wird dabei o.B.d.A. als für jede Triangulierung verschieden angenommen.

Im Folgenden sei vorausgesetzt, dass sich die Zerlegung als verträglich mit den Randbedingungen des Problems erweist. Es sollen also folgende Situationen ausgeschlossen sein:

- Falls verschiedene Randbedingungen auf Teilstücken $\Gamma_i \subset \partial D$ gestellt sind, so soll jeder Punkt $x \in \overline{\Gamma}_i \cap \overline{\Gamma}_j$ für $i \neq j$ Eckpunkt eines Elementes der Triangulierung sein;
- Kein Element möge nur Eckpunkte besitzen, die zugleich Randpunkte sind, d.h. mindestens ein Freiheitsgrad jedes Elementes muss im Inneren des Gebietes lokalisiert sein.

Auf die Problematik bei Verletzung dieser Annahmen und auf die Approximation krummliniger Ränder durch so genannte *isoparametrische Elemente* soll hier nicht weiter eingegangen werden. Näheres zu diesem Thema findet sich etwa in [4].

Definition 2.43 (Finites Element)

Ein Tripel (T, P, Σ) , bestehend aus:

- einem Lipschitz-Gebiet $T \in \mathbf{R}^n$;
- einem endlichdimensionalen Funktionenraum P über T mit Dimension $m < \infty$, genannt *Raum der Formfunktionen*;
- einer Menge $\Sigma = \{N_1, \dots, N_m\}$ von m linear unabhängigen, reellwertigen Funktionalen über P , genannt *Menge der Freiheitsgrade*. Man kann Σ mit einer Basis des algebraischen Duals von P identifizieren;

heißt *Finites Element*.

Werden als Freiheitsgrade nur Funktionswerte benutzt, spricht man von *Lagrange-Elementen*, treten auch Werte der ersten Ableitungen auf, von *Hermite-Elementen*. Des Weiteren heißt eine Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ von P *nodale Basis*, falls für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt: $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$.

Ein Finites Element besteht also neben einem Gebiet auch aus einem Funktionenraum und einer Menge von Funktionalen auf diesem. Trotzdem wird im Folgenden ein Finites Element durch die Angabe des Gebietes bezeichnet, wobei der zugehörige Funktionenraum (stets ein Raum von Polynomen über diesem Gebiet) und die Formfunktionen jeweils als bekannt angesehen werden.

Nach der formalen Definition des Finiten Elementes, sollen nun zwei Beispiele den Begriff des Finiten Elementes illustrieren.

Beispiel 2.44 (P1-Element im Simplex)

Sei $n = 2$ und \bar{T} ein Dreieck. Sei P_T der Raum der Polynome von höchstens erstem Grad über \bar{T} . Die Ecken des Dreiecks seien o.B.d.A. mit 1, 2, 3 nummeriert. Wenn λ_i die üblichen baryzentrischen Koordinaten bezeichnet dann wird zu

$$\Sigma = \{N_i : \bar{T} \rightarrow \mathbf{R}, N_i(f) = f(i) | i \in \{1, 2, 3\}\}$$

eine nodale Basis gegeben durch:

$$\{\phi_i : \bar{T} \rightarrow \mathbf{R}, \phi_i(x) = \lambda_i(x) | i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Die Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Fall ist offensichtlich.

Beispiel 2.45 (Q1-Element im Quader)

Sei $n = 2$ und \bar{T} das Einheitsquadrat. Sei P_T der Raum von Funktionen, die Produkt zweier höchstens linearer Polynome über \bar{T} sind. Die Ecken des Rechtecks seien o.B.d.A. mit 1, 2, 3, 4 nummeriert. Zu

$$\Sigma = \{N_i : \bar{T} \rightarrow \mathbf{R}, N_i(f) = f(i) | i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

eine nodale Basis gegeben durch:

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= x, \\ \phi_2(x, y) &= y, \\ \phi_3(x, y) &= 1 - x, \\ \phi_4(x, y) &= 1 - y. \end{aligned}$$

Verallgemeinerungen auf Rechtecke in allgemeiner Lage und den dreidimensionalen Fall sind natürlich ohne weiteres möglich.

2.11 Die Methode der Finiten Elemente

Der Begriff der schwachen Lösung einer Differentialgleichung wurde zuvor über die Variationsformulierung eingeführt. Diese bietet auch eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung einer Näherungslösung, wie in folgendem Verfahren vorgestellt und im Anschluss daran begründet wird.

Methode 2.46 (Galerkin-Verfahren)

Sei V ein Hilbertraum, $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige und strikt V -koerzive Bilinearform, $b : V \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Linearform. Sei $V_h \subset V$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Sei mit a_h bzw. F_h die Einschränkung von a bzw. b auf V_h bezeichnet. Dann heißt das Verfahren

$$u_G \in V_h : a_h(u_G, v) = b_h(v) \quad \forall v \in V_h$$

zur näherungsweise Bestimmung der Lösung von

$$u \in V : a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in V$$

Galerkin-Verfahren.

Bemerkung 2.47 (Lösbarkeit des Galerkin-Verfahrens)

Unter den gemachten Voraussetzungen besitzt das in Verfahren 2.46 genannte Variationsproblem eine eindeutige Lösung, wie aus dem Lemma 2.38 von Lax-Milgram folgt. Es lässt sich sogar zeigen, dass für $h \rightarrow 0$ (und somit $\dim V_h \rightarrow \infty$) die Folge der Lösungen u_G des Galerkin-Verfahrens gegen die kontinuierliche Lösung u konvergiert.

Die Grundidee der FEM besteht nun in der Anwendung des Galerkin-Verfahrens 2.46 auf die Variationsformulierung des kontinuierlichen Problems mit einem speziellen Ansatzraum V_h , der aus den Funktionsräumen der einzelnen Finiten Elemente einer Triangulierung aufgebaut ist. Diese Idee soll nun konkretisiert werden.

Sei in diesem Abschnitt

$$L := -\nabla \cdot (K(x)\nabla) + c(x) \cdot \nabla + r(x)$$

mit symmetrischer Matrix $K(x) = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $K \in L^\infty(D)^{n \times n}$, $c \in L^\infty(D)^d$, $r \in L^\infty(D)$ ein formaler, linearer, elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung. Der Hauptteil liegt also in Divergenzform vor, die Eigenwerte von K sind reell, von Null verschieden und von gleichem Vorzeichen. Zur Vereinfachung seien für das zugehörige Randwertproblem homogene Dirichlet-Bedingungen gefordert, d.h. es ist eine Lösung des folgenden Problems gesucht:

$$\begin{aligned} u : Lu &= f \quad \text{in } D \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial D \end{aligned} \tag{12}$$

Die Dirichlet-Bedingung kann als wesentliche Randbedingung bei der Überführung dieses Problems mit in den Ansatzraum aufgenommen werden, sodass die Variationsformulierung lautet:

$$?u \in V : a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (13)$$

mit $V := H_0^1(D)$,

$$a(u, v) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_D k_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_D v(x) c_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) dx + \int_D r(x) u(x) v(x) dx$$

und $b(v) := \int_D f(x) v(x) dx$. Es soll sich hier und im Folgenden auf so genannte *konforme Finite-Elemente-Methoden* beschränkt werden, d.h. auf die Betrachtung endlichdimensionaler Ansatzräume $V_h \subset V$. Zu näheren Informationen über nichtkonforme FEM vgl. z.B. [4], [5]. Sei \mathcal{T} eine simpliziale Triangulierung von D und zu jedem $T \in \mathcal{T}$ ein Finites Element (T, P_T, Σ_T) gegeben. Zur Vereinfachung der Darstellung seien die Funktionenräume über T jeweils gegeben durch $P_T := \mathcal{P}^l(T)$, d.h. der Menge der Polynome vom maximalen Grad $l \in \mathbb{N}$, und seien die Elemente jeweils vom Lagrange-Typ. Die Dimension eines jeden P_T ist $M := \binom{l+n}{l}$. Sei $\Sigma_K = \{N_1^T, \dots, N_M^T\}$ und $\{\Phi_1^T, \dots, \Phi_M^T\}$ die zugehörige nodale Basis.

Man setze nun für die Testfunktionen v_h und die Lösung u_h der FEM an:

$$v_{h|T} = \sum_{j=1}^M \mu_j^T \Phi_j^T$$

und

$$u_{h|T} = \sum_{j=1}^M \lambda_j^T \Phi_j^T.$$

Da die Form $a_h(\cdot, \cdot)$ linear bzgl. des zweiten Argumentes ist und die Identität für alle Testfunktionen besteht, kann man $\mu_j^T = 1$ wählen und sich auf Betrachtung der Basisfunktionen als Testfunktionen beschränken. Nun ist noch zu beachten, dass die Gewichte in den Freiheitsgraden, die auf Kanten der Elemente lokalisiert sind, nicht in den sich diese Kante teilenden Elementen unabhängig voneinander gewählt werden können, sondern gekoppelt sein müssen. Dadurch wird die hinreichende Differenzierbarkeit (bzw. Stetigkeit)

der Funktion u auf ganz D gesichert, wodurch $u \in V$ gewährleistet wird. Man erhält aus dieser Konstruktion den Ansatzraum der FEM zu

$$V_h := \{f \in C^0(D) \mid f|_T \in \mathcal{P}^l(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset V = H_0^1(D).$$

Setzt man nun die Ansätze für v_h und u_h in die Variationsformulierung ein, so ist das Galerkin-Verfahren äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem

$$G\Lambda = R, \tag{14}$$

wobei mit $n := \dim V_h$ gilt: $G \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\Lambda, R \in \mathbf{R}^n$. Die Matrix G entsteht dabei aus folgenden Auswertungen:

$$G_{ij} := a(\Phi_j, \Phi_i), \tag{15}$$

der Vektor R aus

$$R_j := b(\Phi_j). \tag{16}$$

Man bezeichnet G als *Steifigkeitsmatrix* und R als *Lastvektor*.

