

Mehrdimensionale Kettenbrüche über  
Funktionskörpern unter Verwendung der  
Bruhat-Tits-Gebäude

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten  
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von  
**Andreas-Stephan Elsenhans**  
aus  
Clausthal-Zellerfeld

Göttingen 2005

D7

**Referent:** Prof. Dr. Ulrich Stuhler

**Korreferent:** Prof. Dr. Thomas Schick

**Tag der mündlichen Prüfung:**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Klassische Kettenbruchtheorie</b>	<b>7</b>
2.1	Kettenbrüche reeller Zahlen . . . . .	7
2.2	Kettenbrüche über Funktionenkörpern . . . . .	11
2.3	Geometrische Kettenbruchtheorie . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Gebäude</b>	<b>23</b>
3.1	Das sphärische Gebäude $A_n$ . . . . .	23
3.2	Affine Gebäude . . . . .	27
3.3	Die Operation von $GL_n(k[t])$ . . . . .	33
3.4	Kompaktifizierungen affiner Gebäude . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Der mehrdimensionale Kettenbruch</b>	<b>45</b>
4.1	Stabilisatorgruppen . . . . .	45
4.2	Die Operation von $GL_n(A)$ auf Geodäten . . . . .	50
4.3	Die Kettenbruchentwicklung . . . . .	52
4.4	Rückgewinnung von Information . . . . .	53
4.5	Beispiele . . . . .	55
<b>A</b>	<b>Die Hermite-Normalform</b>	<b>59</b>
A.1	Allgemeine Hermite-Normalform . . . . .	59
A.2	Die Hermite-Normalform eines $\mathbb{Z}$ -Gitters . . . . .	60
A.3	Die Hermite-Normalform eines $\mathbb{F}_q[[\frac{1}{t}]]$ -Gitters . . . . .	61
<b>B</b>	<b>Vektorbündel über <math>\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)</math></b>	<b>65</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>66</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>69</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Kettenbrüche sind so alt wie die Mathematik selbst. So findet sich am Anfang des zehnten Buches von Euklids Elementen bereits der Satz, dass zwei Größen genau dann inkommensurabel sind, wenn die Wechselwegnahme nicht abbricht.

In moderner Sprache formuliert bedeutet dieses, dass eine Zahl genau dann irrational ist, wenn ihre Kettenbruchentwicklung unendlich ist.

Es kann nur spekuliert werden, wie viele der heutigen Sätze der Kettenbruchtheorie bereits Euklid, Archimedes oder Diophant bekannt waren. (Siehe hierzu [Ko], 1. Teil oder [We], Kapitel 1, Abschnitt 9.)

In neuerer Zeit erscheinen die Kettenbrüche wieder bei Christiaan Huygens (1629–1695). Er benutzte ihre Approximationseigenschaften zur Konstruktion von Getrieben in astronomischen Modellen (siehe [Pe1], S. 53).

Von einer mathematischen Theorie der Kettenbrüche kann erst bei Euler und Lagrange gesprochen werden. Sie untersuchen unter anderem systematisch die periodischen Kettenbrüche. Die Resultate wurden auf die Pellsche Gleichung  $t^2 - Du^2 = 1$  angewendet. Im Sinne der algebraischen Zahlentheorie wurde hier die Einheitsgruppe von  $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$  berechnet.

Eine geometrische Kettenbruchtheorie beginnt bei Hermann Minkowski und seiner „Geometrie der Zahlen“. Das Hauptinteresse gilt hier der algebraischen Zahlentheorie. Die periodischen Kettenbrüche und die Einheitsgruppen algebraischer Zahlkörper stehen wieder im Mittelpunkt der Untersuchungen.

Die Konstruktion höherdimensionaler Kettenbrüche beginnt bei Jacobi (1804–1851) und wird später von Perron (1880–1975) weiter vorangetrieben. Die Idee dieser Konstruktionen ist, die Wechselwegnahme zyklisch mit mehr als zwei Strecken zu wiederholen (siehe [Be], S. 2). Jedoch erwies sich dieser Weg als unerwartet schwer. Die Idee, Kettenbrüche im Funktionenkörperfall zu betrachten, geht auf Emil Artin [Ar] zurück. Hier gelten die klassischen Resultate, sofern der Grundkörper als endlich vorausgesetzt wird. Eine geometrische Interpretation des Kettenbruchs ist mit Hilfe eindimensionaler Bruhat-Tits-Gebäude möglich.

Diese Arbeit ist der Untersuchung mehrdimensionaler Kettenbrüche gewidmet. Jedoch soll nicht mit einem formalen Algorithmus begonnen werden, dessen Eigenschaften dann schwierig zu beschreiben sind. Vielmehr soll aus der Geometrie der Bruhat-Tits-Gebäude eine Verallgemeinerung der Kettenbrüche im Funktionenkörperfall konstruiert werden.

Im Einzelnen ist die Arbeit wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 wird die klassische Kettenbruchtheorie und die verwandte Approximationstheorie diskutiert. Neben den Hauptsätzen der Theorie gilt das Interesse den geometrischen Interpretationsmöglichkeiten der Kettenbruchentwicklung.

In Kapitel 3 werden mit einer Übersicht über die Bruhat-Tits-Gebäude die wesentlichen Grundlagen für eine Verallgemeinerung des klassischen Kettenbruchs gelegt.

Wir beginnen dabei mit sphärischen Gebäuden und enden mit Kompaktifizierungen affiner Gebäude.

In Kapitel 4 werden zunächst einige Lemmata über Geodäten in Gebäuden sowie die Operation von  $GL_n(\mathbb{F}_q[t])$  auf dem Gebäude und den Geodäten bewiesen. Es folgt die Definition des verallgemeinerten Kettenbruchs, die im Fall eines eindimensionalen Gebäudes mit dem klassischen Kettenbruch zusammenfällt. Wir schließen mit dem Beispiel eines periodischen Kettenbruchs, dessen Wert sich aus den Lösungen einer irreduziblen kubischen Gleichung ergibt.

## Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. U. Stuhler für die Themenstellung und die Betreuung dieser Arbeit. Dank geht auch an das Graduiertenkolleg „Gruppen und Geometrie“ für die Förderung dieses Projektes. Weiterhin danke ich meiner Mutter, meinem Bruder Christoph sowie meinen Kollegen Karsten Roeseler und Kristin Stroth für die mühevollen Durchsicht dieser Arbeit.

# Kapitel 2

## Klassische Kettenbruchtheorie

### 2.1 Kettenbrüche reeller Zahlen

#### 2.1.1 Definition

Ein *klassischer Kettenbruch* ist ein Ausdruck der Form

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots}}}$$

Die  $a_i$  heißen *Partialzähler* und die  $b_i$  *Partialnenner*.

Sind alle  $a_i = 1$  und  $b_i \in \mathbb{N}$  für  $i > 0$  sowie  $b_0 \in \mathbb{Z}$ , so heißt der Kettenbruch *regelmäßig*. Für einen solchen Kettenbruch schreiben wir auch kurz

$$[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n].$$

Ein unendlicher regelmäßiger Kettenbruch ist der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [b_0, b_1, \dots, b_n].$$

#### 2.1.2 Die Fundamentalformeln

In der klassischen Kettenbruchtheorie werden zunächst die Fundamentalformeln entwickelt, mit denen sich ein beliebiger Kettenbruch Stufe für Stufe von oben auswerten lässt. Genauer: Wir brechen den Kettenbruch nach  $b_n$  ab und nennen dies den  $n$ -ten *Näherungsbruch*  $\frac{A_n}{B_n}$ . Für die Folgen  $A_n$  und  $B_n$  lässt sich zeigen, dass sie dem gleichen (von den  $b_i$  abhängigen) rekursiven Bildungsgesetz unterliegen und sich nur in den Startwerten unterscheiden. Weiterhin betrachten wir auch Endstücke der Kettenbruchentwicklung und bezeichnen sie mit

$$\xi_n = [b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots].$$

Die *Fundamentalformeln* lauten dann:

$$\begin{aligned}
 A_{-2} &= 0 & A_{-1} &= 1 \\
 B_{-2} &= 1 & B_{-1} &= 0 \\
 A_{n+1} &= A_n b_{n+1} + A_{n-1} \\
 B_{n+1} &= B_n b_{n+1} + B_{n-1} \\
 \xi_0 &= \frac{A_n \xi_{n+1} + A_{n-1}}{B_n \xi_{n+1} + B_{n-1}} \\
 \xi_0 - \frac{A_n}{B_n} &= \frac{(-1)^n}{B_n (B_n \xi_{n+1} + B_{n-1})} \\
 (-1)^{n+1} &= A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n
 \end{aligned}$$

Ausgehend von diesen Formeln lassen sich die folgenden Aussagen über regelmäßige Kettenbrüche leicht zeigen:

1. Eine rationale Zahl hat genau zwei Kettenbruchentwicklungen. Sie sind beide endlich und unterscheiden sich nur im letzten Schritt.
2. Jede irrationale Zahl hat eine eindeutige Kettenbruchentwicklung. Sie ist unendlich.
3. Jeder Kettenbruch konvergiert.

Interessanter wird die Situation, wenn wir die Konvergenzgeschwindigkeit betrachten. Hier lassen sich unter Verwendung der Fundamentalformeln die folgenden Aussagen zeigen:

1. Die Folge  $B_n$  der Näherungsdenner wächst mindestens wie die Folge der Fibonacci-Zahlen.
2. Der Approximationsfehler des  $n$ -ten Näherungsbruchs ist höchstens

$$\frac{1}{B_n B_{n+1}}.$$

3. Die Näherungsbrüche mit geradem Index unterschätzen den Kettenbruch, die mit ungeradem Index überschätzen ihn.
4. Von je zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen hat mindestens einer einen Approximationsfehler, der kleiner als  $\frac{1}{2B_n^2}$  ist. Speziell gibt es also zu jeder Irrationalzahl unendlich viele Brüche, die sie mit dieser Genauigkeit approximieren.
5. Von der letzten Aussage gilt auch eine Umkehrung: Ist  $\frac{u}{v}$  ein Bruch, der  $x$  mit einem Fehler kleiner als  $\frac{1}{2v^2}$  approximiert, so ist  $\frac{u}{v}$  ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von  $x$ . Es gibt folglich relativ wenige Brüche, die eine Irrationalzahl mit dieser Genauigkeit approximieren. Zudem erhalten wir mit der Kettenbruchentwicklung eine Möglichkeit, alle diese Approximationen auszurechnen. Beispielweise lässt sich leicht zeigen, dass jede Lösung der Pell'schen Gleichung  $u^2 - dv^2 = \pm 1$  einem Näherungsbruch  $\frac{u}{v}$  von  $\sqrt{d}$  entspricht. (Hierbei ist  $d \in \mathbb{N}$  und keine Quadratzahl.)

### 2.1.3 Äquivalente Zahlen

In der Kettenbruchtheorie heißen zwei Zahlen  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  *äquivalent*, wenn ihre Kettenbruchentwicklungen ab einer bestimmten Stelle übereinstimmen. Genauer: Sind

$$\begin{aligned}\xi &= [b_0, b_1, b_2, \dots] \\ \eta &= [b'_0, b'_1, b'_2, \dots]\end{aligned}$$

die regelmäßigen Kettenbruchentwicklungen von  $\xi$  und  $\eta$ , so heißen  $\xi$  und  $\eta$  äquivalent, falls es  $n, m \in \mathbb{N}$  so gibt, dass

$$b_{n+i} = b'_{m+i} \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots$$

gilt. Es gilt der (siehe [Pe1], S. 55)

**Satz.**

Die Zahlen  $\xi$  und  $\eta$  sind genau dann äquivalent, wenn es  $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$  gibt, die

$$\xi = \frac{A\eta + B}{C\eta + D} \text{ und } AD - BC = \pm 1$$

erfüllen.

Dieses Resultat kann auch folgendermaßen formuliert werden: Alle rationalen Zahlen bilden eine Äquivalenzklasse. Die Äquivalenzklasse einer irrationalen Zahl ist genau ihre Bahn unter der Operation von  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , wenn  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  mit Möbiustransformationen operiert.

### 2.1.4 Spezielle Kettenbrüche

Ein interessanter Spezialfall sind periodische Kettenbrüche.

**Definition.**

1. Ein regelmäßiger Kettenbruch heißt *periodisch*, wenn die Folge der Partialnenner  $b_n$  periodisch ist.
2. Eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$  heißt *quadratische Irrationalzahl*, wenn  $x$  nicht rational und Lösung einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten aus  $\mathbb{Z}$  ist.
3. Eine quadratische Irrationalzahl  $x$  heißt *reduziert*, wenn  $x > 1$  ist, und die konjugierte Zahl  $\bar{x}$  in  $[-1, 0]$  liegt.

Periodische Kettenbrüche wurde von Euler und von Lagrange untersucht. Euler zeigte:

**Satz.**

Ein periodischer Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalzahl dar.

Lagrange fand den

**Satz.**

Die Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalzahl ist periodisch. Sie ist rein periodisch genau dann, wenn die Zahl reduziert ist.

Außerdem fand Lagrange Formeln, um die Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalzahl effektiv berechnen zu können. Mit ihnen ist auch eine obere Abschätzung der Partialnenner und der Periodenlänge möglich (siehe [Ro], S. 50). Weitere Untersuchungen betreffen die Symmetrie der Periode bzw. eine Spiegelung der Periode. Mit diesen Resultaten konnte Lagrange beweisen, dass die Pellische Gleichung stets lösbar ist. (Siehe [Fo], S. 240.)

Nun ist der Versuch naheliegend, andere Diophantische Gleichungen auf Approximationsaufgaben zurückzuführen und diese mit Kettenbrüchen zu lösen. Falls eine Rückführung auf eine Approximationsaufgabe möglich ist, so ist dann jedoch meist eine algebraische Zahl höheren Grades zu approximieren. Diese Approximationen kann man zwar mit einem Kettenbruchalgorithmus ausrechnen, aber es stehen keine Sätze aus der Kettenbruchtheorie zur Verfügung, welche den Approximationsfehler nach unten abschätzen.

In dieser Situation gibt es jedoch noch den Satz von Thue-Siegel-Roth, der besagt, dass es zu jeder algebraischen Zahl  $x$  nur endlich viele Brüche  $\frac{u}{v}$  gibt, die

$$\left| x - \frac{u}{v} \right| < \frac{1}{v^{2+\epsilon}}$$

für jedes feste  $\epsilon > 0$  erfüllen. Jedoch ist von diesem Satz keine effektive Version bekannt. Ein anderer Ansatz ist die Methode der logarithmischen Linearformen von Baker. Sie führt zu relativ schwachen expliziten Abschätzungen, mit denen sich jedoch etliche Diophantische Probleme lösen lassen. (Siehe [Ba], Kapitel 4.)

Einen anderen speziellen Kettenbruchtyp erhalten wir, indem wir den Kettenbruch der Eulerschen Zahl ausrechnen. Numerisch finden wir leicht (siehe [Pe2], S. 110)

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, \dots] = [2, \overline{1, 2\lambda, 1}]_{\lambda=1}^{\infty}.$$

Kettenbrüche dieses Typs heißen auch *Hurwitzkettenbrüche*. Bei ihnen gibt es eine endliche Folge von Polynomen so, dass sich die  $b_i$  ab einer bestimmten Stelle als sukzessive Funktionswerte dieser Polynome ergeben. (Siehe [Pe1], S. 110 ff.)

### 2.1.5 Stochastische Betrachtungen

Ein anderer Blickwinkel ergibt sich, wenn wir nicht nur den Kettenbruch einer speziellen Zahl betrachten, sondern die Kettenbrüche aller Zahlen aus dem Intervall  $[0, 1]$ . Beispielsweise bilden die Zahlen mit endlicher Kettenbruchentwicklung eine Lebesguesche Nullmenge. Weiterhin bilden alle Zahlen mit beschränkter Kettenbruchentwicklung (genauer: mit beschränkten Partialnennern) eine Nullmenge. Es gilt sogar der

**Satz.** (Siehe [Kh], S. 67.)

*Es bezeichne  $b_n(\alpha)$  den  $n$ -ten Partialnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung der irrationalen Zahl  $\alpha$ . Weiterhin sei  $f(n)$  eine beliebige positive Funktion der natürlichen Variablen  $n$ . Die Ungleichung*

$$b_n(\alpha) \geq f(n)$$

*ist für fast alle  $\alpha$  genau dann unendlich oft erfüllt, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$  divergiert. Die Konvergenz der Reihe ist äquivalent dazu, dass die obige Ungleichung nur auf einer Menge vom Maß null unendlich oft erfüllt wird.*

Weiterhin wurden Grenzwerte wie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{B_n}$$

untersucht. Über beide Limes ist bekannt, dass sie für die Kettenbrüche fast aller Zahlen existieren. Weiterhin ist bekannt, dass sie für fast alle Zahlen gleich sind. In diesem Fall heißt der erste Limes *Khinchine-Konstante*, der zweite *Khinchine-Levy-Konstante*. Die Khinchine-Levy-Konstante hat den Wert  $\exp\left(\frac{\pi^2}{12 \ln(2)}\right)$ . (Siehe [Ro], S. 163.)

### 2.1.6 Das Gaußsche Maß und der Satz von Kusmin

Wir betrachten die Verteilung der  $\xi_n$ . Das heißt, wir interessieren uns für

$$m_n(x) := \mu(\{t \in (0, 1) \mid \frac{1}{\xi_n(t)} < x\}),$$

wobei  $\mu$  das Lebesgue-Maß ist.  $m_n$  wird als *Gaußsche Maß* bezeichnet. Gauß vermutete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)} \text{ für } 0 < x < 1$$

Kusmin konnte die folgende Aussage zeigen:

$$|m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)}| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}}$$

mit zwei positiven Konstanten  $A$  und  $\lambda$ . (Siehe [Kh], S. 86.)

## 2.2 Kettenbrüche über Funktionenkörpern

Das wesentliche Hilfsmittel der klassischen Kettenbruchtheorie sind die Fundamentalformeln. Da ihr Beweis keine speziellen Eigenschaften der reellen Zahlen verwendet, lassen sich große Teile der Kettenbruchtheorie auf andere Situationen übertragen.

Hier benötigen wir zunächst einige Definitionen:

#### Definition.

Es bezeichne  $k = \mathbb{F}_q$  den endlichen Körper mit  $q$  Elementen und  $A = k[t]$  den Polynomring in einer Unbestimmten  $t$  sowie  $K = k(t)$  den zugehörigen Quotientenkörper. Auf  $K$  gibt es die Bewertung

$$v_\infty\left(\frac{P}{Q}\right) = (-\deg P) - (-\deg Q) \text{ für } P, Q \in A.$$

Sie impliziert die Norm

$$|f|_\infty = q^{-v_\infty(f)}.$$

Die Vervollständigung von  $K$  bezüglich dieser Norm ist  $k((t^{-1}))$ . Wir bezeichnen sie mit  $\widehat{K}$  und setzen die Bewertung auf  $\widehat{K}$  fort. Der Bewertungsring von  $\widehat{K}$  ist  $\mathcal{O} = k[[t^{-1}]]$ .

Weiterhin heißt ein Kettenbruch

$$[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n]$$

regelmäßig, wenn  $b_i \in A$  und für  $i \geq 1$  zudem  $b_i \notin k$  gilt.

Mit der obigen Definition können wir sofort die ersten Eigenschaften der Kettenbrüche hinschreiben.

#### Satz.

*Es gelten die klassischen Fundamentalformeln. Setzen wir*

$$\begin{aligned} A_{n+1} &:= A_n b_{n+1} + A_{n-1} & A_{-1} &:= 1 & A_{-2} &:= 0 \\ B_{n+1} &:= B_n b_{n+1} + B_{n-1} & B_{-1} &:= 0 & B_{-2} &:= 1, \end{aligned}$$

so gilt:

1. Die Glieder der Folgen  $(A_n)$  und  $(B_n)$  liegen in  $A$ .

2.  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = b_1$  und  $\deg(B_{n+1}) > \deg(B_n)$ . Speziell ist  $\deg(B_n) \geq n$ .
3. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] &= \frac{A_n}{B_n} \\ A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} &= (-1)^n \\ \text{ggT}(A_n, B_n) &= 1 \\ \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} &= \frac{(-1)^n}{B_nB_{n+1}} \\ [b_0, b_1, b_2, \dots] - \frac{A_n}{B_n} &= \frac{(-1)^n}{B_n(\xi_{n+1}B_n + B_{n-1})}, \end{aligned}$$

wobei wir  $\xi_n = [b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots]$  setzen.

Nun können wir sofort zeigen, dass die Näherungsbrüche eine Cauchy-Folge bilden. Es gilt für  $n > k$ :

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_k}{B_k} \right|_\infty = \left| \sum_{i=k}^{n-1} \left( \frac{A_{i+1}}{B_{i+1}} - \frac{A_i}{B_i} \right) \right|_\infty = \left| \sum_{i=k}^{n-1} \frac{(-1)^i}{B_iB_{i+1}} \right|_\infty = \left| \frac{1}{B_kB_{k+1}} \right|_\infty \leq \frac{1}{q^{2k+1}},$$

damit konvergiert jeder regelmäßige Kettenbruch in  $\widehat{K}$ . Weiterhin erhalten wir mit dieser Abschätzung sofort

$$[b_0, b_1, b_2, \dots] \in \begin{cases} \widehat{K} \setminus \mathcal{O} & \deg(b_0) > 0 \\ \mathcal{O}^\times & \text{falls } b_0 \in \mathbb{F}_q^* \\ t^{-1}\mathcal{O} & b_0 = 0 \end{cases}.$$

Dies liefert auch einen Beweis für die Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung: Wollen wir  $\sum_{i \gg -\infty} x_i t^{-i} = \xi_0 \in \widehat{K}$  in einen Kettenbruch entwickeln, so besteht nur die Möglichkeit, zunächst  $b_0 = \sum_{0 \geq i \gg -\infty} x_i t^{-i}$  zu setzen, weil  $b_0 \in A$  und  $\xi_0 - b_0 = [0, b_1, b_2, \dots] \in t^{-1}\mathcal{O}$  gilt. Dann erhalten wir  $\xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - b_0}$ . Mit  $\xi_1 = [b_1, b_2, b_3, \dots]$  folgt induktiv die Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung von  $\xi_0$ . Falls der Spezialfall  $\xi_k \in A$  eintritt, so gilt  $b_k = \xi_k$  und der Kettenbruch bricht ab. Entsteht jedoch ein unendlicher Kettenbruch, so können wir seine Konvergenz gegen  $\xi_0$  an den Fundamentalformeln ablesen.

Weiterhin folgt aus der obigen Entwicklungsvorschrift, dass der Kettenbruch eines Elements  $x \in \widehat{K}$  genau dann endlich ist, wenn  $x \in K$  gilt.

### 2.2.1 Periodische Kettenbrüche

Den Spezialfall eines periodischen Kettenbruchs können wir genau wie im klassischen Fall behandeln. Wir erhalten das Resultat von Lagrange:

**Satz.**

Die Kettenbruchentwicklung eines Elements  $x \in \widehat{K}$  ist genau dann periodisch, wenn es einer quadratischen Gleichung über  $K$  genügt und nicht in  $K$  enthalten ist.

**Beweis.**

Sei zunächst die Kettenbruchentwicklung von  $x$  rein periodisch, dann ist  $x \notin K$  und es gilt

$$x = \xi_0 = \overline{[b_0, b_1, \dots, b_n]} = \overline{[b_{n+1}, \dots, b_{2n+1}]} = \xi_{n+1},$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} x = \xi_0 &= \frac{A_n \xi_{n+1} + A_{n-1}}{B_n \xi_{n+1} + B_{n-1}} = \frac{A_n \xi_0 + A_{n-1}}{B_n \xi_0 + B_{n-1}} \\ \implies 0 &= B_n x^2 + (B_{n-1} - A_n)x - A_{n-1}. \end{aligned}$$

Da  $B_k \neq 0$  gilt, ist  $x$  Lösung einer quadratischen Gleichung über  $K$ . Ist der Kettenbruch nicht rein periodisch, so gilt

$$x = \xi_0 = [b_0, \dots, b_{k-1}, \overline{b_k, \dots, b_l}] = \frac{A_{k-1}\xi_k + A_{k-2}}{B_{k-1}\xi_k + B_{k-2}} \in K(\xi_k).$$

Da  $x$  nicht in  $K$  enthalten ist, folgt  $K(x) = K(\xi_k)$ . Somit ist auch  $x$  Lösung einer quadratischen Gleichung über  $K$ .

Sei nun umgekehrt  $x$  die Lösung einer quadratischen Gleichung, etwa  $ux^2 + vx + w = 0$  mit  $u, v, w \in A$ , dann gilt für beliebiges  $k$

$$0 = ux^2 + vx + w = u \left( \frac{A_{k-1}\xi_k + A_{k-2}}{B_{k-1}\xi_k + B_{k-2}} \right)^2 + v \frac{A_{k-1}\xi_k + A_{k-2}}{B_{k-1}\xi_k + B_{k-2}} + w.$$

Damit ist  $\xi_k$  eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$0 = u(A_{k-1}\xi_k + A_{k-2})^2 + v(A_{k-1}\xi_k + A_{k-2})(B_{k-1}\xi_k + B_{k-2}) + w(B_{k-1}\xi_k + B_{k-2})^2.$$

Betrachten wir nun nacheinander die Koeffizienten dieser Gleichung, so sehen wir zunächst, dass sie alle aus  $A$  sind. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \text{Koeffizient von } \xi_k^2 &= uA_{k-1}^2 + vA_{k-1}B_{k-1} + wB_{k-1}^2 \\ &= B_{k-1}^2 \left( u \left( \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right)^2 + v \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + w \right) \end{aligned}$$

Da  $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$  die Nullstelle  $\xi_0$  des Polynoms in der Klammer gut approximiert, ist die Klammer fast null. Genauer gilt

$$\begin{aligned} & \left| u \left( x + \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - x \right)^2 + v \left( x + \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - x \right) + w \right|_{\infty} \\ &= \left| ux^2 + vx + w + 2u \left( \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - x \right) x + u \left( \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - x \right)^2 + v \left( \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - x \right) \right|_{\infty} \\ &\leq |B_{k-1}^{-2}|_{\infty} (|2ux + uB_k^{-2} + v|_{\infty}) \leq |B_{k-1}^{-2}|_{\infty} (|2ux|_{\infty} + |u|_{\infty} + |v|_{\infty}). \end{aligned}$$

Dieses zeigt, dass der Koeffizient von  $\xi_k^2$  durch  $|2ux|_{\infty} + |u|_{\infty} + |v|_{\infty}$  beschränkt ist. Mit ähnlicher Argumentation können wir auch Schranken für die anderen Koeffizienten finden. Da die Koeffizienten alle aus  $A$  sind, gibt es nur endlich viele mögliche Koeffizientensätze. Damit gibt es aber auch nur endlich viele mögliche  $\xi_k$ . In der Folge  $(\xi_k)$  treten deshalb Wiederholungen auf. Die erste Wiederholung liefert die Periode des Kettenbruchs.  $\square$

### 2.2.2 Approximationssätze

Die Fundamentalformel

$$\xi_0 - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n}{B_n(\xi_n B_n + B_{n-1})}$$

liefert im Funktionenkörperfall den Approximationsfehler

$$v_{\infty} \left( \xi_0 - \frac{A_n}{B_n} \right) = -2v_{\infty}(B_n) - v_{\infty}(\xi_n).$$

Aus dem Periodizitätssatz für die Kettenbrüche quadratischer irrationaler Elemente folgt die Beschränktheit der  $\xi_n$ . Dieses ist ein Spezialfall des Approximationssatzes von Liouville.