Aufgrund der Wahl des Ansatzraumes hat die Steifigkeitsmatrix G eine ganz spezielle Struktur. Der überwiegende Teil der Einträge (zumindest bei hinreichend großem n) ist 0, also ist G *dünn besetzt*. Diese Eigenschaft wird man sich bei der Lösung des algebraischen Gleichungssystems natürlich zu Nutze machen wollen.

In der Praxis scheidet ein direktes Lösungsverfahren aus, da der Rechenaufwand zu rasch mit der Größe von m ansteigt. Man wird deshalb iterative Lösungsverfahren einsetzen, die speziell die Struktur der Steifigkeitsmatrix ausnutzen. Neben den klassischen Iterationsverfahren wie etwa *SOR* sind eine Reihe von spezielleren Verfahren in Gebrauch. Die Auswahl eines Verfahrens und die wichtige Vorkonditionierung sind ein sehr bedeutender Punkt in der Entwicklung eines Finite-Elemente-Programms. Näheres zu diesem Thema findet sich etwa in [4] und [5], eine umfassendere Übersicht bietet [1], Kap. 5. Nach Lösung des Gleichungssystems ist eine Approximation an die kontinuierliche Lösung konstruiert. Die Werte von Λ legen eine Funktion in allen Freiheitsgraden fest, also sind die Koeffizienten der Funktion für alle Basisfunktionen des Ansatzraumes V_h bekannt. Wenn die Näherungslösung nun hinreichend genau ist, so kann der Prozess beendet werden, sollte sie jedoch noch zu stark von der kontinuierlichen Lösung abweichen, so muss eine neue, verbesserte Lösung gesucht werden. Die Güte der Approximation kann verbessert werden, in dem zu einer feineren Triangulierung übergegangen wird (so genannte *h-Methode*) oder durch Erhöhen des Ansatzgrades der Finiten Elemente (*p-Methode*). Die in der Praxis besten Ergebnisse erzielt man oft durch eine Kombination dieser beiden Verfahren (*hp-Methode*).

Man benötigt in jedem Falle ein Maß für den Fehler zwischen Galerkinapproximation und der echten Lösung. In einem adaptiven Algorithmus wird man nach diesem Maß entscheiden, wo - und im Falle von hp-Methoden auch wie - die Approximation zu verbessern ist. Dies geschieht durch Fehlerschätzung.

3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen stochastischer partieller Differentialgleichungen

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} Lu &= -\nabla_I \cdot (K(x, \omega) \nabla_I u(x, \omega)) + c(x, \omega) \cdot \nabla_I u(x, \omega) + r(x, \omega)u(x, \omega) \\ &= f(x, \omega) \end{aligned} \quad (17)$$

zu beweisen. Dabei werden wir zwei verschiedene Lösungsräume verwenden: Zum einen betrachten wir den Fall, dass die Lösung u ein Element des Raumes $H_0^1(D) \otimes_H \mathcal{S}_t$ ist, zum anderen den Fall, dass u aus $H_0^1(D) \otimes_H W^{t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)$ ist. Der erste Fall ist von theoretischem Interesse, der zweite ist eine Vorbereitung für das in Kapitel 4 erläuterte Verfahren zum Lösen von SPDEs mittels FEM. Um Redundanz zu vermeiden steht im folgenden H_t im ersten Fall (später theoretischer Fall genannt) für \mathcal{S}_t und im zweiten Fall (später numerischer Fall genannt) $W^{t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)$. Analoges gilt für H_{-t} , \mathcal{S}_{-t} und $W^{-t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)$. Da wir nur reellwertige Lösungen u betrachten wollen, bezeichne \mathcal{S}_t im Zusammenhang mit SPDEs den reellwertigen \mathcal{S}_t , d.h. vom Bild eines Elements aus \mathcal{S}_t wird nur der reelle Teil betrachtet.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels definieren wir, was wir unter einer schwachen Lösung von (17) verstehen wollen. Der zweite Abschnitt dient dem Beweis verschiedener Ungleichungen. Im dritten Abschnitt behandeln wir die Multiplikationsabbildung

$$\psi \longrightarrow \phi \cdot \psi, \quad \psi \in \mathcal{S}_t$$

mit $\phi \in (\mathcal{E})$. Um das Lemma von Lax-Milgram zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen benutzen zu können, müssen wir nachweisen, dass diese Multiplikationsabbildung stetig ist.

$$\|\cdot\|_{0,t} := \|\cdot\|_{L^2(D) \otimes_H W^{t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)} \quad \text{und} \quad \|\cdot\|_{1,t} := \|\cdot\|_{H_0^1(D) \otimes_H W^{t,2}(\mathbb{R}^k, \nu)}$$

3.1 Schwache Lösungen

Wir definieren eine schwache Lösung von (17) wie folgt:

Definition 3.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $f \in H^{-1}(D) \otimes_H H_{-t}$, $t \geq 0$. Sei $K = (k_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $c = (c_i)_{i=1,\dots,n}$, $k_{ij}, c_i, r :$

$D \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen $u = u(x, \omega) \in H_0^1(D) \otimes_H H_t$ eine **schwache Lösung** der Gleichung

$$\begin{aligned} Lu(x, \omega) &= -\nabla_I \cdot (K(x, \omega) \nabla_I u(x, \omega)) + c(x, \omega) \cdot \nabla_I u(x, \omega) \\ &\quad + r(x, \omega) u(x, \omega) \\ &= f(x, \omega), \quad (x, \omega) \in D \times \Omega, \end{aligned} \quad (18)$$

$$u(x, \omega) = 0, \quad (x, \omega) \in \partial D \times \Omega, \quad (19)$$

wenn

$$a(u, v) := (K \nabla_I u, \nabla_I v)_{0,t} + (c \cdot \nabla_I u, v)_{0,t} + (ru, v)_{0,t} \quad (20)$$

$$= b(v) := \langle f, v \rangle \quad (21)$$

für alle $v \in H_0^1(D) \otimes_H H_t$.

Es ist natürlich zu zeigen, dass die Multiplikation der Lösung u mit den Koeffizienten K , c und r wohldefiniert ist, so dass das Randwertproblem (29)-(30) wohldefiniert ist. Dies geschieht im Beweis des Hauptsatzes.

3.2 Verschiedene Ungleichungen

In diesem Abschnitt beweisen wir verschiedene Ungleichungen, die für den Beweis des Hauptsatzes dieses Kapitels notwendig sind. Zum einen übertragen wir zwei Normungleichungen auf den von uns betrachteten stochastischen Fall, zum anderen die erste Poincarésche Ungleichung.

Lemma 3.2 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet. Sei $t \geq 0$ und $u \in H_0^1(D) \otimes_H H_t$. Dann gilt:

- (i) $\|u\|_{1,t} \geq \|u\|_{0,t}$,
- (ii) $\|u\|_{1,t} \geq \|\nabla_I u\|_{0,t}$,
- (iii) $c_0 \|\nabla_I u\|_{0,t} \geq \|u\|_{1,t}$, wobei $c_0 > 0$.

Beweis: Sei

$$u = \sum_{\mathbf{n}=(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \otimes f_{n_2} \in H_0^1(D) \otimes_H H_t,$$

wobei $(e_{n_1})_{n_1 \in \mathbb{N}}$, $(f_{n_2})_{n_2 \in \mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von $H_0^1(D)$ bzw. H_t sind und $\alpha_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}$ für $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$ gilt.

Zu (i):

$$\begin{aligned}
\|u\|_{1,t}^2 &= \left\| \sum_{n_2} \left(\sum_{n_1} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \right) \otimes f_{n_2} \right\|_{1,t}^2 \\
&= \sum_{n_2} \left\| \left(\sum_{n_1} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \right) \otimes f_{n_2} \right\|_{1,t}^2 \\
&= \sum_{n_2} \left\| \sum_{n_1} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \right\|_1^2
\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass die f_{n_2} orthogonal sind (zweiter Schritt) und Norm 1 haben (letzter Schritt). Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|u\|_{0,t}^2 &= \left\| \sum_{n_2} \left(\sum_{n_1} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \right) \otimes f_{n_2} \right\|_{0,t}^2 \\
&= \sum_{n_2} \left\| \sum_{n_1} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \right\|_0^2.
\end{aligned}$$

Mittels $\|u\|_1 \geq \|u\|_0$ folgt (i).

Die Behauptungen (ii) und (iii) werden ähnlich bewiesen, wobei für (iii) die erste Poincarésche Ungleichung benutzt wird. ■

3.3 Multiplikationsabbildungen in \mathcal{S}_t

Um zu beweisen, dass die Multiplikationsabbildung

$$\psi \longrightarrow \phi \cdot \psi, \quad \psi \in \mathcal{S}_t$$

für $\phi \in (\mathcal{E})$ stetig ist, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.3 Sei $\lambda > 0$. Dann existiert ein $C_0 > 0$, so dass

$$\sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \equiv m_0(2)}} C(m_0, l, \lambda) \leq C_0 \quad \forall m_0 \in \mathbb{N}_0,$$

wobei

$$C(m_0, l, \lambda) := \frac{l!}{m_0!} \left(\sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ gerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n \\ l = m_0 + n - 2k}} \lambda^n \binom{m_0}{k} \frac{(-1)^{n/2}}{(n-k)!} \right)^2.$$