**Satz.**

Sei  $x \in \widehat{K}$  ein über  $K$  algebraisches Element vom Grad  $d$ , dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  so, dass

$$\left| x - \frac{u}{v} \right|_{\infty} \geq C \frac{1}{|v|_{\infty}^d}$$

für beliebige  $u, v \in A$  gilt.

In der klassischen Theorie über  $\mathbb{Q}$  ist der Liouvillesche Approximationssatz ein Vorgänger des Satzes von Thue-Siegel-Roth, der die gleiche Approximationsaussage mit Exponenten 2 statt  $d$  liefert. Im Jahr 1949 zeigte Mahler, dass diese Sätze nicht auf den Funktionenkörperfall übertragbar sind:

Mahler betrachtete für  $s \in \mathbb{N}$  das Element  $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} t^{-p^i s} \in \mathbb{F}_p((t^{-1}))$ . Dieses löst die Gleichung

$$\alpha^{p^s} - \alpha + \frac{1}{t} = 0.$$

Approximieren wir  $\alpha$  durch die  $k$ -te Partialsumme der obigen Reihe, so erhalten wir als Approximationsfehler

$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} t^{-p^i s} \right|_{\infty} = \left| t^{-p^k s} \right|_{\infty} = \left| t^{-p^{(k-1)s}} \right|_{\infty}^{p^s}.$$

Es gibt also unendlich viele Brüche  $\frac{u}{v}$  mit  $u, v \in \mathbb{F}_p[t]$ , die  $\alpha$  mit dem Fehler  $|\frac{1}{v}|^{p^s}$  approximieren. Scheinbar ist der Liouvillesche Approximationssatz in dieser Situation optimal. Jedoch gibt es den folgenden

**Satz.** (Alain Lasjaunias, Bernard de Mathan 1996) (Siehe [La], Theorem 1)

Sei  $\alpha \in \widehat{K}$  ein über  $K$  algebraisches Element vom Grad  $d$ , welches keiner Gleichung der Form

$$\alpha = \frac{A\alpha^{p^s} + B}{C\alpha^{p^s} + D} \quad (2.1)$$

mit  $A, \dots, D \in K$  genügt. Dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  nur endlich viele Paare  $P, Q \in A$ , die die Ungleichung

$$|Q\alpha - P| < |Q|^{-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + \epsilon}$$

erfüllen.

**Definition.**

Ein algebraisches Element heißt aus Klasse I, wenn es eine Gleichung wie 2.1 erfüllt. Wenn es keine derartige Gleichung erfüllt, so heißt es aus Klasse II. Die Unterklasse Ia besteht aus den Elementen der Klasse I, die die Gleichung 2.1 erfüllen, wobei die Koeffizienten  $A, \dots, D$  aus  $\mathbb{F}_q[t]$  sind und zusätzlich  $AD - BC \in k^*$  erfüllen.

Die Elemente der Klasse Ia zeichnen sich durch eine spezielle quasiperiodische Kettenbruchentwicklung aus. Dieses beschreibt der folgende

**Satz.** (Siehe [Sch], Theorem 4)

Sei  $x \in \widehat{K}$  ein beliebiges Element und  $[b_0, b_1, b_2, \dots]$  seine regelmäßige Kettenbruchentwicklung.  $x$  ist genau dann ein Element der Klasse Ia, wenn es natürliche Zahlen  $n_0$  und  $d$  gibt, sodass

$$b_n^{p^s} = b_{n+d} \text{ für alle } n \geq n_0$$

erfüllt ist. D.h. die Klasse Ia besteht genau aus den Elementen  $x$ , die zu  $x^{p^s}$  im Sinne der Kettenbruchtheorie äquivalent sind.

### 2.2.3 Stochastische Betrachtungen

Um die stochastischen Ergebnisse wie in 2.1.5 oder 2.1.6 formulieren zu können, benötigen wir zunächst einen Ersatz für das Lebesgue-Maß.

**Definition.**

Wir bezeichnen mit

$$B(a, r) := \{f \in \widehat{K} \mid |f - a|_\infty < r\}$$

die offene Kugel um  $a$  mit Radius  $r$ . Durch

$$\mu(B(a, q^{-d})) := q^{-d} \text{ mit } d \in \mathbb{Z}$$

wird auf  $\widehat{K}$  ein Maß definiert. Dieses ist das Haar-Maß von  $\widehat{K}$ , mit der Normierung  $\mu(\mathcal{O}) = \#k$ .

Wir bezeichnen wieder mit  $b_n(f)$  den  $n$ -ten Partialnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von  $f$ . Dann gilt der folgende

**Satz.** (Siehe [Ber], Theorem 6.)

Für fast alle  $f \in \widehat{K}$  gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\deg(b_1) + \dots + \deg(b_n)) &= \frac{q}{q-1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |b_1 \dots b_n|_\infty^{\frac{1}{n}} &= q^{\frac{q}{q-1}}. \end{aligned}$$

Einen Ersatz für das Gaußsche Maß liefert der folgende

**Satz.**

Für beliebige  $h_1, \dots, h_n \in tk[t]$  gilt

$$\begin{aligned} \mu\{f \in t^{-1}\mathcal{O} \mid b_1(f) = h_1; \dots; b_n(f) = h_n\} = \\ \prod_{i=1}^n \mu\{f \in t^{-1}\mathcal{O} \mid b_i(f) = h_i\} = \left(\frac{1}{q}\right)^{2(\deg(h_1) + \dots + \deg(h_n))}. \end{aligned}$$

Ist  $M \subset t^{-1}\mathcal{O}$  eine beliebige messbare Menge, dann gilt für jedes  $i \geq 1$

$$\mu\{f \in t^{-1}\mathcal{O} \mid \xi_i(f)^{-1} \in M\} = \mu(M).$$

**Beweis.**

Siehe [Ber], Theorem 3. □

## 2.3 Geometrische Kettenbruchtheorie

### 2.3.1 Einleitung

Minkowski ist vermutlich der erste gewesen, der Kettenbrüche systematisch geometrisch betrachtete. Minkowski fand unter anderem einen geometrischen Beweis für den Lagrangeschen Periodizitätssatz.

Dieser geometrische Zugang basiert auf einem zweidimensionalen Gitter, in dem nacheinander „benachbarte“ Gitterpunkte konstruiert werden. Eine höherdimensionale Verallgemeinerung dieser Methode wurde lange gesucht, bis sie von Johannes Buchmann 1982 in seiner Doktorarbeit [Bu] entwickelt wurde.

Ein anderer geometrischer Zugang ergibt sich über hyperbolische Geometrie. Hier verwenden wir die obere Halbebene, deren Rand die reelle Achse ist. Dann zerlegen

wir die Halbebene in hyperbolische Dreiecke, ähnlich der Konstruktion des Fundamentalbereichs der Modulgruppe. Diese Zerlegung erfolgt jedoch nicht mit der vollen Modulgruppe, sondern mit der von

$$z \mapsto z + 1 \quad z \mapsto \frac{z}{2z + 1}$$

erzeugten Untergruppe. Dies wird auch als Farey-Tessellation bezeichnet.

Die Verbindung zu Kettenbrüchen ergibt sich wie folgt: Wir betrachten die Geodäte zwischen einem beliebigen Punkt im Fundamentalbereich und dem Randpunkt, dessen Kettenbruchentwicklung wir bestimmen möchten. Diese Geodäte verläuft durch eine Folge von Dreiecken, die nur vom gewählten Randpunkt abhängt und ihn eindeutig bestimmt. Nun konstruieren wir eine symbolische Kodierung dieser Geodäte.

Genauer (für den Fall eines positiv reellen Randpunktes): Ausgehend vom Fundamentaldreieck laufen wir auf der Geodäte zum Randpunkt. Dabei durchlaufen wir nacheinander eine Folge von Dreiecken. Jedes Dreieck betreten wir durch Überschreiten einer Kante. Wir verlassen es durch Überschreiten einer der beiden anderen Kanten. Diese können wir entweder als die linke oder als die rechte von zwei Möglichkeiten beschreiben. Wir erhalten also eine Folge von Symbolen „L“ und „R“. Beginnt die Folge mit „R“, so ergänzen wir formal Null „L“ Symbole. Nun zählen wir die Länge der Blöcke gleicher Symbole, wir erhalten

$$[ \text{Anzahl „L“} , \text{Anzahl „R“} , \text{Anzahl „L“} , \dots ] .$$

Dieses stimmt mit der Kettenbruchentwicklung des Randpunktes überein.

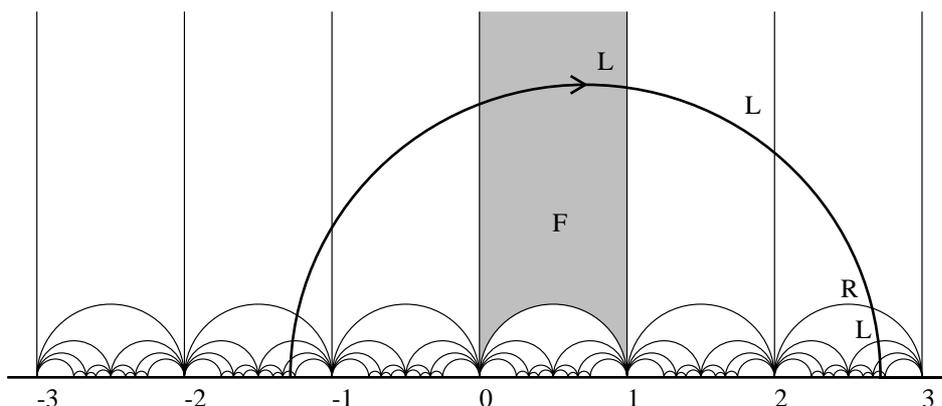


Abbildung 2.1: Farey-Tessellation der oberen Halbebene, Kettenbruch von  $e = [2, 1, 2, \dots]$

Die statistischen Resultate aus 2.1.6 lassen sich hiermit zu ergodentheoretischen Aussagen unter Verwendung des hyperbolischen Maßes umformulieren. (Siehe [Bed], Abschnitt 7.4.)

Um einen Zusammenhang mit Gittern herzustellen, können wir die obere Halbebene mit Äquivalenzklassen von Basen zweidimensionaler Gitter identifizieren, wobei zwei Gitterbasen äquivalent heißen, wenn sie sich durch Drehung und Skalierung ineinander überführen lassen.

Im Funktionenkörperfall verläuft der Zugang auch über Gitter, jedoch nicht über Gitterpunkte oder Gitterbasen. Aus der Menge aller Gitter konstruieren wir zunächst einen Graphen – den Serreschen Baum. Die Darstellung folgt hierbei zunächst [Pa1] und [Pa2].

### 2.3.2 Der Serresche Baum

Wie bisher wird weiterhin die Notation

$$k = \mathbb{F}_q, \quad A = k[t], \quad K = k(t^{-1}), \quad \widehat{K} = k((t^{-1})), \quad \mathfrak{o} = k[[t^{-1}]]$$

verwendet.

**Definition.**

1. Ein Gitter in  $\widehat{K}^n$  ist ein freier  $\mathfrak{o}$ -Modul vom Rang  $n$ .
2. Zwei Gitter heißen äquivalent, wenn sie sich nur um einen Skalierungsfaktor unterscheiden, also

$$L \sim L' \iff L = cL' \text{ für ein } c \in \widehat{K}^*.$$

3. Die Äquivalenzklasse eines Gitters  $L$  wird auch mit  $[L]$  bezeichnet.

Auf der Menge der Gitterklassen gibt es eine Metrik.

**Definition.**

Seien  $[L_1]$  und  $[L_2]$  zwei Gitterklassen, so können wir Repräsentanten  $\Lambda_1, \Lambda_2$  wählen, die  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$  und  $t\Lambda_1 \not\subset \Lambda_2$  erfüllen. Der Abstand  $d([L_1], [L_2])$  oder  $d(L_1, L_2)$  ist das minimale  $k \in \mathbb{N}$ , welches  $t^k\Lambda_1 \supset \Lambda_2$  erfüllt.

**Bemerkung.**

Es lässt sich zeigen, dass die obige Konstruktion nicht von der konkreten Wahl der Repräsentanten abhängt. Weiterhin lässt sich nachrechnen, dass alle Eigenschaften einer Metrik erfüllt sind.

Nun konstruieren wir einen Graphen. Als Eckenmenge wählen wir die Äquivalenzklassen von Gittern. Zwei Gitterklassen sind mit einer Kante verbunden, falls sie den Abstand 1 haben.

Ab jetzt beschränkt sich die Betrachtung auf den zweidimensionalen Fall. Dann hat dieser Graph einige interessante Eigenschaften:

1. Er ist zusammenhängend.
2. Der Abstand zweier Gitterklassen im Graphen stimmt mit dem oben beschriebenen Abstand überein.
3. Der Graph hat keine Kreise und ist daher ein Baum.
4. Jede Ecke hat  $q + 1$  Nachbarn.

Dieser Graph wird als Serrescher Baum  $\mathbb{T}_q$  bezeichnet.

#### Normalformen für Gitterklassen

Für spätere Rechnungen ist es sinnvoll, ein zweidimensionales Gitter  $\Gamma$  durch eine normierte Basis zu beschreiben. Dies liefert auch einen Überblick über alle Gitterklassen im Serreschen Baum. Für ein Gitter verwenden wir die folgende

**Notation.**

Eine Matrix mit eckigen Klammern

$$\left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \text{ mit } a, b, c, d \in \widehat{K}$$

bezeichnet das von den Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  erzeugte  $\mathfrak{o}$ -Gitter im  $\widehat{K}^2$ .

**Satz.** (Hermite-Normalform)

Jedes zweidimensionale Gitter  $\Gamma \subset \widehat{K}^2$  hat eine eindeutige Gitterbasis der Form

$$\begin{bmatrix} t^i & b \\ 0 & t^j \end{bmatrix},$$

wobei  $b$  ein Element aus  $K$  ist, welches nur Monome vom  $t$ -Grad größer als  $i$  hat.

**Bemerkung.**

Die Hermite-Normalform existiert auch in höherer Dimension. Sie ist im Anhang A ausformuliert.

**Bemerkung.**

Für die Hermite-Normalform gibt es einen kurzen Existenzbeweis: Der Durchschnitt des Gitters  $\Gamma$  mit dem vom ersten Einheitsvektor erzeugten Unterraum ist ein ein-dimensionaler direkter Summand von  $\Gamma$ .

Daher bildet ein Basisvektor dieses direkten Summanden zusammen mit einem Basisvektor eines komplementären Summanden eine Gitterbasis von  $\Gamma$ .

Die Hermite-Normalform von  $\Gamma$  entsteht aus dieser Basis, wenn sie durch Multiplikation mit Einheiten passend normiert wird und der komplementäre Summand zuvor richtig gewählt wurde.

**Beweis.** (Konstruktiver Existenzbeweis der Hermite-Normalform)

Sei hierzu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \widehat{K}$$

eine beliebige Basis des Gitters  $\Gamma$ , für das eine normierte Basis bestimmt werden soll.

Zunächst können wir die Basisvektoren mit Elementen aus  $\mathcal{O}^\times$  skalieren, ohne das Gitter selbst zu verändern. So können wir zunächst erreichen, dass  $c$  und  $d$  entweder null oder von der Form  $t^k$  sind. Dann können wir die Basisvektoren vertauschen, falls nicht  $|c|_\infty < |d|_\infty$  gilt. Nun gilt  $\frac{c}{d} \in \mathcal{O}$ . Folglich können wir vom ersten Basisvektor das  $\frac{c}{d}$ -fache des zweiten abziehen. Wir erhalten eine Basis von  $\Gamma$ , die  $c = 0$  erfüllt. Nun können wir den ersten Basisvektor wieder mit Elementen aus  $\mathcal{O}^\times$  multiplizieren und erhalten ein Element der Form  $t^i$  für  $a$ . Jetzt hat das Gitter eine Basis der Form

$$\begin{bmatrix} t^i & b \\ 0 & t^j \end{bmatrix} \text{ mit } i, j \in \mathbb{Z}, b \in \widehat{K}.$$

Als nächstes besteht die Möglichkeit, ein Vielfaches des ersten Basisvektors vom zweiten abzuziehen, wobei der Skalierungsfaktor aus  $\mathcal{O}$  ist. Damit können wir erreichen, dass  $b$  die Form  $\sum_{e=i+1}^N b_e t^e$  hat, also nur Monome mit  $t$ -Grad größer als  $i$  auftreten.

Die Eindeutigkeit von  $i$  erhalten wir, indem wir den Durchschnitt von  $\Gamma$  und dem vom ersten Basisvektor erzeugten Unterraum betrachten. Die Eindeutigkeit von  $j$  erhalten wir, indem wir Diskriminanten vergleichen. Dann ist  $b$  zunächst bis auf ein Element aus  $t^i \mathcal{O}$  eindeutig. Die obige Bedingung wählt jedoch einen eindeutigen Repräsentanten der Nebenklasse  $b + t^i \mathcal{O}$ .  $\square$

Um nun zu Gitterklassen zu kommen, können wir das Gitter noch beliebig skalieren. Im Hinblick auf das spätere Ziel ist die Normierung  $j = 0$  sinnvoll.

Dieses ist eine Normalform für die Ecken von  $\mathbb{T}_q$ . An dieser Normalform können wir auch leicht ablesen, ob zwei Gitterklassen den Abstand 1 haben. Seien hierzu

$$\begin{bmatrix} t^i & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} t^j & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zwei normierte Basen normierter Repräsentanten  $\Gamma_1, \Gamma_2$  zweier Gitterklassen. Es gelte  $i \leq j$ . Dann gilt  $d(\Gamma_1, \Gamma_2) = 1$  genau dann, wenn  $i = j - 1$  und  $b - a \in t^j \mathcal{O}$  erfüllt sind. Nun können wir einen Ausschnitt des Serreschen Baums im Fall  $k = \mathbb{F}_2$  leicht zeichnen (siehe Abbildung 2.2).

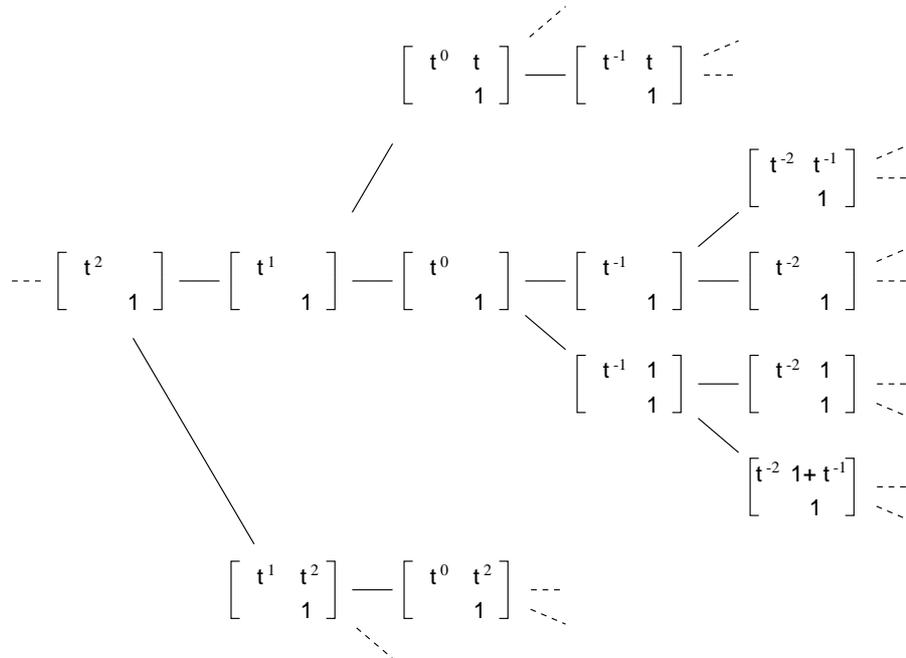


Abbildung 2.2: Ein Ausschnitt des Serreschen Baums im Fall  $A = \mathbb{F}_2[t]$

Zeichnen wir die Ecken nur als Punkte, so wird das Bild wesentlich übersichtlicher (siehe Abbildung 2.3).

### 2.3.3 Der Rand des Serreschen Baums

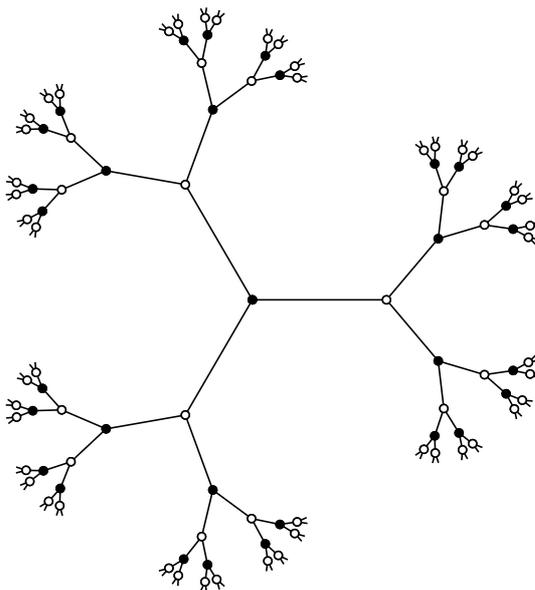
Mit den obigen Repräsentanten ist die folgende Abbildung naheliegend:

$$x \mapsto \left( \begin{bmatrix} t^{-j} & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)_{j=1, 2, \dots}$$

Sie ordnet jedem Element  $x \in \widehat{K}$  eine Folge von Gitterklassen zu. Dabei haben aufeinander folgende Gitterklassen Abstand 1, und es ergibt sich ein Strahl im Serreschen Baum. Aus diesem Strahl können wir das Element  $x$  auch wieder rekonstruieren. Bilden wir den Durchschnitt über alle obigen Repräsentanten, so erhalten wir den von

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten freien  $\mathcal{O}$ -Modul vom Rang 1. Der hiervon erzeugte Unterraum ist der Punkt  $[x : 1]$  in  $\mathbb{P}^1(\widehat{K})$ .

Abbildung 2.3: Der Serresche Baum im Fall des Restklassenkörpers  $\mathbb{F}_2$ 

Diesen Strahlen können wir einen weiteren hinzufügen:

$$\left( \begin{bmatrix} t^j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)_{j=1,2,\dots} \sim \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-j} \end{bmatrix} \right)_{j=1,2,\dots}$$

Bilden wir hier den Durchschnitt über alle Gitter, so erhalten wir den Untermodul

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieser entspricht dem unendlich fernen Punkt in  $\mathbb{P}^1(\widehat{K}) = \widehat{K} \cup \{\infty\}$ . Diese Konstruktion führt zu einem kompakten Raum  $\mathbb{T}_q \cup \mathbb{P}^1(\widehat{K})$ , der den Serreschen Baum als offenen und dichten Teil enthält.

Wir werden später ausführlicher auf diese Konstruktion eingehen und die hier angedeuteten Eigenschaften genauer formulieren.

Nun können wir eine erste symbolische Kodierung für die Elemente von  $\mathbb{P}^1(\widehat{K})$  angeben, bzw. für die Randpunkte von  $\mathbb{T}_q$ . Hierzu betrachten wir den Strahl, der ausgehend vom Standardgitter in einen gegebenen Randpunkt läuft. Im Standardgitter haben wir  $q + 1$  verschiedene Richtungen, in die der Strahl laufen kann. In jeder weiteren Ecke hat der Strahl nur noch  $q$  Wahlmöglichkeiten. Notieren wir dieses durch ein unendliches Wort über einem Alphabet mit  $q + 1$  Zeichen, so erhalten wir eine symbolische Kodierung für den Randpunkt. Diese Kodierung stimmt im Wesentlichen mit der Laurentreihenentwicklung in  $\widehat{K}$  überein.

**Bemerkung.**

Die obige Codierung erscheint zunächst völlig willkürlich, da in jeder Ecke des Baums wieder  $q$  Symbole auf  $q$  Kanten verteilt werden müssen. Es erscheint daher sinnvoll, dieses Codierung so einzurichten, dass sie mit der Operation einer Gruppe auf dem Serreschen Baum verträglich ist. Jedoch muss diese Gruppe so klein gewählt werden, dass sie zwei Kanten mit einer gemeinsamen Ecke und gleichem Abstand zum Standardgitter nicht vertauscht.

### 2.3.4 Die Operation von $GL(2, \widehat{K})$ auf dem Serreschen Baum

Die natürliche Operation von  $GL(2, \widehat{K})$  auf  $\widehat{K}^2$  bildet Gitter auf Gitter ab, so dass eine Operation auf der Menge aller Gitter in  $\widehat{K}^2$  entsteht. Diese liefert eine Operation von  $PGL(2, \widehat{K})$  auf Gitterklassen, die sich zu einer Operation auf  $\mathbb{T}_q$  fortsetzt, da der Abstand zweier Gitter unter der Operation von  $GL(2, \widehat{K})$  invariant ist.