Beweis: Sei $m_0 \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$, $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, wobei $\|\xi\|_2 = 1$. Sei

$$\bar{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega^{\diamond n}, \frac{(i\lambda\xi)^{\otimes n}}{n!})$$

und

$$\psi = (\omega^{\diamond m_0}, \xi^{\otimes m_0}).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi \cdot \psi &= \sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ gerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n}} \lambda^n \frac{k!}{n!} \binom{m_0}{k} \binom{n}{k} (-1)^{n/2} (\omega^{\otimes m_0+n-2k}, \xi^{\otimes m_0+n-2k}) \\ &+ i \sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ ungerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n}} \lambda^n \frac{k!}{n!} \binom{m_0}{k} \binom{n}{k} (-1)^{(n-1)/2} (\omega^{\otimes m_0+n-2k}, \xi^{\otimes m_0+n-2k}) \end{aligned}$$

und $\|\psi\|_2^2 = m_0!$. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\|\operatorname{Re} \phi \cdot \psi\|_2^2}{\|\psi\|_2^2} \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{l!}{m_0!} \left\| \sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ gerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n \\ l = m_0 + n - 2k}} \lambda^n \frac{k!}{n!} \binom{m_0}{k} \binom{n}{k} (-1)^{n/2} \xi^{\otimes m_0+n-2k} \right\|^2 \\ &= \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \equiv m_0(2)}} \frac{l!}{m_0!} \left(\sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ gerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n \\ l = m_0 + n - 2k}} \lambda^n \binom{m_0}{k} \frac{(-1)^{n/2}}{(n-k)!} \right)^2 \|\xi^{\otimes m_0+n-2k}\|^2 \\ &= \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \equiv m_0(2)}} C(m_0, l, \lambda). \end{aligned}$$

Da die Multiplikation mit einem Element aus (L^∞) eine stetige Abbildung auf (L^2) definiert, existiert ein $C_0 > 0$, so dass

$$\sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \equiv m_0(2)}} C(m_0, l, \lambda) \leq C_0 \quad \forall m_0 \in \mathbb{N}_0$$

gilt. ■

Satz 3.4 Sei $\phi \in (\mathcal{E})$. Dann definiert

$$\psi \longrightarrow \phi \cdot \psi, \quad \psi \in \mathcal{S}_1$$

eine stetige Abbildung auf \mathcal{S}_1 .

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall, dass ϕ und ψ von der Form

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega^{\circ n}, \frac{(i\lambda\xi)^{\otimes n}}{n!}), \quad (22)$$

$$\psi = (\omega^{\circ m_0}, \hat{\otimes}_{i=0}^{\infty} \xi_i^{\otimes n_i}),$$

wobei $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\xi\|_2 = 1$ und $\lambda > 0$, und zeigen, dass

$$\frac{\|\phi \cdot \psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

beschränkt ist: Aus

$$\begin{aligned} \phi \cdot \psi &= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n}} \frac{k!}{n!} \binom{m_0}{k} \binom{n}{k} (\omega^{\otimes m_0+n-2k}, (i\lambda\xi)^{\otimes n} \hat{\otimes}_k \hat{\otimes}_{i=0}^{\infty} \xi_i^{\otimes n_i}) \\ &= \sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ gerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n}} \lambda^n \frac{k!}{n!} \binom{m_0}{k} \binom{n}{k} (-1)^{n/2} (\omega^{\otimes m_0+n-2k}, \xi^{\otimes n} \hat{\otimes}_k \hat{\otimes}_{i=0}^{\infty} \xi_i^{\otimes n_i}) \\ &\quad + i \sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ ungerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n}} \lambda^n \frac{k!}{n!} \binom{m_0}{k} \binom{n}{k} (-1)^{(n-1)/2} (\omega^{\otimes m_0+n-2k}, \xi^{\otimes n} \hat{\otimes}_k \hat{\otimes}_{i=0}^{\infty} \xi_i^{\otimes n_i}) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} &\frac{\|\operatorname{Re} \phi \cdot \psi\|^2}{\|\psi\|^2} \\ &= \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \equiv m_0(2)}} \frac{(1+l)!}{(1+m_0)!} \sum_{\substack{n \geq 0, n \text{ gerade} \\ 0 \leq k \leq m_0 \wedge n}} \lambda^n \frac{k!}{n!} \binom{m_0}{k} \binom{n}{k} (-1)^{n/2} \|\xi^{\otimes n} \hat{\otimes}_k \hat{\otimes}_{i=0}^{\infty} \xi_i^{\otimes n_i}\|^2 \\ &\leq \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \equiv m_0(2)}} \frac{1+l}{1+m_0} C(m_0, l, \lambda) \|\xi^{\otimes n}\|^2 \|\hat{\otimes}_{i=0}^{\infty} \xi_i^{\otimes n_i}\|^2 \\ &= \sum_{\substack{0 \leq l < j_0 m_0 \\ l \equiv m_0(2)}} \frac{1+l}{1+m_0} C(m_0, l, \lambda) + \sum_{\substack{l \geq j_0 m_0 \\ l \equiv m_0(2)}} \frac{1+l}{1+m_0} C(m_0, l, \lambda) \\ &=: S_1(m_0, j_0, \lambda) + S_2(m_0, j_0, \lambda) \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 3.3 ist $S_1(m_0, j_0, \lambda)$ nach oben durch $j_0 C_0$ beschränkt. Wir versuchen nun eine obere Schranke für $S_2(m_0, j_0, \lambda)$ zu finden. Dazu benutzen wir

$$C(m_0, l, \lambda) = \frac{l!}{m_0!} \left(\sum_{k=0}^{m_0} \lambda^{l-m_0+2k} \binom{m_0}{k} \frac{(-1)^k}{(l-m_0+k)!} \right)^2$$

für $l \geq m_0$. Wir behandeln nun die Fälle $m_0 = 0$, $m_0 = 1$ und $m_0 \geq 2$. Im folgenden wird l immer so groß gewählt, dass die benutzten Ungleichungen gelten.

Fall 1: $m_0 = 0$

Aus

$$\frac{1+l}{1+0} C(0, l, \lambda) = (1+l)! \frac{\lambda^{2l}}{l!^2} \leq C \frac{\lambda^{2l}}{(l-1)!}$$

erhalten wir

$$S_2(0, j_0, \lambda) \leq \sum_{l \geq j_0 m_0} \frac{1+l}{1+0} C(0, l, \lambda) < \infty$$

für j_0 hinreichend groß.

Fall 2: $m_0 = 1$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} \frac{1+l}{1+1} C(1, l, \lambda) &= \frac{(1+l)!}{2!} \left(\frac{\lambda^{l-1}}{(l-1)!} - \frac{\lambda^{l+1}}{l!} \right)^2 \\ &\leq \frac{(1+l)! \lambda^{2l-2} (l-\lambda^2)^2}{2l!^2} \\ &\leq C \frac{\lambda^{2l}}{(l-3)!}, \end{aligned}$$

gilt

$$S_2(1, j_0, \lambda) \leq \sum_{l \geq j_0 m_0} \frac{1+l}{1+0} C(1, l, \lambda) < \infty$$

für j_0 hinreichend groß.

Fall 3: $m_0 \geq 2$

Aus

$$\begin{aligned}
& \frac{1+l}{1+m_0} C(m_0, l) \\
&= \frac{l!(1+l)}{m_0!(1+m_0)} \left(\sum_{k=0}^{m_0} \lambda^{l-m_0+2k} \binom{m_0}{k} \frac{(-1)^k}{(l-m_0+k)!} \right)^2 \\
&\leq \frac{(1+l)!}{(1+m_0)!} \left(\frac{\lambda^{l+m_0} 2^{m_0}}{(l-m_0)!} \right)^2 \\
&= \frac{(1+l)!}{(1+m_0)!} \frac{\lambda^{2l+2m_0} 4^{m_0}}{(l-m_0)!^2} \\
&\leq \frac{K_0^2 \sqrt{2\pi(1+l)} (1+l)^{1+l} e^{1+m_0}}{\sqrt{2\pi(1+m_0)} (1+m_0)^{1+m_0} e^{1+l}} \frac{\lambda^{2l+2m_0} 4^{m_0} K_0^2 e^{2(l-m_0)}}{2\pi (l-m_0)(l-m_0)^{2(l-m_0)}} \\
&\leq \frac{e^{l-m_0} (1+l)^{3/2+l} \lambda^{2l+2m_0} 4^{m_0} K_0^4}{2\pi (1+m_0)^{3/2+m_0} (l-m_0)^{2(l-m_0)+1}}
\end{aligned}$$

folgt, dass

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{l \geq jm_0 \\ l \equiv m_0(2)}}^{(j+1)m_0-1} \frac{1+l}{1+m_0} C(m_0, l) \\
&\leq \sum_{\substack{l \geq jm_0 \\ l \equiv m_0(2)}}^{(j+1)m_0-1} \frac{e^{l-m_0} (1+l)^{3/2+l} \lambda^{2l+2m_0} 4^{m_0} K_0^4}{2\pi (1+m_0)^{3/2+m_0} (l-m_0)^{2(l-m_0)+1}} \\
&\leq C \sum_{\substack{l \geq jm_0 \\ l \equiv m_0(2)}}^{(j+1)m_0-1} \frac{e^{jm_0} ((j+1)m_0)^{(j+1)m_0+1/2} \lambda^{2l+2m_0} 4^{m_0}}{(1+m_0)^{3/2+m_0} ((j-1)m_0)^{(2j-2)m_0}} \\
&\leq C \sum_{\substack{l \geq jm_0 \\ l \equiv m_0(2)}}^{(j+1)m_0-1} \frac{e^{jm_0} (j+1)^{(j+2)m_0} m_0^{(j+2)m_0} \lambda^{2(j+2)m_0}}{(j-1)^{(2j-2)m_0} m_0^{(2j-2)m_0}} \\
&\leq C \sum_{\substack{l \geq jm_0 \\ l \equiv m_0(2)}}^{(j+1)m_0-1} \frac{1}{m_0^{(j-4)m_0}} \\
&\leq C \frac{m_0}{m_0^{(j-4)m_0}} \\
&\leq C \frac{1}{m_0^{(j-5)m_0}}.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$S_2(m_0, j_0, \lambda) \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{\substack{l \geq jm_0 \\ l \equiv m_0(2)}}^{(j+1)m_0-1} \frac{1+l}{1+m_0} C(m_0, l) < \infty$$

für j_0 hinreichend groß. Wir haben somit gezeigt, dass

$$\frac{\|\operatorname{Re} \phi \cdot \psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

beschränkt ist. Analog zeigt man, dass

$$\frac{\|\operatorname{Im} \phi \cdot \psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

beschränkt ist. Daraus folgt dann die zu zeigende Beschränktheit von

$$\frac{\|\phi \cdot \psi\|^2}{\|\psi\|^2}.$$

Aus der Definition von \mathcal{S}_1 folgt, dass für ϕ der Form (22)

$$\psi \longrightarrow \phi \cdot \psi, \quad \psi \in \mathcal{S}_1$$

eine stetige Abbildung auf \mathcal{S}_1 ist. Aus der Definition von (\mathcal{E}) folgt nun, die Behauptung. ■

Der Beweis, dass für $\phi \in (\mathcal{E})$

$$\psi \longrightarrow \phi \cdot \psi, \quad \psi \in \mathcal{S}_t$$

eine stetige Abbildung auf \mathcal{S}_t definiert, erfolgt analog.