Hier sind zunächst die Fundamentalbereiche einiger Untergruppen interessant. Da  $PGL(2, \widehat{K})$  auf den Gitterklassen transitiv operiert, ist der Fundamentalbereich für die Operation auf den Ecken des Baums nur ein Punkt.

Für die Operation auf den Kanten gibt es keinen eleganten Fundamentalbereich. Da es in  $PGL(2, \widehat{K})$  Elemente gibt, die eine gegebene Kante umdrehen können, ist der Fundamentalbereich eine halbe Kante.

Betrachten wir die Untergruppe  $PSL(2, \widehat{K})$ , so erhalten wir die folgenden Fundamentalbereiche: Für die Operation auf den Ecken besteht der Fundamentalbereich aus 2 Gitterklassen  $[L_0]$  und  $[L_1]$ , wobei  $v_\infty(\det(L_i)) \equiv i \pmod{2}$  gilt. Sind  $L_0$  und  $L_1$  zwei benachbarte Gitter, so bilden beide zusammen mit ihrer Verbindungskante einen exakten Fundamentalbereich für die Operation von  $PSL(2, \widehat{K})$  auf  $\mathbb{T}_q$ .

Wesentlich interessanter ist der Fundamentalbereich bezüglich  $SL(2, A)$ , der im nächsten Abschnitt konstruiert wird.

### 2.3.5 Der Fundamentalbereich von $SL(2, A)$

**Satz.**

*Es ist*

$$S := \left\{ \left[ \begin{array}{cc} t^i & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \mid i \geq 0 \right\}$$

*ein exakter Fundamentalbereich für die Operation von  $SL(2, A)$  auf den Ecken des Serreschen Baums.*

**Beweis.**

In  $SL(2, A)$  gibt es die Matrizen

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & u \\ 0 & 1 \end{array} \right] \text{ mit } u \in A, \left[ \begin{array}{cc} 0 & v \\ -v^{-1} & 0 \end{array} \right] \text{ mit } v \in k^*,$$

welche zusammen  $SL(2, A)$  erzeugen.

Die Konstruktion eines Fundamentalbereichs für  $SL(2, A)$  ist gleichbedeutend mit der Konstruktion eines Repräsentanten für die Bahn eines beliebigen Gitters  $\Gamma$  unter der Aktion von  $SL(2, A)$ . Dies geht wie folgt:

Sei zunächst

$$\left[ \begin{array}{cc} t^i & \xi_0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

die Hermite-Normalform einer beliebigen Gitterklasse  $[\Gamma]$ . Dabei ist  $\xi_0$  ein Element aus  $K$ , welches nur Monome vom  $t$ -Grad größer als  $i$  hat, d. h.  $\xi_0 \in t^{i+1}A$ . Betrachten wir zunächst Matrizen der Form  $\left[ \begin{array}{cc} 1 & -b_0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$ , so erhalten wir einen Ausschnitt aus der Bahn:

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & -b_0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} t^i & \xi_0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} t^i & \xi_0 - b_0 \\ 0 & 1 \end{array} \right].$$

Um  $|\xi_0 - b_0|_\infty$  zu minimieren, muss  $b_0$  als der polynomiale Anteil von  $\xi_0$  gewählt werden. Falls  $\xi_0$  selbst noch kein Polynom ist (hier ist  $i < 0$ ), so besteht die Möglichkeit,

danach mit  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  zu multiplizieren. Wir erhalten die Gitterklasse

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ t^i & \xi_0 - b_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\xi_0 - b_0} \\ \frac{t^i}{\xi_0 - b_0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Nun setzen wir wieder  $\xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - b_0}$ . Es gilt  $\frac{t^i}{\xi_0 - b_0} \in t^{-1}\mathcal{O}$ , weil  $\xi_0$  nur Monome vom  $t$ -Grad größer als  $i$  hat. Damit können wir weiter normieren:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\xi_0 - b_0} \\ \frac{t^i}{\xi_0 - b_0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_1 \\ t^i \xi_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^i \xi_1^2 & -\xi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{i-2v_\infty(\xi_1)} & -\xi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Hermite-Normalform erhalten wir, indem wir von  $\xi_1$  noch alle Monome vom  $t$ -Grad kleiner oder gleich  $i - 2v_\infty(\xi_1)$  streichen. Der obige Konstruktionsprozess entspricht einem Schritt in der Kettenbruchentwicklung von  $\xi_0$ , jedoch endet er nicht mit  $\xi_1$  sondern mit  $-\xi_1$ . Wiederholen wir Obiges, so erhalten wir die Äquivalenz zu den Gittern

$$\begin{bmatrix} t^{i-2v_\infty(\xi_1)-2v_\infty(\xi_2)} & \xi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^{i-2v_\infty(\xi_1)-2v_\infty(\xi_2)-2v_\infty(\xi_3)} & -\xi_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Der obige Prozess ist endlich, denn es gilt  $v_\infty(\xi_j) < 0$ . Daher ist  $i - 2v_\infty(\xi_1) - 2v_\infty(\xi_2) - 2v_\infty(\xi_3) - \dots$  nach endlich vielen Schritten positiv und der Prozess bricht im nächsten Schritt ab.

Damit liegt auf jeder  $\mathrm{SL}(2, A)$ -Bahn eine Gitterklasse der Form

$$\begin{bmatrix} t^i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-i} \end{bmatrix} \text{ mit } i \geq 0.$$

Nun ist noch zu zeigen, dass diese Gitterklassen auf verschiedenen Bahnen liegen. Hierzu betrachten wir die Stabilisatoren. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab} \begin{bmatrix} t^i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \left\{ (a_{i,j}) \in \mathrm{SL}(2, A) \mid \begin{array}{l} a_{1,1}t^i \in t^i\mathcal{O}, \ a_{1,2}t^i \in \mathcal{O}, \\ a_{2,1} \in t^i\mathcal{O}, \ a_{2,2} \in \mathcal{O} \end{array} \right\} \\ &= \begin{cases} \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q) & \text{für } i = 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a, c \in \mathbb{F}_q^* \\ b \in A, \ \mathrm{deg}(b) \leq i \end{array} \right\} & \text{für } i > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus der Gruppentheorie ist bekannt, dass die Stabilisatoren der Elemente einer Bahn zueinander konjugierte Untergruppen sind. Da die Stabilisatoren aber für jedes  $i$  eine andere Ordnung haben, sind sie nicht zueinander konjugiert.  $\square$

**Bemerkung.**

Der obige Beweis zeigt, dass der Anfang der Kettenbruchentwicklung von  $\xi_0 \in \widehat{K}$  den Transformationen entspricht, die das Gitter  $\begin{bmatrix} t^i & \xi_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  in den Fundamentalbereich transportieren. Dieser Transport wird aber von dem Produkt aller Transformationsmatrizen realisiert. In dieser Form ist die gewählte Zerlegung in elementare Transformationen nicht mehr zu sehen.

Um diese Faktoren wieder sichtbar zu machen, und um auch unendliche Kettenbrüche behandeln zu können, betrachten wir die Menge aller Gitter, die wir erhalten, wenn  $i$  alle ganzen Zahlen durchläuft. Dies liefert eine Gerade im Baum.

# Kapitel 3

## Gebäude

### 3.1 Das sphärische Gebäude $A_n$

Ziel dieses Abschnitts ist es, einige Begriffe und Resultate aus der Theorie der sphärischen Gebäude zusammenzutragen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigt werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Gebäuden vom Typ  $A_n$ .

Auf Beweise für die meisten Aussagen wird dabei verzichtet. Sie sind z. B. in [Bo], [Bro] oder [Ga] zu finden.

#### 3.1.1 Grundlegende Definitionen

**Definition.**

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper  $k$ . Die Unterräume  $U_1, \dots, U_l$  bilden eine *Flagge* von  $V$ , falls

$$U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_l$$

gilt. Die Flagge heißt *echt*, wenn sie weder den Nullraum noch den ganzen Raum enthält und  $l \geq 1$  ist. Das Tupel  $(\dim(U_1), \dots, \dim(U_l))$  ist der *Typ* der Flagge  $U_1, \dots, U_l$ .

Eine Flagge lässt sich als ein geordneter Simplex auffassen, dessen Ecken die Unterräume der Flagge sind. Die Menge

$$\mathcal{X}(V) := \{\Sigma = (U_1, \dots, U_l) \mid \Sigma \text{ ist echte Flagge in } V\}$$

ist das *sphärische Gebäude* zu  $V$ . Da Teile von Flaggen wieder Flaggen sind, ist  $\mathcal{X}(V)$  ein geordneter simplizialer Komplex.

**Definition.**

Die *Indikatorfunktion*  $1_U : V \rightarrow \mathbb{R}$  einer Teilmenge  $U$  von  $V$  ist als

$$1_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin U \\ 1 & \text{für } x \in U \end{cases}$$

definiert.

**Bemerkung.**

Nach Definition sind die 0-Simplizes eines sphärischen Gebäudes die Unterräume eines Vektorraums  $V$ . Wenn diese Unterräume durch ihre Indikatorfunktionen ersetzt werden, so erhalten wir in naheliegender Weise auch eine Beschreibung der inneren Punkte der Simplizes.

Sei hierzu  $\Sigma = (U_1, \dots, U_l)$  ein Simplex und  $x = (x_1, \dots, x_l)$  ein Punkt von  $\Sigma$  in baryzentrischer Koordinatendarstellung. Dann wird  $x$  die Funktion

$$x_1 1_{U_1} + \dots + x_l 1_{U_l}$$

zuordnet. Eine Funktion dieser Art wird auch als *Flaggenfunktion* bezeichnet.

**Bemerkung.**

Falls  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$  ist, so können wir die Anzahl der 0-Simplizes in  $\mathcal{X}(V)$  zählen. Sie stimmt mit der Anzahl der echten Untervektorräume im  $\mathbb{F}_q^n$  überein. Da es

$$u_l := \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{l-1})}{(q^l - 1)(q^l - q) \cdots (q^l - q^{l-1})}$$

$l$ -dimensionale Unterräume in  $\mathbb{F}_q^n$  gibt, gibt es genau  $\sum_{i=1}^{n-1} u_i$  Ecken im sphärischen Gebäude  $\mathcal{X}(V)$ .

Falls der Grundkörper nicht endlich ist, so ist der Komplex sogar lokal unendlich.

**Bemerkung.**

Auf  $V$  operiert die Gruppe  $\mathrm{GL}(V)$ . Sie bildet Unterräume auf Unterräume ab und erhält alle Inklusionsbeziehungen. Daher operiert sie auch auf  $\mathcal{X}(V)$ .

Betrachten wir nur die maximalen Simplizes in  $\mathcal{X}$ , so operiert  $\mathrm{GL}(V)$  transitiv auf ihnen. Allgemeiner operiert  $\mathrm{GL}(V)$  auf allen Flaggen gleichen Typs transitiv.

**Definition.**

Sei  $V = \bigoplus V_i$  eine Zerlegung von  $V$  in eine direkte Summe eindimensionaler Unterräume. Ein Unterraum  $U$  heißt *kanonisch bezüglich*  $\{V_i\}$ , wenn es Indizes  $i_1, \dots, i_d$  so gibt, dass  $U = V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_d}$  gilt. Weiterhin heißt eine Unterräumenflagge *kanonisch bezüglich*  $\{V_i\}$ , wenn alle Elemente dieser Flagge kanonische Unterräume bezüglich  $\{V_i\}$  sind. Der Unterkomplex in  $\mathcal{X}(V)$  aller bezüglich  $\{V_i\}$  kanonischen Flaggen wird als das *Apartment* zu  $\{V_i\}$  bezeichnet.

**Bemerkung.**

Die Unterräume eines Apartments können auch anders beschrieben werden. Es sind äquivalent:

1.  $U$  ist ein bezüglich  $\{V_i\}$  kanonischer Unterraum.
2. Es gilt  $U = \bigoplus_i (U \cap V_i)$ .
3. Ist  $B = \{b_i\}$  eine Basis von  $V$  mit  $b_i \in V_i$ , dann ist eine Teilmenge von  $B$  eine Basis von  $U$ .

Im letzten Fall wird  $U$  auch als ein *bezüglich der Basis  $B$  kanonischer* Unterraum bezeichnet. Dieses führt auf eine einfache Charakterisierung von Apartments als Systeme aller Unterräume, die bezüglich einer gemeinsamen Basis kanonisch sind.

**Bemerkung.**

Die Operation von  $\mathrm{GL}(V)$  auf  $V$  setzt sich zu einer transitiven Operation auf der Menge aller Basen fort. Daher operiert  $\mathrm{GL}(V)$  auch transitiv auf den Apartments. Folglich sind alle Apartments von  $\mathcal{X}$  isomorph.

Die kombinatorische Struktur eines Apartments ist die kombinatorische Struktur aller echten Teilmengen eines Unterräumensystems  $\{V_i\}$ . Hat  $V$  die Dimension  $n$ , so operiert die symmetrische Gruppe  $S_n$  auf  $\{V_i\}$  und daher auch auf dem Apartment. Diese Operation ist jedoch bereits in der Operation von  $\mathrm{GL}(V)$  enthalten, wie wir gleich sehen werden.