3.4 Hauptsatz

Aus denselben Gründen, aus denen wir H_t bzw. H_{-t} eingeführt haben, führen wir nun X_t ein. So wie der Raum H_t für den stochastischen Teil des Lösungsraumes und H_{-t} für den stochastischen Teil des Raumes, aus dem der Quellterm stammt, benutzt wird, benutzen wir X_t für den stochastischen Teil der Räume, aus denen die Koeffizienten stammen. Im theoretischen Fall ist $X_t = (\mathcal{E})$ (d.h. X_t ist unabhängig von t), im numerischen Fall ist $X_t = W^{t,\infty}(\mathbb{R}^k, \nu)$. Die wichtigste Eigenschaft von X_t ist, dass

$$\psi \longrightarrow \phi \cdot \psi, \quad \psi \in X_t$$

eine stetige Abbildung auf H_t definiert. Für den theoretischen Fall wurde dies im letzten Abschnitt bewiesen, für den numerischen Fall ist dies leicht ersichtlich.

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Hauptsatz dieses Kapitels zu beweisen:

Satz 3.5 Sei $t \geq 0$ und

$$k_{ij}, r \in L^\infty(D) \otimes_\pi X_t \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (23)$$

$$c_i \in W^{1,\infty}(D) \otimes_\pi X_t \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (24)$$

$$f \in H^{-1}(D) \otimes_H H_{-t}. \quad (25)$$

Sei

$$\left(\left(r - \frac{1}{2} \nabla_I \cdot c \right) v, v \right)_{0,t} \geq 0 \quad (26)$$

$$\sum_{i,j=1}^n (k_{ij}(x, \omega) v_i, v_j)_{0,t} \geq k_0 \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{0,t}^2 \quad (27)$$

für alle $v, v_1, \dots, v_n \in L^2(D) \otimes_H H_t$. Dann ist das Randwertproblem (29)-(30) wohldefiniert und hat eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(D) \otimes_H H_t$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass wir die Multiplikation

$$u \longmapsto a \cdot u, \quad u \in L^2(D) \otimes_H H_t,$$

für festes $a \in L^\infty(D) \otimes_\pi X_t$ so definieren können, dass sie eine stetige Abbildung in $L^2(D) \otimes_H H_t$ ist. Daraus folgt, dass unter den Annahmen (23)-(27) das Randwertproblem (29)-(30) wohldefiniert ist. Dann zeigen wir, dass das Lemma von Lax-Milgram anwendbar ist und daher eine eindeutige schwache Lösung existiert.

(I): Sei $a \in L^\infty(D) \otimes_\pi X_t$ beliebig. Da $L^\infty(D)$ und X_t Fréchet-Räume sind, ergibt sich mit Lemma 2.16, dass es Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $L^\infty(D)$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus X_t , und $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$ gibt, so dass $x_n \rightarrow 0$ in $L^\infty(D)$, $y_n \rightarrow 0$ in X_t und

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n. \quad (28)$$

Wir definieren nun die Operatorfolge $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ auf $L^2(D) \otimes_H H_t$ durch

$$T_m u := \sum_{n=1}^m \lambda_n x_n \otimes y_n \cdot u, \quad u \in L^2(D) \otimes_H H_t$$

und den Operator T durch $T := \lim_{m \rightarrow \infty} T_m$, wobei der Limes punktweise zu verstehen ist. Wir müssen folgendes zeigen

- (i) T ist eine stetige Abbildung auf $L^2(D) \otimes_H H_t$ und
- (ii) die Definition des Operators T hängt nicht von der Darstellung von a in (28) ab.

Zu (i): Da die Multiplikation mit einem Element aus $L^\infty(D)$ eine stetige Abbildung auf $L^2(D)$ definiert und die Multiplikation mit einem Element aus X_t eine stetige Abbildung auf H_t definiert, sind die Operatoren T_m stetig. Der Limes $T = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m$ existiert aufgrund der Tatsache, dass $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$, $x_n \rightarrow 0$ in $L^\infty(D)$ und $y_n \rightarrow 0$ in X_t . Da T der punktweise Limes von stetigen Operatoren ist, ist T stetig.

Zu (ii): Sei

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(1)} x_n^{(1)} \otimes y_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(2)} x_n^{(2)} \otimes y_n^{(2)}$$

und die Operatoren $T^{(1)}, T^{(2)}, (T_m^{(1)})_{m \in \mathbb{N}}$ und $(T_m^{(2)})_{m \in \mathbb{N}}$ seien auf dieselbe Weise definiert wie T und $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Seien $u \in L^2(D) \otimes_H H_t$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\|T^{(1)}u - T^{(2)}u\|_{0,t} \leq \|T^{(1)}u - T_m^{(1)}u\|_{0,t} + \|T_m^{(1)}u - T_m^{(2)}u\|_{0,t} + \|T_m^{(2)}u - T^{(2)}u\|_{0,t},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$. Aufgrund von $(\lambda_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$, $x_n^{(i)} \rightarrow 0$ in $L^\infty(D)$, $y_n^{(i)} \rightarrow 0$ in X_t und

$$\|T^{(i)}u - T_m^{(i)}u\|_{0,t} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \|\lambda_n x_n \otimes y_n \cdot u\|_{0,t},$$

gilt $\|T^{(i)}u - T_m^{(i)}u\|_{0,t} < \epsilon$ für m hinreichend groß, wobei $i = 1, 2$.

Sei

$$b_m := \sum_{n=1}^m \lambda_n^{(1)} x_n^{(1)} \otimes y_n^{(1)} - \sum_{n=1}^m \lambda_n^{(2)} x_n^{(2)} \otimes y_n^{(2)}.$$

Für m hinreichend groß gilt

$$\|b_m\|_\pi < \epsilon / \|u\|_{0,t}.$$

Wegen Lemma 2.16 existieren $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_l$ und $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_l$, so dass

$$b_m = \sum_{n=1}^l \hat{x}_n \otimes \hat{y}_n$$

und

$$\sum_{n=1}^l \|\hat{x}_n\|_{L^\infty(D)} \|\hat{y}_n\|_{X_t} < 2\epsilon / \|u\|_{0,t}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \|T_m^{(1)}u - T_m^{(2)}u\|_{0,t} &= \|b_m u\|_{0,t} \\ &\leq \sum_{n=1}^l \|\hat{x}_n\|_{L^\infty(D)} \|\hat{y}_n\|_{X_t} \|u\|_{0,t} \\ &< 2\epsilon \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\|T^{(1)}u - T^{(2)}u\|_{0,t} < 4\epsilon$ und aus diesem Grund hängt die Definition von T nicht von der Darstellung von a in (28) ab.

Zum Beweis von (II) zeigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.6 Sei $u \in H_0^1(D) \otimes_H H_t$ und $c_1, \dots, c_n \in W^{1,\infty}(D) \otimes_\pi X_t$. Dann gilt

$$(c \cdot \nabla_I u, u)_{0,t} = -\frac{1}{2} (\nabla_I \cdot c u, u)_{0,t}.$$

Beweis: Sei

$$u = \sum_{\mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \otimes f_{n_2},$$

wobei $(e_{n_1})_{n_1 \in \mathbb{N}}$ bzw. $(f_{n_2})_{n_2 \in \mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von $H_0^1(D)$ bzw. H_t sind und $\alpha_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}$ für $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ gilt. Sei

$$c_i = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l^{(i)} x_l^{(i)} \otimes y_l^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $(\lambda_l^{(i)})_{l \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$, $x_l^{(i)} \rightarrow 0$ in $W^{1,\infty}(D)$ und $y_l^{(i)} \rightarrow 0$ in X_t für $i = 1, \dots, n$ (cf. Lemma 2.16). Sei $m \in \mathbb{N}$ und

$$c^{(m)} := \left(\sum_{l=1}^m \lambda_l^{(1)} x_l^{(1)} \otimes y_l^{(1)}, \dots, \sum_{l=1}^m \lambda_l^{(n)} x_l^{(n)} \otimes y_l^{(n)} \right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (c^{(m)} \cdot \nabla_I u, u)_{0,t} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^m \lambda_l^{(i)} x_l^{(i)} \otimes y_l^{(i)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \text{Id} \right) \sum_{\mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \otimes f_{n_2}, \sum_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}} e_{m_1} \otimes f_{m_2} \right)_{0,t} \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_l^{(i)} x_l^{(i)} \otimes y_l^{(i)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \text{Id} \right) \alpha_{\mathbf{n}} e_{n_1} \otimes f_{n_2}, \alpha_{\mathbf{m}} e_{m_1} \otimes f_{m_2} \right)_{0,t} \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{m}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_l^{(i)} x_l^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} e_{n_1} \otimes y_l^{(i)} f_{n_2}, e_{m_1} \otimes f_{m_2} \right)_{0,t} \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{m}} \sum_{i=1}^n \lambda_l^{(i)} \left(x_l^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} e_{n_1}, e_{m_1} \right)_0 \left(y_l^{(i)} f_{n_2}, f_{m_2} \right)_{X_t}.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
& (\nabla_I \cdot c^{(m)} u, u)_{0,t} \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{m}} \sum_{i=1}^n \lambda_l^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_l^{(i)} e_{n_1}, e_{m_1} \right)_0 \left(y_l^{(i)} f_{n_2}, f_{m_2} \right)_{X_t}.
\end{aligned}$$