### 3.1.2 Untergruppen von $GL(V)$

**Definition.**

Sei  $A$  ein Apartment von  $\mathcal{X}(V)$  und  $\Sigma$  ein Simplex maximaler Dimension in  $A$ . Die Untergruppen  $B, N, T \subset GL(V)$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} B &:= \{g \in GL(V) \mid g\Sigma = \Sigma\} \\ N &:= \{g \in GL(V) \mid gA = A\} \\ T &:= \{g \in GL(V) \mid g \text{ stabilisiert } A \text{ punktweise}\}. \end{aligned}$$

Nach Definition ist  $T$  der Kern der Operation von  $N$  auf  $A$ . Daher wird für die Operation auf  $A$  die Gruppe  $W := N/T$  betrachtet.

$B$  wird auch als *Borelgruppe*,  $T$  als *Torusgruppe* und  $W$  als *Weylgruppe* bezeichnet.

Die obigen Gruppen lassen sich durch Wahl der richtigen Basis leicht in  $GL_n(k)$  realisieren. Dazu wählen wir eine Basis  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  so, dass die Ecken von  $\Sigma$  die von  $e_1, e_2, \dots, e_i$  mit  $i = 1, \dots, n-1$  erzeugten Unterräume sind. Dann gilt der

**Satz.**

Werden  $GL(V)$  und  $GL_n(k)$  mit Hilfe der Basis  $E$  identifiziert, so gilt für die oben definierten Gruppen:

1.  $B$  ist die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen.
2.  $N$  ist die Gruppe aller Matrizen, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen von 0 verschiedenen Eintrag haben.
3.  $T$  ist die Gruppe der Diagonalmatrizen.
4.  $N$  ist das semidirekte Produkt der Gruppe der Permutationsmatrizen und der Gruppe  $T$ .
5.  $W$  kann mit der Gruppe der Permutationsmatrizen identifiziert werden. Folglich wird  $W$  von den Transpositionen erzeugt, geometrisch sind dies Spiegelungen in  $V$ .
6.  $W$  operiert transitiv auf den maximalen Simplizes des Apartments  $A$ .

**Satz.** (Bruhat-Zerlegung)

Es gilt:

1. Die Gruppe  $GL(V)$  hat eine disjunkte Zerlegung in Doppelklassen:

$$GL(V) = \coprod_{w \in W} BwB$$

Dabei bedeutet  $w \in W$ , dass  $w$  ein beliebiges Repräsentantensystem von  $W = N/T$  in  $GL(V)$  durchläuft. Die Doppelklasse  $BwB$  ist von der konkreten Wahl des Repräsentanten unabhängig.

2. Hiermit lässt sich zeigen: Zu je zwei Unterräumen gibt es eine Basis so, dass beide Unterräume kanonisch bezüglich dieser Basis sind.

Anders formuliert: Zu zwei beliebigen Simplizes gibt es stets ein Apartment, welches beide enthält.

**Bemerkung.**

1. Ein so beschriebenes Apartment ist ein *Coxeterkomplex*. Darunter wird ein simplizialer Komplex verstanden, dessen maximale Simplizes alle die gleiche Dimension haben. Weiterhin muss auf den maximalen Simplizes eine lokal endliche Spiegelungsgruppe (Coxetergruppe) transitiv auf eine festgelegte Weise operieren.
2. Allgemein ist ein Gebäude als ein simplizialer Komplex, mit einer Familie ausgezeichneter Unterkomplexe, den sogenannten Apartments, definiert. Sie müssen die Bruhat-Tits-Axiome erfüllen:
  - (a) Jedes Apartment ist ein Coxeterkomplex.
  - (b) Zu je zwei Simplizes gibt es ein Apartment, welches beide enthält.
  - (c) Zu zwei Apartments mit nicht leerem Schnitt gibt es einen Isomorphismus zwischen diesen Apartments, der auf dem Durchschnitt die Identität ist.
3. Das oben aus Unterräumen eines Vektorraums konstruierte Gebäude wird auch als sphärisches Gebäude vom Typ  $A_{n-1}$  bezeichnet. Die Bezeichnung ist von den Apartments abgeleitet: Jedes Apartment lässt sich geometrisch auf einer  $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre realisieren. Die auf einem Apartment operierende Weylgruppe ist die Permutationsgruppe  $S_n$ , die auch als Coxeter-Gruppe  $A_{n-1}$  bezeichnet wird.

**3.1.3 Stabilisatoren von Simplizes****Definition.**

Sei  $\Sigma = (U_1, \dots, U_l)$  ein Simplex. Dann ist

$$\text{Stab}(\Sigma) = \{g \in \text{GL}(V) \mid gU_i = U_i \text{ für } i = 1, \dots, l\}$$

die Stabilisatorgruppe von  $\Sigma$ . Solche Gruppen werden auch als *parabolische Untergruppen* bezeichnet, sie sind eine Verallgemeinerung der oben beschriebenen Borelgruppen.

**Bemerkung.**

Bei Wahl einer geeigneten Basis hat eine parabolische Gruppe eine genauso übersichtliche Matrixdarstellung wie eine Borelgruppe:

Zu einem Simplex  $\Sigma = (U_1, \dots, U_l)$  vom Typ  $(p_1, \dots, p_l)$  gibt es eine Basis  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  von  $V$  so, dass jedes  $U_i$  von  $e_1, e_2, \dots, e_{p_i}$  erzeugt wird. Bezüglich der Basis  $E$  hat die zu  $\Sigma$  gehörige parabolische Untergruppe die folgende Gestalt:

$$\text{Stab}(\Sigma) = \{(m_{i,j}) \in \text{GL}_n(k) \mid m_{i,j} = 0 \text{ falls } j \leq p < i \text{ für ein } p \in \{p_1, \dots, p_l\}\} .$$

Anschaulich gesprochen besteht eine parabolische Gruppe aus Blockdreiecksmatrizen oder Stufenmatrizen, wobei die Stufen durch die Dimensionen  $p_i$  der  $U_i$  gegeben sind.

**Bemerkung.**

Sei  $\Sigma = (U_1, \dots, U_l)$  ein Simplex von  $\mathcal{X}(V)$ . Dann kann die Operation der parabolischen Gruppe  $\text{Stab}(\Sigma)$  auf  $V$  zu einer auf  $U_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) eingeschränkt werden. Die Operation auf  $U_i$  induziert weiterhin eine Operation auf dem Quotientenraum  $U_i/U_{i-1}$ . Es entsteht ein surjektiver Homomorphismus von  $\text{Stab}(\Sigma)$  auf

$$\text{GL}(U_1) \times \text{GL}(U_2/U_1) \times \dots \times \text{GL}(U_l/U_{l-1}) \times \text{GL}(V/U_l),$$

dieser kann auch als eine Projektion der Blockdreiecksmatrizen auf ihre Diagonalblöcke verstanden werden. Folglich ist eine parabolische Gruppe ein semidirektes Produkt der Untergruppe der Blockdiagonalmatrizen und des Kerns dieser Projektion. Der erste Faktor heißt auch *reduktiver Anteil* oder *Levi-Untergruppe*  $M$ , der zweite Faktor *unipotenten Radikal*  $R_u$ .

**Definition.**

Sei  $\Sigma$  ein nicht maximaler Simplex des Gebäudes  $\mathcal{X}(V)$ . Dann ist die Menge

$$\text{lk}(\Sigma) := \{\Sigma' \in \mathcal{X}(V) \mid \Sigma \cap \Sigma' = \emptyset \text{ und } \Sigma \cup \Sigma' \in \mathcal{X}(V)\}$$

der *Link* des Simplexes  $\Sigma$ .

**Bemerkung.**

Auf  $\text{lk}(\Sigma)$  operiert der Stabilisator von  $\Sigma$ . Da das unipotente Radikal des Stabilisators trivial auf  $\text{lk}(\Sigma)$  operiert, faktorisiert diese Operation über die Projektion in die Levi-Untergruppe.

## 3.2 Affine Gebäude

Der oben beschriebene Serresche Baum ist der einfachste Fall eines affinen Bruhat-Tits-Gebäudes. Ziel dieses Abschnitts ist es, alle wesentlichen Eigenschaften der affinen Gebäude zusammenzutragen, die bei späteren Konstruktionen benutzt werden.

Wir beginnen wieder mit einem endlichen Körper  $k = \mathbb{F}_q$  sowie dem Funktionenkörper  $K = k(t)$  und seiner Vervollständigung  $\widehat{K} = k(\left(\frac{1}{t}\right))$  sowie dem diskreten Bewertungsring  $\mathcal{o} = k\left[\left[\frac{1}{t}\right]\right]$ .

### 3.2.1 Gitter, Gitterklassen und die kombinatorische Metrik

Ein Gitter  $\Gamma$  im Vektorraum  $V = \widehat{K}^n$  ist ein projektiver  $\mathcal{o}$ -Modul in  $V$ . Da  $\mathcal{o}$  ein Hauptidealring ist, sind alle projektiven  $\mathcal{o}$ -Moduln frei. Eine Gitterbasis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von  $\Gamma$ . Da dieses automatisch  $\widehat{K}$ -linear unabhängig ist, hat jedes Gitter in  $V$  einen endlichen Rang kleiner oder gleich  $n$ . Falls das Gitter den maximalen Rang  $n$  hat, so heißt es vollständig.

Die Gitterklasse  $[\Gamma]$  des Gitters  $\Gamma$  ist die Menge aller skalaren Vielfachen von  $\Gamma$ , also  $\{c\Gamma \mid c \in \widehat{K}^*\}$ .

Auf den Klassen der vollständigen Gitter ist die folgende kombinatorische Metrik erklärt: Sind  $L_1$  und  $L_2$  zwei Gitterklassen, so gibt es Repräsentanten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  von  $L_1$  und  $L_2$ , die  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  und  $\Gamma_1 \not\subset \frac{1}{t}\Gamma_2$  erfüllen. Dann ist

$$d(L_1, L_2) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{1}{t}\right)^n \Gamma_2 \subset \Gamma_1\}$$

der kombinatorische Abstand von  $L_1$  und  $L_2$ . Da jedes Gitter eine eindeutige Gitterklasse definiert, wird auch gelegentlich vom kombinatorischen Abstand von Gittern gesprochen, damit ist dann der kombinatorische Abstand ihrer Klassen gemeint.

Um zu zählen, wie viele Gitter zu einem gegebenen Gitter  $\Gamma$  den Abstand 1 haben, ist zu bestimmen, wie viele Gitter  $\Delta$  es mit  $\Gamma \supsetneq \Delta \supsetneq \frac{1}{t}\Gamma$  gibt. Hier bietet sich eine Betrachtung modulo  $\frac{1}{t}\Gamma$  an. Es entsteht eine Bijektion zwischen den möglichen Untergittern  $\Delta$  und den echten Untermoduln von  $\Gamma/\frac{1}{t}\Gamma \cong \mathbb{F}_q^n$ . D. h. es tritt lokal die Struktur eines sphärischen Gebäudes auf, und die obige Anzahl ist die Eckenzahl des sphärischen Gebäudes zum Vektorraum  $\mathbb{F}_q^n$ . Insbesondere ist diese Anzahl endlich und für jedes Gitter  $\Gamma$  gleich.

### 3.2.2 Ein simplizialer Komplex aus Gitterklassen

Aus den Klassen der vollständigen Gitter konstruieren wir nun einen simplizialen Komplex.

**Definition.**

Seien  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  beliebige, paarweise verschiedene Gitter. Falls  $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_l \supset \frac{1}{t}\Gamma_1$  gilt, so bilden die Klassen von  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  die Ecken eines  $(l-1)$ -dimensionalen Simplexes  $([\Gamma_1], \dots, [\Gamma_l])$ .

Da jede Teilmenge der Eckenmenge eines Simplizes wieder einen Simplex definiert, bildet die Menge aller oben konstruierten Simplizes einen simplizialen Komplex. Dieser Komplex ist das affine Bruhat-Tits-Gebäude  $\tilde{A}_n$  zum Vektorraum  $\hat{K}^n$ .

**Bemerkung.**

Die Inklusionskette  $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_l \supset \frac{1}{t}\Gamma_1$  lässt leicht den Eindruck entstehen, als würde es eine Reihenfolge unter den Ecken eines Simplex geben. Dieses ist jedoch nicht der Fall, denn die obige Kette ist zu  $\Gamma_2 \supset \Gamma_3 \supset \dots \supset \Gamma_l \supset \frac{1}{t}\Gamma_1 \supset \frac{1}{t}\Gamma_2$  äquivalent, und  $\Gamma_1$  und  $\frac{1}{t}\Gamma_1$  definieren die gleichen Gitterklassen. Andere Umordnungen sind bei einer solchen Inklusionskette jedoch nicht möglich.

Die Simplizes im Bruhat-Tits-Gebäude können auch auf andere Weise beschrieben werden. Dieses leistet der folgende

**Satz.**

Seien  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  verschiedene Gitter. Dann gilt:

1. Die obige Inklusionsbeziehung  $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_l \supset \frac{1}{t}\Gamma_1$  ist äquivalent zur Existenz einer Basis  $b_1, \dots, b_n$  des  $\hat{K}^n$  und natürlicher Zahlen  $n = s_1 > s_2 > \dots > s_l$ , für die

$$\Gamma_i = \mathcal{O}b_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}b_{s_i} \oplus \frac{1}{t}\mathcal{O}b_{s_i+1} \oplus \dots \oplus \frac{1}{t}\mathcal{O}b_n$$

gilt.