Aus

$$(\tilde{c} \cdot \nabla \tilde{u}, \tilde{u})_0 = -\frac{1}{2} (\nabla \cdot \tilde{c} \tilde{u}, \tilde{u})_0, \quad \tilde{c} \in W^{1,\infty}(D), \tilde{u} \in H_0^1(D),$$

(cf. [1], p. 96) folgt

$$\left(x_l^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} e_{n_1}, e_{m_1} \right)_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_l^{(i)} e_{n_1}, e_{m_1} \right)_0$$

für $n_1, m_1 \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$. Daher gilt

$$(c^{(m)} \cdot \nabla_I u, u)_{0,t} = -\frac{1}{2} (\nabla_I \cdot c^{(m)} u, u)_{0,t}.$$

Aus $(\lambda_l)_{l \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R})$, $x_l \rightarrow 0$ in $W^{1,\infty}(D)$ und $y_l \rightarrow 0$ in X_t folgt, dass

$$(c \cdot \nabla_I u, u)_{0,t} = -\frac{1}{2} (\nabla_I \cdot c u, u)_{0,t}.$$

■

(II): Wir müssen zeigen, dass

(i) die durch (33) definierte Bilinearform a und die durch (34) definierte

Linearform b stetig sind und

(ii) a koerziv ist.

Zu (i):

$$\begin{aligned}
& |a(u, v)| \\
& \leq \|K \nabla_I u\|_{0,t} \|\nabla_I v\|_{0,t} + \|c \cdot \nabla_I u\|_{0,t} \|v\|_{0,t} + \|ru\|_{0,t} \|v\|_{0,t} \\
& \leq C_1 \|\nabla_I u\|_{0,t} \|\nabla_I v\|_{0,t} + C_2 \|\nabla_I u\|_{0,t} \|v\|_{0,t} + C_3 \|u\|_{0,t} \|v\|_{0,t} \quad (\text{wegen (I)}) \\
& \leq C_1 \|u\|_{1,t} \|v\|_{1,t} + C_2 \|u\|_{1,t} \|v\|_{0,t} + C_3 \|u\|_{0,t} \|v\|_{0,t} \quad (\text{Lemma 3.2(ii)}) \\
& \leq (C_1 + C_2 + C_3) \|u\|_{1,t} \|v\|_{1,t} \quad (\text{Lemma 3.2(i)})
\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass b stetig ist.

Zu (ii):

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= (K \nabla_I u, \nabla_I u)_{0,t} + (c \cdot \nabla_I u, u)_{0,t} + (ru, u)_{0,t} \\
&= (K \nabla_I u, \nabla_I u)_{0,t} - \frac{1}{2} (\nabla_I \cdot cu, u)_{0,t} + (ru, u)_{0,t} \quad (\text{Lemma 3.6}) \\
&= (K \nabla_I u, \nabla_I u)_{0,t} + \left(\left(r - \frac{1}{2} \nabla_I \cdot c \right) u, u \right)_{0,t} \\
&\geq k_0 \|\nabla_I u\|_{0,t}^2 \quad (\text{wegen (26) und (27)}) \\
&\geq \frac{k_0}{c_0} \|u\|_{1,t}^2 \quad (\text{Lemma 3.2(iii)})
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.7 (1) Mittels Lemma 2.16 kann man einfach zeigen, dass $L^\infty(D) \otimes_\pi X_t \subsetneq L^\infty(D, X_t)$. Außerdem gilt $L^2(D) \otimes_H H_t \cong L^2(D, H_t)$. Hieraus läßt sich einfach ableiten, dass die Multiplikation von $L^\infty(D) \otimes_\pi X_t$ und $L^2(D) \otimes_H H_t$ eine Einschränkung der punktweisen Multiplikation von $L^\infty(D, X_t)$ und $L^2(D, H_t)$ ist.

(2) In [3] beschäftigt sich Besold mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen $u \in H^1_0(D) \otimes_H (S_p)$ der SPDE

$$\begin{aligned}
-\nabla_I \cdot (K(x, \omega) \nabla_I u(x, \omega)) &= f(x, \omega), \quad (x, \omega) \in D \times \Omega, \\
u(x, \omega) &= 0, \quad (x, \omega) \in \partial D \times \Omega,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
k_{ij} &\in L^\infty(D) \otimes_\pi (\mathcal{E})_\infty, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \\
f &\in H^{-1}(D) \otimes_H (S_{-p}).
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $(\mathcal{E})_\infty$ die Vervollständigung der trigonometrischen Polynomen bezüglich einer bestimmten Norm (siehe [3]).

(3) In [6] wird auf die Interpretation von (26) und (27) und den Zusammenhang zu den analogen Bedingungen im deterministischen Fall eingegangen.

3.5 Verallgemeinerte Randbedingungen

Wir haben uns bisher auf homogene Dirichlet-Randbedingungen beschränkt. In diesem Abschnitt wollen wir uns nun mit allgemeineren Randbedingungen befassen. Genauer werden wir den Rand des Gebietes D in drei disjunkte Teile zerlegen und wir werden auf dem ersten Teil des Randes homogene Dirichlet-Randbedingungen stellen, auf dem zweiten inhomogene Neumann-Randbedingungen und auf dem dritten inhomogene gemischte Randbedingungen. Später betrachten wir dann auch noch inhomogene Dirichlet-Randbedingungen.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ eine disjunkte Zerlegung von ∂D , wobei Γ_1 abgeschlossen sei, und sei $f \in H^{-1}(D) \otimes_H H_{-t}$, wobei $t \geq 0$. Außerdem sei $K = (k_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $c = (c_i)_{i=1,\dots,n}$, $k_{ij}, c_i, r : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : \Gamma_1 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : \Gamma_2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_3, \alpha : \Gamma_3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nennen $u = u(x, \omega) \in H^1(D) \otimes_H H_t$ eine **schwache Lösung** der Gleichung

$$\begin{aligned} Lu(x, \omega) &= \nabla_I \cdot (K(x, \omega) \nabla_I u(x, \omega)) + c(x, \omega) \cdot \nabla_I u(x, \omega) \\ &\quad + r(x, \omega) u(x, \omega) \\ &= f(x, \omega), \quad (x, \omega) \in D \times \Omega, \end{aligned} \quad (29)$$

$$u(x, \omega) = g_1, \quad (x, \omega) \in \partial\Gamma_1 \times \Omega, \quad (30)$$

$$K(x, \omega) \nabla_I u(x, \omega) \cdot \nu(x) = g_2, \quad (x, \omega) \in \partial\Gamma_2 \times \Omega, \quad (31)$$

$$K(x, \omega) \nabla_I u(x, \omega) \cdot \nu(x) + \alpha u = g_3, \quad (x, \omega) \in \partial\Gamma_3 \times \Omega, \quad (32)$$

wenn folgendes gilt: Es existiert ein $w \in H^1(D) \otimes_H H_t$ mit $w|_{\partial\Gamma_1} = g_1$ und ein $u' \in V := V_{det} \otimes_H H_t$, wobei $V_{det} := \{v \in H^1(D) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ und $u = u' + w$, so dass

$$\begin{aligned} a(u', v) &:= (K \nabla_I u', \nabla_I v)_{0,t} + (c \cdot \nabla_I u', v)_{0,t} \\ &\quad + (r u', v)_{0,t} + (\alpha u', v)_{0,\Gamma_3,t} \end{aligned} \quad (33)$$

$$= b(v) - a(v, w) \quad (34)$$

$$:= \langle f, v \rangle_{0,t} + (g_2, v)_{0,\Gamma_2,t} + (g_3, v)_{0,\Gamma_3,t} - a(v, w) \quad (35)$$

für alle $v \in V$ gilt.

Bemerkung 3.8 Wir schreiben auch abkürzende statt (29) – (32)

$$\begin{aligned} Lu &= f, \\ u|_{\Gamma_1} &= g_1, \\ K \nabla_I u \cdot \nu|_{\Gamma_2} &= g_2, \\ K \nabla_I u \cdot \nu + \alpha u|_{\Gamma_3} &= g_3. \end{aligned}$$

Analog zu $\|\cdot\|_{0,t}$ bzw. $(\cdot, \cdot)_{0,t}$ definieren wir $\|\cdot\|_{0,\Gamma,t} := \|\cdot\|_{L^2(\Gamma) \otimes_H H_t}$ bzw. $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma,t} := (\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma) \otimes_H H_t}$, wobei $\Gamma \subset \partial D$.

Lemma 3.9 Sei $u_1, \dots, u_n, v \in H_0^1(D) \otimes_H H_t$. Dann gilt

$$(u, \nabla_I v)_{0,t} = -(\nabla_I \cdot u, v)_{0,t} + (\nu_I \cdot u, v)_{0,\partial D,t}.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 3.6.