2. Die Klassen von  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  bilden genau dann einen Simplex, wenn sie paarweise Abstand 1 haben.

**Beweis.**

Wir zeigen nur den nicht-trivialen Teil der Aussagen:

Sei also  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  eine Gitterkette mit den obigen Inklusionsbeziehungen. Dann betrachten wir ihr Bild im  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraum  $U := \Gamma_1 / \frac{1}{t}\Gamma_1$ . Wir erhalten eine Flagge von Untervektorräumen. Dann wählen wir  $b_1, \dots, b_n \in \Gamma_1$  so, dass ihre Bilder in  $U$  eine Basis bilden, die zur Unterraumflagge passt. Weiterhin wählen wir  $s_i$  als die Dimension des Bildes von  $\Gamma_i$  in  $U$ . Da  $\mathcal{O}$  ein lokaler Ring ist, bilden die  $b_i$  eine Gitterbasis von  $\Gamma_1$ , die zur Untergitterflagge passt.

Bei der zweiten Aussage zeigen wir auch nur den nicht-trivialen Teil. Seien also  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$  Gitter, deren Klassen paarweise Abstand 1 haben. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $\Gamma_1 \supset \Gamma_i \supset \frac{1}{t}\Gamma_1$  für jedes  $i$  gilt.

Aus dieser Skalierungsaussage folgt sofort

$$t\Gamma_i \supset \Gamma_j \supset \frac{1}{t}\Gamma_i.$$

In diese Inklusionskette lässt sich  $\Gamma_i$  einschieben, da sonst  $\Gamma_i$  und  $\Gamma_j$  einen kombinatorischen Abstand größer als 1 hätten. Es gilt also für jedes Paar  $i \neq j$  entweder  $\Gamma_i \subset \Gamma_j$  oder  $\Gamma_i \supset \Gamma_j$ .

Damit sind die Gitter paarweise ineinander enthalten. Sortieren wir sie nach ihrer Größe, so erhalten wir einen Simplex.  $\square$

### 3.2.3 Die lokale Struktur der affinen Gebäude

Die lokale Struktur des Gebäudes  $\mathcal{X}$  wird durch alle Simplizes beschrieben, die eine vorgegebene Ecke  $[\Gamma]$  oder eine vorgegebene Seite  $\Sigma$  gemeinsam haben. Dies führt wieder auf den Link

$$\text{lk}(\Sigma) = \{\Sigma' \in \mathcal{X} \mid \Sigma \cap \Sigma' = \emptyset \text{ und } \Sigma \cup \Sigma' \in \mathcal{X}\}.$$

**Bemerkung.**

Der einfachste Spezialfall dieser Konstruktion ist der Fall, dass  $\Sigma$  nur aus einer Ecke  $\Gamma$  besteht. Dann erhalten wir den Link von  $\Sigma$ , indem wir alle Gitter  $\Delta$  betrachten, die  $\Gamma \supseteq \Delta \supseteq \frac{1}{t}\Gamma$  erfüllen. Da die Projektion auf  $\Gamma/\frac{1}{t}\Gamma$  eine Bijektion solcher Gitter mit Unterräumen eines  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraums liefert, und die Projektion alle Inklusionsbeziehungen respektiert, hat der Link einer Ecke die Struktur eines sphärischen Gebäudes.

Diese Überlegung zeigt, dass das affine Bruhat-Tits-Gebäude ein lokal endlicher simplizialer Komplex ist, weil der Grundkörper  $k = \mathbb{F}_q$  endlich ist. Damit ist das Gebäude als topologischer Raum auch lokalkompakt.

**Bemerkung.**

Der Link  $\text{lk}(\Sigma)$  eines größeren Simplizes  $\Sigma$  ist eine Teilmenge von  $\text{lk}(\Gamma)$ , wobei  $\Gamma$  eine beliebige Ecke von  $\Sigma$  ist.  $\text{lk}(\Sigma)$  kann mit der Gleichung

$$\text{lk}(\Sigma) = \text{lk}(\pi_{\text{lk}(\Gamma)}(\Sigma))$$

auch als Link des Simplexes  $\Sigma \setminus \{\Gamma\}$  im sphärischen Gebäude  $\text{lk}(\Gamma)$  beschrieben werden.

**Bemerkung.**

Ganz allgemein kann gezeigt werden, dass der Link eines Simplizes in einem beliebigen (nicht notwendig affinen) Gebäude wieder ein Gebäude ist.

### 3.2.4 Apartments

Im affinen Bruhat-Tits-Gebäude gibt es ausgezeichnete Unterkomplexe. Sei hierzu  $b_1, \dots, b_n \in \widehat{K}^n$  eine Basis, so können wir alle Gitter betrachten, die zu dieser Basis gehören. D. h. wir betrachten alle Gitter der Form

$$t^{e_1} \circ b_1 \oplus \dots \oplus t^{e_n} \circ b_n \text{ mit } e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}.$$

Um an dieser Stelle nur Gitterklassen zu untersuchen, können wir beispielsweise  $e_1 = 0$  setzen. Dann erhalten wir von jeder Gitterklasse genau einen Repräsentanten. Alle Simplizes, deren Ecken die obige Form haben, bilden einen Unterkomplex. Dieser wird wieder als ein Apartment des Gebäudes bezeichnet.

**Bemerkung.**

Die Apartments des affinen Gebäudes lassen sich auch ohne Basen charakterisieren: Ist  $V = \bigoplus V_i$  eine Zerlegung von  $V$  in eine direkte Summe eindimensionaler Unterräume und  $B = \{b_i\}$  mit  $b_i \in V_i$  eine Basis von  $V$ , dann sind äquivalent:

1. Das Gitter  $\Gamma$  gehört im obigen Sinn zu Basis  $B$ .
2. Es gilt  $\Gamma = \bigoplus_i (V_i \cap \Gamma)$ .
3. Es gibt eine Gitterbasis  $\{g_i\}$  von  $\Gamma$  mit  $g_i \in V_i$ .

Genau wie im sphärischen Fall gilt hier ebenfalls der

**Satz.**

*Zu zwei beliebigen Simplizes  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  des affinen Gebäudes gibt es stets ein Apartment, welches beide Simplizes enthält.*

**Beweis.**

Seien  $a_1, \dots, a_n$  und  $b_1, \dots, b_n$  zwei verschiedene Basen, die im obigen Sinn zu den Simplizes passen. D. h. die Gitter von  $\Sigma$  haben die Form

$$\mathcal{O}a_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}a_i \oplus \frac{1}{t}\mathcal{O}a_{i+1} \oplus \dots \oplus \frac{1}{t}\mathcal{O}a_n.$$

Für die Gitter von  $\Sigma'$  gilt das Gleiche bezüglich der Basis  $b_1, \dots, b_n$ . Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir mit  $A$  und  $B$  die von den Basisvektoren spaltenweise gebildeten Matrizen. Wir erhalten eine andere Basis, die genauso gut wie  $\{a_i\}$  zum Simplex  $\Sigma$  passt, indem wir die Matrix  $A$  von rechts mit einer Matrix aus der Iwahori-Gruppe multiplizieren. Dabei besteht die Iwahori-Gruppe aus allen Elementen von  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ , die modulo  $\frac{1}{t}$  eine obere Dreiecksmatrix sind.

Damit haben wir die Behauptung darauf reduziert, die Gleichung

$$AM_1 = BM_2N$$

zu lösen, wobei  $M_1, M_2$  aus der Iwahori-Gruppe zu wählen sind und  $N$  eine Matrix ist, die in jeder Zeile und jeder Spalte nur einen Eintrag der Form  $t^i$  hat, also das Produkt einer Permutationsmatrix und einer Diagonalmatrix mit Monom-Einträgen ist.

Dies bedeutet, dass wir jede Matrix aus  $\mathrm{GL}_n(\widehat{K})$  in ein Produkt der Form  $M_2NM_1^{-1}$  zerlegen können, die Iwahori-Zerlegung (siehe [Iw], S. 74).  $\square$

**Bemerkung.**

Der obige Satz kann ähnlich dem Elementarteilersatz als ein simultanes Diagonalisieren mehrerer Moduln verstanden werden. Wir werden weiter unten sehen, wie ein innerer Punkt eines Simplexes als Normenklasse interpretiert werden kann. Dann ist die obige Aussage zu einer simultanen Diagonalisierung zweier Normenklassen äquivalent. Diesen Satz werden wir im nächsten Abschnitt ausformulieren.

**Bemerkung.**

Die verschiedenen Apartmentbegriffe für sphärische und affine Gebäude passen zusammen. Hierfür müssen wir wieder den Begriff des Links verwenden, um beide zu verbinden. Genauer:

Sei  $\Gamma$  eine Ecke eines affinen Gebäudes. Dann ist  $\mathrm{lk}(\Gamma)$  ein sphärisches Gebäude. Ist  $A$  ein Apartment, welches  $\Gamma$  enthält, so ist  $A \cap \mathrm{lk}(\Gamma)$  ein Apartment von  $\mathrm{lk}(\Gamma)$ . Weiterhin kann jedes Apartment von  $\mathrm{lk}(\Gamma)$  auf diese Weise konstruiert werden.

### 3.2.5 Eine geometrische Realisierung der Apartments

In Analogie zum Serreschen Baum können wir auch versuchen, die höherdimensionalen Gebäude geometrisch zu realisieren. Dabei ist es sinnvoll, mit einem Apartment zu beginnen. Im Fall des Baumes ergibt sich ein Apartment als eine Gerade im Graphen, d. h. als eine in beide Richtungen unendliche kombinatorische Geodäte. Im höherdimensionalen Fall entsteht eine simpliziale Zerlegung des euklidischen Raums (siehe Abb. 3.1).

Bei einer solchen geometrischen Realisierung stellt sich die Frage nach einer Interpretation der Punkte der Ebene, die keine Ecken sind. Hierfür benötigen wir zunächst den Zusammenhang zwischen Gittern und Normen.

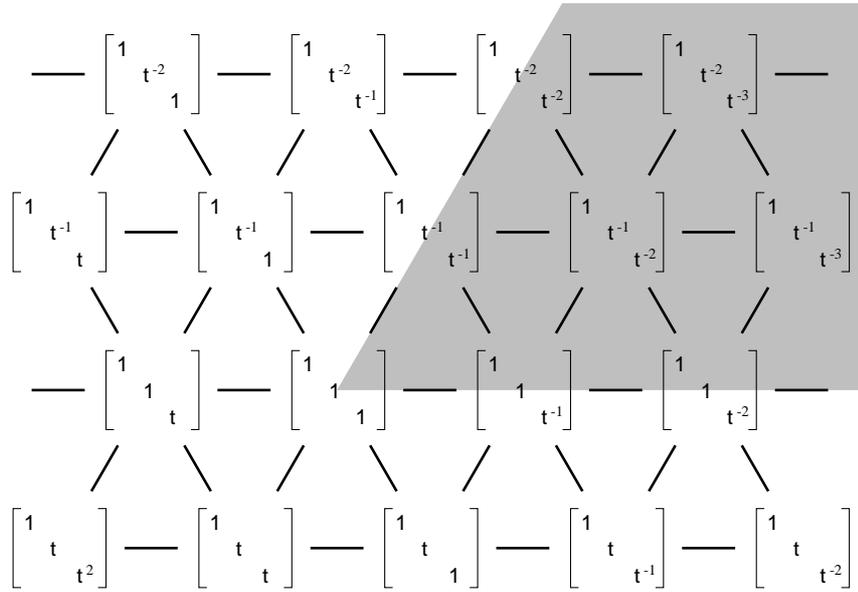


Abbildung 3.1: Apartment des Gebäudes  $\tilde{A}_3$ , Fundamentalbereich von  $GL_3(A)$

**Definition.**

Eine Norm  $\|\cdot\|$  ist eine Abbildung  $\widehat{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Eigenschaften

$$\|cx\| = |c|_\infty \|x\| \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

für beliebige  $x \in \widehat{K}^n$  und  $c \in \widehat{K}$  erfüllt.

Es gilt der folgende

**Satz.** (siehe [Go], Proposition 1.1)

Ist  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\widehat{K}^n$ , so gibt es eine Basis  $b_1, \dots, b_n \in \widehat{K}^n$ , für welche

$$\left\| \sum \alpha_i b_i \right\| = \max_i \{ |\alpha_i| \|b_i\| \}$$

*gilt. Hierzu sagt man auch: Die Basis  $b_1, \dots, b_n$  diagonalisiert die Norm.*

Umgekehrt erhalten wir mit der obigen Gleichung aus jeder Basis  $b_1, \dots, b_n$  eine Norm, indem wir  $\|b_i\| > 0$  vorgeben.

Interessant ist in diesem Zusammenhang der Spezialfall, bei dem alle  $b_i$  die Norm 1 haben. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel bezüglich dieser Norm das von  $b_1, \dots, b_n$  erzeugte Gitter.

Umgekehrt können wir aus jedem Gitter  $\Gamma$  eine Norm konstruieren, indem wir

$$\|x\| = \min\{|t^e| \mid t^{-e}x \in \Gamma\} \text{ für } x \neq 0$$

setzen. Jede Gitterbasis von  $\Gamma$  diagonalisiert dann diese Norm.