Nun können wir eine Verallgemeinerung von Satz 3.5 angeben:

Satz 3.10 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet. Sei

$$\begin{aligned} k_{ij}, c_i, \nabla_I \cdot c, r &\in L^\infty(D) \otimes_\pi X_t, \quad i, j \in \{1, \dots, d\}, \\ f &\in H^{-1}(D) \otimes_H H_{-t}, \\ \text{falls } |\Gamma_2 \cup \Gamma_3|_{n-1} > 0: \nu_I \cdot c &\in L^\infty(\Gamma_2 \cup \Gamma_3) \otimes_\pi X_t, \\ \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(x, \omega) \xi_i \xi_j &\geq k_0 |\xi|^2 \quad \forall x \in D, \omega \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ g_j &\in L^2(\Gamma_j) \otimes_H H_t, \quad j = 2, 3, \quad \alpha \in L^\infty(\Gamma_3) \otimes_\pi X_t \end{aligned}$$

Dann hat das Randwertproblem (29)-(32) mit $g_1 = 0$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in V$, wenn

1. $(r - \frac{1}{2} \nabla_I \cdot cu, u)_{0,t} \geq 0$,
2. $(\nu_I \cdot cu, u)_{0,\Gamma_2,t} \geq 0$,
3. $(\alpha + \frac{1}{2} \nu_I \cdot cu, u)_{0,\Gamma_3,t} \geq 0$.

für alle $u \in H^1(D) \otimes_H H_t$ gilt.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass

(i) die Bilinearform a und die Linearform b definiert durch (33) und (34) stetig sind und

(ii) a koerziv ist.

Zu (i):

$$\begin{aligned} &|a(u, v)| \\ &\leq (|K \nabla_I u|, |\nabla_I v|)_{0,t} + (|c| |\nabla_I u|, |v|)_{0,t} + (|r| |u|, |v|)_{0,t} + |(\alpha u, v)_{0,\Gamma_3,t}| \\ &\leq C_1 (|\nabla_I u|, |\nabla_I v|)_{0,t} + C_2 (|\nabla_I u|, |v|)_{0,t} \\ &\quad + C_3 (|u|, |v|)_{0,t} + \|\alpha u\|_{0,\Gamma_3,t} \|v|_{\Gamma_3}\|_{0,\Gamma_3,t} \\ &\leq C_1 \|\nabla_I u\|_{0,t} \|\nabla_I v\|_{0,t} + C_2 \|\nabla_I u\|_{0,t} \|v\|_{0,t} \\ &\quad + C_3 \|u\|_{0,t} \|v\|_{0,t} + C_4 \|u\|_{0,\Gamma_3,t} \|v|_{\Gamma_3}\|_{0,\Gamma_3,t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \|u\|_{1,t} \|v\|_{1,t} + C_2 \|u\|_{1,t} \|v\|_{0,t} \\
&\quad + C_3 \|u\|_{0,t} \|v\|_{0,t} + C_4 \|u\|_{0,\Gamma_3,t} \|v|_{\Gamma_3}\|_{0,\Gamma_3,t} \\
&\leq C \|u\|_{1,t} \|v\|_{1,t}
\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise zeigt man, dass b stetig ist.

Zu (ii):

Mittels Lemma 3.9 erhalten wir

$$\begin{aligned}
(c \cdot \nabla_I u, u)_{0,t} &= \frac{1}{2} (c, \nabla_I u^2)_{0,t} \\
&= -\frac{1}{2} (\nabla_I \cdot cu, u)_{0,t} + \frac{1}{2} (\nu_I \cdot cu, u)_{0,\Gamma_2 \cup \Gamma_3,t}.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= (K \nabla_I u, \nabla_I u)_{0,t} + (c \cdot \nabla_I u, u)_{0,t} + (ru, u)_{0,t} + (\alpha u, u)_{0,\Gamma_3,t} \\
&= (K \nabla_I u, \nabla_I u)_{0,t} - \frac{1}{2} (\nabla_I \cdot cu, u)_{0,t} + (ru, u)_{0,t} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\nu_I \cdot cu, u)_{0,\Gamma_2,t} + \left(\left(\alpha + \frac{1}{2} \nu_I \cdot c \right) u, u \right)_{0,\Gamma_3,t} \\
&\geq (K \nabla_I u, \nabla_I u)_{0,t} + \left(\left(r - \frac{1}{2} \right) \nabla_I \cdot cu, u \right)_{0,t} \\
&\geq k_0 \|\nabla_I u\|_{0,t}^2 \\
&\geq \frac{k_0}{c_0} \|u\|_{1,t}^2.
\end{aligned}$$

■

Folgendes Korollar folgt unmittelbar aus dem gerade bewiesenen Satz.

Korollar 3.11 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet. Sei

$$\begin{aligned}
&k_{ij}, c_i, \nabla_I \cdot c, r \in L^\infty(D) \otimes_\pi X_t, \quad i, j \in \{1, \dots, d\}, \\
&\quad f \in H^{-1}(D) \otimes_H H_{-t}, \\
&\text{if } |\Gamma_2 \cup \Gamma_3|_{n-1} > 0: \nu_I \cdot c \in L^\infty(\Gamma_2 \cup \Gamma_3) \otimes_\pi X_t, \\
&\sum_{i,j=1}^n k_{ij}(x, \omega) \xi_i \xi_j \geq k_0 |\xi|^2 \quad \forall x \in D, \omega \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \\
&g_j \in L^2(\Gamma_j) \otimes_H H_t, \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha \in L^\infty(\Gamma_3) \otimes_\pi X_t.
\end{aligned}$$

Es existiere ein $w \in H^1(D)$ mit $w|_{\Gamma_1} = g_1$. Dann hat das Randwertproblem (29)-(32) eine schwache Lösung $u \in V$, wenn

1. $(r - \frac{1}{2}\nabla_I \cdot cu, u)_{0,t} \geq 0,$
 2. $(\nu_I \cdot cu, u)_{0,\Gamma_2,t} \geq 0,$
 3. $(\alpha + \frac{1}{2}\nu_I \cdot cu, u)_{0,\Gamma_3,t} \geq 0.$
- für alle $u \in H^1(D) \otimes_H H_t$ gilt.

4 Numerik stochastischer partieller Differentialgleichungen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem numerischen Lösen von SPDEs mittels FEM. Um die Notation einfach zu halten beschränken wir uns auf die Gleichung

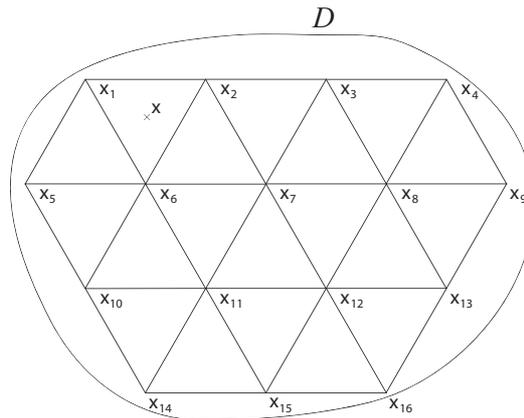
$$-\nabla_I \cdot (K(x, \omega) \nabla_I u(x, \omega)) = f(x, \omega),$$

deren schwache Lösungen wir betrachten.

4.1 Zugrunde liegendes Modell

Wir gehen in unserem Modell davon aus, dass die stochastische Störung von K unabhängig von der von f ist. Aufgrund der völlig verschiedenen Natur des Diffusionskoeffizienten und des Quellterms in den Anwendungen von elliptischen SPDEs, ist dies keine starke Einschränkung. Wir behandeln zunächst die Störung von K .

Da im Regelfall in den Anwendungen davon auszugehen ist, dass die stochastische Störung nahe beieinander liegender Punkte nicht unabhängig ist, modellieren wir die Störung wie folgt: Wir überziehen das Gebiet D mit einem aus den Punkten p_1, \dots, p_M bestehenden Gitter, wie es in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



Zu jedem Punkt p_i , $i = 1, \dots, M$, assoziieren wir eine reelle Zufallsvariable X_i , wobei X_1, \dots, X_M unabhängig identisch verteilt sind (ihre Verteilung nennen wir μ). Wenn wir den Rand vernachlässigen, so liegt jedes

$x \in D$ in einem Dreieck. Die Störung am Punkt x berechnen wir mittels baryzentrischer Koordinaten aus den Störungen bei den Eckpunkten des Dreiecks, d.h. die Störung beim Punkt x in der Abbildung ist gleich $\lambda_1(x)X_1 + \lambda_2(x)X_2 + \lambda_4(x)X_4$, wobei $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_4(x)$ die baryzentrischen Koordinaten von x sind.

Nennen wir ein Paar bestehend aus einem Gitter $P = \{p_1, \dots, p_M\}$ und einer Verteilung μ ein Störungsgitter, so läßt sich jedem Störungsgitter (P, μ) eine Funktion $S_{P,\mu} : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnen, die eine stochastische Störung in D beschreibt. Dabei ist Ω der zugrunde gelegte Wahrscheinlichkeitsraum. Mittels eines solches Störungsgitter $(P, \mu^K) = (\{p_1, \dots, p_M\}, \mu^K)$ modellieren wir die Störungen $S^K := S_{P,\mu^K}$ von K . D.h. für den Diffusionskoeffizienten gilt

$$K(x, \omega) = K_{det}(x) + S^K(x, \omega), \quad (36)$$

wobei K_{det} der deterministische Teil des Diffusionskoeffizienten ist. Auf dieselbe Weise ließe sich auch die Störung des Konvektions- und des Reaktionsterms modellieren, wenn wir sie betrachten würden.

Aufgrund des Distributionscharakters von f müssen wir für die Modellierung der Störung von f einen modifizierten Ansatz wählen. Wir werden dazu die Punkte eines Gitters nicht mit Zufallsvariablen, sondern mit stochastische Distributionen assoziieren, die aber genauso lokal wirken wie die Zufallsvariablen im Falle der Störung des Diffusionskoeffizienten. Dazu müssen wir jetzt auf die konkrete mathematische Realisierung, insbesondere von Ω eingehen.

Sei $(\{p_1, \dots, p_M\}, \mu^K)$ das Störungsgitter von K , wobei μ^K ein W-Maß auf $([c_1, c_2], \mathcal{B})$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sei. Des weiteren sei q_1, \dots, q_N ein weiteres Gitter (dies benutzen wir für die Störung von f). Des weiteren sei μ^f ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Wir definieren Ω wie folgt:

$$\Omega := \left(\prod_{i=1}^M [c_1, c_2] \right) \times \mathbb{R}^N.$$

Das linke Produkt wird für die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_M genutzt, die die Störung von K generieren. Um den im letzten Kapitel bewiesenen Existenz- und Eindeutigkeitsatz benutzen zu können, müssen sie beschränkt sein. Aus diesem Grund sind diese Zufallsvariablen $[c_1, c_2]$ -wertig, wobei wir zur möglichen Wahl von c_1 und c_2 gleich noch Angaben machen werden. Seien nun D_1, \dots, D_N Elemente von $W^{-r,2}(\mathbb{R}, \mu_f)$. Wir setzen diese Distributionen zu Elementen von $W^{-r,2}(\mathbb{R}^M, \nu_f)$ fort, wobei $\nu_f = \prod_{i=1}^M \mu_f$ und D_i als Element

von $W^{-r,2}(\mathbb{R}^M, \nu_f)$ jeweils nur auf die i -te Koordinate eines Elementes aus $W^{r,2}(\mathbb{R}^M, \nu_f)$ wirkt. Wie bei K definieren wir nun die Störung S^f von f am Punkt x als mittels der baryzentrischen Koordinaten gewichtete Summe aus den drei $D_{i_1}, D_{i_2}, D_{i_3}$, die zu den Eckpunkten i_1, i_2, i_3 des Dreiecks assoziiert sind, in dem x liegt. Analog zu K gilt

$$f = f_{det} + S^f = f_{det} + \sum_{n=1}^N \kappa_n(x) D_n,$$

wobei $f_{det} \in H^{-1}(D)$ der deterministische Teil des Quellterms ist und $\kappa_n(x)$ die baryzentrischen Koordinaten bezeichnet. Des weiteren gilt $f \in H^{-1}(D) \otimes_H W^{-r,2}(\mathbb{R}^M, \nu_f)$. Die Störung S^K in (36) läßt sich nun wie folgt ausdrücken:

$$K(x, \omega) = K_{det}(x) + \sum_{m=1}^M \lambda_m(x) \omega_m.$$

Dabei ist ω_m die m -te Koordinate von Ω .

Um nun Satz 3.5 anwenden zu können muss

$$\begin{aligned} k_{ij}, r &\in L^\infty(D) \otimes_\pi (\mathcal{E}) \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ c_i &\in W^{1,\infty}(D) \otimes_\pi (\mathcal{E}) \quad i \in \{1, \dots, n\}, \\ f &\in H^{-1}(D) \otimes_H W^{-r,2}(\mathbb{R}^M, \nu_f) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} ((r - \frac{1}{2} \nabla_I \cdot c) v, v)_{0,t} &\geq 0 \\ \sum_{i,j=1}^n (k_{ij}(x, \omega) v_i, v_j)_{0,t} &\geq k_0 \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{0,t}^2 \end{aligned}$$

für alle $v, v_1, \dots, v_n \in L^2(D) \otimes_H W^{r,2}(\mathbb{R}^M, \nu_f)$ gelten. Dies ist bei der Wahl von c_1 und c_2 zu bedenken. Für weitere Details siehe [6].

4.2 Numerische Berechnung

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf den Fall $t = 0$. Wir werden am Ende des Abschnittes erläutern wie der Fall $t > 0$ zu behandeln ist.

Zur numerischen Lösung unserer SPDE betrachten wir das Galerkin-Verfahren, das für den deterministischen Fall in den Abschnitten 2.10 und 2.11 beschrieben ist. Im deterministischen Fall wird der Ansatzraum V_h für ein festes

h von der Menge der Formfunktionen $(\varphi_i)_{i=1,\dots,m}$ erzeugt, den so genannten Basisfunktionen. Wir werden nun als die unseren Ansatzraum erzeugenden Basisfunktionen die Produkte aus den deterministischen Basisfunktionen $(\varphi_i)_{i=1,\dots,l}$ und einer passenden Menge von Funktionen $(\psi_j)_{j=1,\dots,m}$ aus $L^2(\mathbb{R}^M, \nu_f)$ wählen. D.h. unsere Basisfunktionen sind die $(\varphi_i \psi_j)_{i=1,\dots,l, j=1,\dots,m}$.

Die $(\psi_j)_{j=1,\dots,m}$ werden wie folgt konstruiert. Seien $c_1 = s_1 < s_2 < \dots < s_p = c_2$ aus $[c_1, c_2]$ und $-\infty = t_1 < t_2 < \dots < t_q = \infty$ aus $\bar{\mathbb{R}}$ so gewählt, dass

$$\mu^K([s_i, s_{i+1}]) = \mu^K([s_j, s_{j+1}])$$

für $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$ und

$$\mu^f([s_i, s_{i+1}]) = \mu^f([s_j, s_{j+1}])$$

für $i, j \in \{0, \dots, q-1\}$. Die $(\psi_j)_j$ bestehen aus allen Funktionen der Form

$$\prod_{u=1}^M \mathbf{1}_{[s_{i_u}, s_{i_u+1}]}(\omega_u) \prod_{v=1}^N \mathbf{1}_{[t_{j_v}, t_{j_v+1}]}(\omega_{M+u}),$$

wobei $i_1, \dots, i_M \in \{1, \dots, p\}$ und $j_1, \dots, j_N \in \{1, \dots, q\}$. Es handelt sich also um Elementarfunktionen, wobei ihren Träger paarweise disjunkt sind und die Vereinigung der Träger aller Funktionen Ω ist. Des weiteren ist für alle ψ_j das Maß ihres Trägers bezüglich μ gleich.

Im Rahmen des Galerkin-Verfahrens ist es notwendig, Steifigkeitsmatrix und Lastvektor (siehe (15) und (16)) zu berechnen. Für die Steifigkeitsmatrix erhalten wir

$$\begin{aligned} a(\varphi_i \psi_j, \varphi_k \psi_l) &= \int_{\Omega} \int_D K(x, \omega) \nabla_I(\varphi_i \psi_j) \nabla_I(\varphi_k \psi_l) dx d\mu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_D \left(K_{det}(x) + \sum_{m=1}^M \lambda_m(x) \omega_m \right) \nabla \varphi_i \psi_j \nabla \varphi_k \psi_l dx d\mu(\omega) \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\int_D \lambda_m(x) \nabla \varphi_i \nabla \varphi_k dx \right) \left(\int_{\Omega} \omega_m \psi_j \psi_l d\mu(\omega) \right) \\ &\quad + \left(\int_D K_{det}(x) \nabla \varphi_i \nabla \varphi_k dx \right) \left(\int_{\Omega} \psi_j \psi_l d\mu(\omega) \right) \end{aligned}$$

und für den Lastvektor

$$\begin{aligned}
 b(\varphi_i \psi_j) &= \left\langle f_{det} + \sum_{n=1}^N \kappa_n(x) D_n, \varphi_i \psi_j \right\rangle \\
 &= \langle f_{det}, \varphi_i \psi_j \rangle + \left\langle \sum_{n=1}^N \kappa_n(x) D_n, \varphi_i \psi_j \right\rangle \\
 &= \langle f_{det}, \varphi_i \rangle \left(\int_{\Omega} \psi_j d\mu(\omega) \right) + \sum_{n=1}^N \left(\int_D \kappa_n(x) \varphi_i dx \right) \langle D_n, \psi_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (14) hat dann die Form

$$\sum_{k,l} a(\varphi_i \psi_j, \varphi_k \psi_l) \xi_{k,l} = b(\varphi_i \psi_j) \quad \forall i, j.$$

Da die Träger von ψ_j und ψ_l für $j \neq l$ einen leeren Schnitt haben gilt $a(\varphi_i \psi_j, \varphi_k \psi_l) = 0$ für $j \neq l$. Somit läßt sich die vorherige Gleichung zu

$$\sum_k a(\varphi_i \psi_j, \varphi_k \psi_j) \xi_{k,j} = b(\varphi_i \psi_j) \quad \forall i, j$$

vereinfachen. Da die $(\psi_j)_j$ Elementarfunktionen mit Wertebereich $\{0, 1\}$ sind und ihr Träger das Maß $p^{-M} q^{-N}$, gilt

$$\begin{aligned}
 a(\varphi_i \psi_j, \varphi_k \psi_j) &= \sum_{m=1}^M \left(\int_D \lambda_m(x) \nabla \varphi_i \nabla \varphi_k dx \right) \left(\int_{\text{supp}(\psi_j)} \omega_m d\mu(\omega) \right) \\
 &\quad + p^{-M} q^{-N} \left(\int_D K_{det}(x) \nabla \varphi_i \nabla \varphi_k dx \right)
 \end{aligned}$$

und

$$b(\varphi_i \psi_j) = p^{-M} q^{-N} \langle f_{det}, \varphi_i \rangle + \sum_{n=1}^N \left(\int_D \kappa_n(x) \varphi_i dx \right) \langle D_n, \psi_j \rangle.$$

Wir kommen nun zur Abschätzung des Rechenaufwandes im Vergleich zum deterministischen Fall. Die Terme

$$\int_D K_{det}(x) \nabla \varphi_i \nabla \varphi_k dx$$

und

$$\langle f_{det}, \varphi_i \rangle$$

sind exakt die Ausdrücke, die man im deterministischen Fall zu berechnen hat. Die Terme

$$\int_D \lambda_m(x) \nabla \varphi_i \nabla \varphi_k dx$$

und

$$\int_D \kappa_n(x) \varphi_i dx$$

sind von von gleichem Rechenaufwand wie im deterministischen Fall. Des weiteren hängen

$$\int_{\text{supp}(\psi_j)} \omega_m d\mu(\omega)$$

und

$$\langle D_n, \psi_j \rangle$$

nur von der m -ten bzw. n -ten Koordinate von ψ_j ab. Somit entspricht der Rechenaufwand in unserem Fall im wesentlichen (d.h. bis auf Konstanten) dem Rechenaufwand des deterministischen Falls mit einer zusätzlichen Raumdimension.

Bemerkung 4.1 Im Fall $t > 0$ können wir keine Indikatorfunktionen für den stochastischen Teil der Formfunktionen wählen, sondern benötigen Funktionen höherer Glattheit. Hier können dann ähnliche Funktionen wie beim numerischen Lösen deterministischer PDEs gewählt werden. Im Fall $t = 1$ wären dies z.B. die allgemein bekannten Hütchenfunktionen.

Literatur

- [1] Angermann L., Knabner P. *Numerik partieller Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*, (Springer-Verlag, 2000)
- [2] Alt H.W. *Lineare Funktionalanalysis*, (Springer-Verlag, 1999)
- [3] Besold P. *Solutions to stochastic partial differential equations as elements of tensor product spaces*, Universität Göttingen, Institut für Mathematische Stochastik, Göttingen (2000)
- [4] Braess D., *Finite Elemente*, (Springer-Verlag, 1997)
- [5] Brenner S.C., Scott L.R., *The mathematical theory of Finite Element Methods*, (Springer-Verlag, 1994)
- [6] Bulla I. *Dirichlet Problem with Stochastic Coefficients*, erscheint bei Stochastics and Dynamics
- [7] Gelfand I.M., Schilow G.E. *Verallgemeinerte Funktionen und Distributionen, Band 2*, (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962)
- [8] Hackbusch W., *Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen*, (Teubner, Stuttgart, 1996)
- [9] Hida T. *Brownian Motion*, (Springer-Verlag, 1980)
- [10] Hida T., Kuo H.-H., Potthoff J., Streit L. *White Noise, An Infinite Dimensional Calculus*, (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1993)
- [11] Holden H., Lindstrøm, T., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T. *Stochastic boundary value problems. A White noise functional approach*, Probab. Theory Related Fields 95 No. 3 (1993) 391-419
- [12] Holden H., Lindstrøm, T., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T. *The Burgers equation with noisy force and stochastic heat equation*, Commun. Partial Diff. Equations 19 No. 1-2 (1994) 119-141
- [13] Holden H., Lindstrøm, T., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T. *The pressure equation for fluid flow in a stochastic medium*, Potential Analysis 4 (1995) 655-674

- [14] Holden H., Lindstrøm, T., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T. *The stochastic Wick-type Burgers equation*, In: Etheridge, A., Stochastic partial differential equations, (Cambridge University Press Lond. Math. Soc. Lect. Note, Ser. 216, Cambridge, 1995) 141-161
- [15] Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T. *Stochastic Partial Differential Equations*, (Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1996)
- [16] Lindstrøm, T., Øksendal B., Ubøe J. *Stochastic partial differential equations involving positive noise*, In: Barlow, M., Bingham, N., Stochastic analysis, (Cambridge University Press Lond. Math. Soc. Lect. Note, Ser. 167, Cambridge, 1991) 261-303
- [17] Malliavin P. *Integration and Probability*, (Springer-Verlag, 1995)
- [18] Obata N. *White Noise Calculus and Fock Space*, (Springer-Verlag, 1994)
- [19] Parthasarathy K.R. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, (Birkhäuser Verlag, Basel, 1992)
- [20] Rozanov, Y.A., Sanso, F. On stochastic boundary problems for harmonic functions in Banach spaces, Theory Probab. Appl. 44 No. 1 (1999), 114-119
- [21] Rudin W. *Functional Analysis*, McGraw-Hill Inc., New York
- [22] Schaefer H.H. (1999) *Topological Vector Spaces*, (Springer-Verlag, 1991)
- [23] Treves F. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, (Academic Press Inc., New York, 1967)
- [24] Våge, G. *Hilbert space methods applied to stochastic partial differential equations*, In: Körezlioglu, H. et al., Stochastic analysis and related topics V: The Silivri workshop, 1994 (Birkhäuser Progress in Probability, Vol. 38, Boston, 1994) 281-294
- [25] Våge, G. *Variational methods for PDEs applied to stochastic partial differential equations*, Math. Scand. 82 No. 1 (1998) 113-137
- [26] Wloka J. *Partielle Differentialgleichungen*, (B. G. Teubner, Stuttgart, 1982)

5 Notationen und Abkürzungen

D^s	:	(verallgemeinerte) Ableitung nach $s = (s_1, \dots, s_n)$
∂_i	:	Ableitung nach der i -ten Variablen
(\mathcal{E})	:	trigonometrische Polynome (siehe Def. 2.23, S. 15)
$\exp^\diamond[\langle \cdot, \xi \rangle]$:	Wick-Exponential (siehe Def. 2.22, S. 15)
$\Gamma(A)\phi$:	$\Gamma(A)\phi = \sum_{n=1}^N a_n \exp^\diamond(i\langle \cdot, A\xi_n \rangle)$ für $\phi = \sum_{n=1}^N a_n \exp^\diamond(i\langle \cdot, \xi_n \rangle)$ (siehe S. 15)
$\Gamma(H)$:	Fock-Raum über H (siehe Def. 2.27, S. 16)
$\text{ind } \lim_{\alpha \in A} X_\alpha$:	induktiver Limes
l^1	:	Raum der Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller/komplexer Zahlen, für die $\sum_{i=1}^\infty x_n < \infty$ gilt
L	:	elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung
$L(X; Y)$:	Raum der stetigen linearen Abbildungen von X nach Y
(L^p)	:	komplexer $L^p(S^*(\mathbb{R}), \mathcal{B}, \mu)$ (siehe S. 15)
\mathbb{N}	:	$\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	:	$\{0, 1, 2, \dots\}$
$\ \nabla u\ _{L^2(D)}^2$:	$\sum_{i=1}^n \int_D \left \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right ^2 dx$
$\ \nabla \otimes_H \text{Id}(u)\ $:	$\sum_i \left\ \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes_H \text{Id}(u) \right\ $
$\phi^{(p)}$:	Fortsetzung von $\Gamma(A)^p$ auf (S_p) angewandt auf ϕ (siehe S. ??)
ϕ_X	:	Fourier-Transformierte von X
$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$:	direktes Produkt
$\text{proj } \lim_{\alpha \in A} X_\alpha$:	projektiver Limes
$S(\mathbb{R}^d)$:	Schwartz-Raum
(S_p)	:	Vervollständigung von (\mathcal{E}) bzgl. $\ \phi\ _{2,p}$ (siehe S. 15)
(S)	:	Hidascher Testfunktionenraum (siehe S. 16)
$(S)^*$:	Hidascher Distributionsraum (siehe S. 16)
$\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$:	direkte Summe
$\text{Tr}(f)$:	Spur von f (siehe Def. 2.25, S. 16)
$u \otimes v$:	Tensorprodukt von u und v (siehe Satz/Def. 2.15, S. 10)
$u \otimes_\epsilon v$:	Tensorprodukt von u und v fortgesetzt auf den bzgl. der ϵ -Topologie vervollständigten Tensorraum (siehe S. 11)
$u \otimes_H v$:	Tensorprodukt von u und v fortgesetzt auf den bzgl. der H.S.-Topologie vervollständigten Tensorraum (siehe S. 11)

$H_0^1(D)$:	Sobolev-Raum (siehe Def. 2.31, S. 19)
$H^{-1}(D)$:	Dualraum des Sobolev-Raums (siehe S. 19)
$x \otimes y$:	Tensorprodukt von x und y (siehe S. 9)
$x \hat{\otimes} y$:	Symmetrisiertes Tensorprodukt von x und y (siehe S. 9)
$x^{\otimes n}$:	n -faches Tensorprodukt von x (siehe S. 9)
$x \otimes_l y$:	Rechtskontraktion von x und y (siehe Def. 2.29, S. 17)
$x \otimes^l y$:	Linkskontraktion von x und y (siehe S. 18)
$x \hat{\otimes}_l y$:	Symmetrisierte Rechtskontraktion von x und y (siehe S. 18)
$x^{\circ n}$:	n -tes wickgeordnete Polynome (siehe Def. 2.26, S. 16)
X^*	:	Dualraum von X
$X_{\mathbb{C}}$:	Komplexifizierung des reellen Vektorraums X
$X \otimes Y$:	Tensorprodukt von X und Y (siehe Def. 2.11, S. 8)
$X^{\otimes n}$:	n -faches Tensorprodukt von X (siehe S. 9)
$X \hat{\otimes} Y$:	Symmetrisiertes Tensorprodukt von X und Y (siehe S. 9)
$X \otimes_{\epsilon} Y$:	Tensorprodukt von X und Y vervollständigt bzgl. der ϵ -Topologie (siehe S. 11)
$X \otimes_H Y$:	Tensorprodukt von X und Y vervollständigt bzgl. der H.S.-Topologie (siehe S. 11)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	Dualprodukt oder Skalarprodukt
$\ \cdot \ _{2,p}$:	(S_p) -Norm (siehe S. 15)
$ \cdot _p$:	$ f _p = (A^{\otimes n})^p f $ (siehe Prop. ??, S. ??)

- 25.10.1978: Geboren in Peine
1985: Einschulung in Grundschule (Colegio Alemán, Medellín)
1986 - 1988: Grundschule Hämelerwald
1988 - 1990: Orientierungsstufe Hämelerwald
1990 - 1997: Gymnasium Lehrte
Abitur
- Oktober 1997: Immatrikulation an der Fernuniversität Hagen
als Gasthörer
Informatik mit Nebenfach Mathematik (Diplom)
- Oktober 1998: Immatrikulation an der Georg-August-Universität
zu Göttingen
Mathematik mit Nebenfach Informatik (Diplom)
- Februar 2003: Abschluss des Studiums
Schwerpunkt: Stochastik
Note: "mit Auszeichnung"
Diplom-Mathematiker
- Februar 2003: Beginn der Promotion (Schwerpunkt: Stochastik)
Schwerpunkt: Stochastische partielle Differentialgleichungen