Um nun von Gitterklassen statt von Gittern zu reden, so müssen wir Gitter identifizieren, die sich nur um Skalierungsfaktoren unterscheiden. Dieses führt auf Äquivalenzklassen von Normen, dabei heißen zwei Normen äquivalent, wenn sie sich nur um einen Skalierungsfaktor unterscheiden. Diese Äquivalenzrelation ist schärfer als die topologische Äquivalenz, denn topologisch äquivalent sind alle diese Normen. Mit dieser Vorüberlegung können wir jede Ecke im Gebäude als eine Äquivalenzklasse von Normen verstehen, indem wir ein repräsentierendes Gitter nehmen und

die obige Konstruktion anwenden. Dabei liefern alle Gitter einer Gitterklasse zusammen nur Normen einer Normenklasse.

Nun können wir die inneren Punkte der Simplizes als Klassen interpolierter Normen beschreiben. So erhalten wir eine Bijektion zwischen den Äquivalenzklassen aller Normen und den Punkten im Gebäude.

**Bemerkung.**

Seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei beliebige Normen. Dann sind diese Punkte in zwei Simplizes  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ . Da es zu je zwei Simplizes ein Apartment gibt, welches beide enthält, folgt, dass es eine Basis gibt, welche beide Normen gleichzeitig diagonalisiert. Dieses kann auch direkt bewiesen werden (siehe [Go], Proposition 1.3).

### 3.2.6 Geodäten und die metrische Struktur affiner Gebäude

Die geometrische Realisierung des Apartments ermöglicht es, die euklidische Metrik als Metrik auf einem Apartment zu interpretieren. Da es zu je zwei Simplizes immer ein Apartment gibt, welches beide enthält, können wir zunächst formal eine Metrik auf dem gesamten Gebäude konstruieren, indem wir zu zwei Punkten ein Apartment wählen, welches beide Punkte enthält, und dann den Abstand in diesem Apartment bestimmen. Bei dieser Konstruktion ist einerseits zu zeigen, dass der so bestimmte Abstand von der konkreten Wahl des Apartments unabhängig ist. Weiterhin ist zu zeigen, dass es sich hierbei um eine Metrik auf dem Gebäude handelt. Bezüglich dieser Metrik ist das Gebäude ein vollständiger Raum. (Siehe [Bro], S. 152 oder [Ga], Abschnitt 14.2)

Die obige Konstruktion der Metrik ermöglicht auch die Konstruktion einer eindeutigen Geodäte zwischen zwei Punkten  $x$  und  $y$ , indem zunächst ein Apartment gewählt wird, welches  $x$  und  $y$  enthält. Dieses Apartment ist ein euklidischer Raum, in dem es eine eindeutige Verbindungsstrecke gibt. Genau wie oben kann auch in dieser Situation gezeigt werden, dass diese Verbindungsstrecke von der konkreten Wahl des Apartments unabhängig ist. Weiterhin ist die so konstruierte Strecke die eindeutig bestimmte Geodäte im Gebäude. (Siehe [Bro], S. 152 oder [Ga], S. 224)

Die Eigenschaft, Geodäte zu sein, ist in einem affinen Gebäude eine rein lokale Eigenschaft einer Kurve, denn es gilt das

**Lemma.**

Sei  $\mathcal{X}$  ein affines Gebäude und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$  eine Kurve im Gebäude. Dann sind äquivalent:

1.  $\gamma$  ist eine Geodäte.
2. Zu jedem Punkt  $\gamma(t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) gibt es eine Umgebung  $U \subset [0, 1]$  so, dass  $\gamma|_U$  eine Geodäte ist.

**Bemerkung.**

Das obige Lemma besagt, dass jede lokal geodätische Kurve eine Geodäte ist. Die Differentialgeometrie liefert hierfür Kriterien, aus denen dieses leicht folgt (siehe [Bri], S. 161). Wir geben hier einen direkten Beweis, der jedoch nur den Fall eines affinen Gebäudes abdeckt.

**Beweis.**

Es ist zu zeigen, wie aus „überall lokal geodätisch“ „global geodätisch“ folgt. Hierzu betrachten wir zunächst

$$L = \{l \in [0, 1] \mid \gamma|_{[0,l]} \text{ ist Geodäte in } \mathcal{X}\}.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist  $L$  eine abgeschlossene Menge. Wir bezeichnen mit  $l_0$  das Maximum von  $L$ . Zu  $l_0$  gibt es eine Umgebung  $U$  so, dass  $\gamma|_U$  eine Geodäte ist.

Damit ist  $\gamma|_U$  eine Kurve in einem Apartment, welches ein lokal endlicher simplizialer Komplex ist. Damit gibt es im Fall  $l_0 < 1$  ein  $\epsilon > 0$  so, dass  $\gamma([l_0, l_0 + \epsilon])$  im Abschluss eines einzigen Simplexes  $\Sigma$  liegt.

Sei nun  $A$  ein Apartment von  $\mathcal{X}$ , welches  $\Sigma$  und den Anfangspunkt  $\gamma(0)$  enthält. Nach Konstruktion enthält  $A$  die Punkte  $\gamma(0)$  und  $\gamma(l_0)$ . Nach den oben zitierten Eigenschaften enthält  $A$  dann auch die verbindende Geodäte  $\gamma([0, l_0])$ . Da  $A$  den Simplex  $\Sigma$  enthält, enthält es auch das Kurvenstück  $\gamma([l_0, l_0 + \epsilon])$ . Damit ist  $\gamma|_{[0, l_0 + \epsilon]}$  eine überall lokal geodätische Kurve im Apartment  $A$ . Da jedes Apartment ein affiner Raum ist, folgt, dass  $\gamma|_{[0, l_0 + \epsilon]}$  eine Geodäte im Apartment ist. Damit ist  $\gamma|_{[0, l_0 + \epsilon]}$  eine Geodäte im Gebäude. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $l_0 < 1$ . Damit ist  $l_0 = 1$  und  $L = [0, 1]$  und  $\gamma$  ist eine Geodäte im Gebäude.  $\square$

### 3.2.7 Der Projektionssatz für konvexe Mengen

Aus der Funktionalanalysis ist der folgende Satz bekannt: Sei  $H$  ein beliebiger Hilbertraum und  $M \subset H$  eine beliebige abgeschlossene und konvexe Menge in  $H$  sowie  $x \in H$  ein beliebiger Punkt. Dann existiert ein eindeutiger Punkt  $p \in M$ , für den  $\|x - p\| = \inf\{\|x - m\| \mid m \in M\}$  gilt.  $p$  wird als die Projektion von  $x$  auf  $M$  bezeichnet. Ziel dieses Abschnitts ist es, diese Aussage für affine Gebäude zu beweisen. Dabei heißt eine Menge konvex, wenn sie mit zwei Punkten auch die Verbindungsstrecke (genauer: die verbindende Geodäte) enthält.

#### Satz.

*Sei  $M$  eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge des affinen Gebäudes  $\mathcal{X}$  und  $x \in \mathcal{X}$  ein beliebiger Punkt. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt  $p \in M$ , der zu  $x$  den kleinsten möglichen Abstand hat.*

#### Beweis.

Wir bezeichnen die Metrik auf  $\mathcal{X}$  mit  $d$ . In  $M$  gibt eine Folge  $m_i$  mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x, m_i) = \inf\{d(x, m) \mid m \in M\}.$$

Es ist zu zeigen, dass die  $m_i$  eine Cauchy-Folge bilden.

Hierzu benötigen wir die negative Krümmung des Gebäudes. Es gilt (siehe [Ga], S. 226):

$$d(c, m)^2 \leq \frac{1}{2} (d(c, a)^2 + d(c, b)^2) - \frac{1}{4} d(a, b)^2,$$

wobei  $m$  der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zwischen  $a$  und  $b$  ist. Da  $M$  als konvexe Menge mit  $m_i$  und  $m_j$  auch immer den Mittelpunkt  $m_{i,j}$  enthält, folgt

$$\begin{aligned} d(m_i, m_j)^2 &\leq 2 d(s, m_i)^2 + 2 d(s, m_j)^2 - 4 d(s, m_{i,j})^2 \\ &\leq 2 d(s, m_i)^2 + 2 d(s, m_j)^2 - 4 d(s, M)^2. \end{aligned}$$

Damit bilden die  $m_i$  eine Cauchy-Folge. Diese konvergiert in  $M$ , weil  $M$  abgeschlossen ist und Gebäude vollständige metrische Räume sind.

Die Eindeutigkeit von  $p$  folgt aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Cauchy-Folge.  $\square$

## 3.3 Die Operation von $GL_n(k[t])$

Die Gruppe  $GL_n(\widehat{K})$  operiert auf der Menge der Gitter bzw. auf den Gitterklassen. Da diese Operation abstandstreu in Bezug auf die kombinatorische Metrik ist, setzt sich die Operation zu einer Operation auf dem gesamten Gebäude fort. Es ist leicht

zu sehen, dass  $\mathrm{GL}_n(\widehat{K})$  auf den Gittern transitiv operiert. Als Fundamentalbereich für die Operation auf den Gitterklassen ergibt sich daher nur ein Punkt. Um die Operation auf den Simplizes zu untersuchen, betrachten wir besser die Untergruppe aller Matrizen, deren Determinante den Betrag 1 hat, oder deren Determinante  $= 1$  ist, da sich sonst kein schöner Fundamentalbereich ergibt. Für beide Gruppen erhalten wir, dass der Fundamentalbereich für die Operation auf den Ecken die Eckenmenge eines maximalen Simplizes ist. Für die Operation auf den Simplizes ist ein maximaler Simplex ein exakter Fundamentalbereich.

Der Fundamentalbereich wird größer, wenn Untergruppen betrachtet werden. Genau wie beim Serreschen Baum ist hier die Gruppe  $\mathrm{GL}_n(A)$  mit  $A = k[t]$  von besonderem Interesse.

### 3.3.1 Bestimmung eines Fundamentalbereichs

#### Satz.

Sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\widehat{K}^n$ , so enthält die Menge aller Gitter der Form  $[e_1, t^{k_2}e_2, \dots, t^{k_n}e_n]$  mit  $0 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$  einen Fundamentalbereich für die Operation von  $\mathrm{GL}_n(A)$  auf den Gitterklassen.

Einen solchen Bereich bezeichnen wir auch als Sektor. (Siehe Abb. 3.1)

#### Beweis.

Sei zunächst  $\Gamma$  ein Gitter des Standardapartments, also  $\Gamma = [t^{f_1}e_1, \dots, t^{f_n}e_n]$ . Wir bezeichnen mit  $M$  die von dieser Gitterbasis erzeugte Matrix. Es ist zu zeigen, dass es in  $\mathrm{GL}_n(A)$  und in  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$  zwei Matrizen gibt, die von links und von rechts auf  $M$  angewendet die Diagonalelemente beliebig permutieren. Da  $M$  eine Diagonalmatrix ist, ist dies zur Permutation von Zeilen und Spalten äquivalent. Es sind also aus  $\mathrm{GL}_n(A)$  und  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$  nur geeignete Permutationsmatrizen auszuwählen. Dieses ist möglich, da  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$  und  $\mathrm{GL}_n(A)$  alle Permutationsmatrizen enthalten.

Sei nun  $\Gamma$  ein Gitter (nicht notwendig aus dem Standardapartment), zu dem es ein Gitter  $\Gamma_0$  im obigen Sektor gibt, welches  $\Gamma_0 \subset \Gamma \subset t\Gamma_0$  erfüllt. Dann können wir die Hermite-Normalformen von  $\Gamma$  und  $\Gamma_0$  leicht vergleichen:

Seien hierzu  $M$  und  $M_0$  zwei Matrizen, die die Hermite-Normalform von  $\Gamma$  und  $\Gamma_0$  repräsentieren. Dann gilt:  $M_0$  ist eine Diagonalmatrix. In der Diagonale stehen nur Monome, deren Grad nach unten hin monoton abnimmt. Das heißt, es ist  $\Gamma_0 = [t^{f_1}e_1, \dots, t^{f_n}e_n]$  mit einer monoton fallenden Folge  $f_i$ .

$M$  ist eine obere Dreiecksmatrix. Aus der Inklusionsbeziehung  $\Gamma_0 \subset \Gamma \subset t\Gamma_0$  folgt, dass das  $i$ -te Diagonalelement von  $M$  entweder  $t^{f_i}$  oder  $t^{f_i+1}$  ist. Weiterhin sind alle Außerdiagonalelemente der  $i$ -ten Zeile in  $t^{f_i+1}\mathbb{F}_q$  enthalten, da  $M$  Hermite-Normalform hat.

Wir nutzen die letzten Aussagen, um uns eine Übersicht über die Struktur einer Spalte von  $M$  zu verschaffen: In der  $j$ -ten Spalte von  $M$  stehen unterhalb des Diagonalelements nur nullen. Das  $j$ -te Diagonalelement ist ein Monom vom Grad  $f_j$  oder  $f_j + 1$ . Steht außerhalb der Diagonale an der Position  $(i, j)$  ein von null verschiedenes Element, so ist es ein Monom vom Grad  $f_i + 1$  und es ist  $i < j$ . Da  $f_i$  eine monoton fallende Folge ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{Grad des Monoms an Position } (i, j) &= f_i + 1 \geq f_j + 1 \\ &\geq \text{Grad des } j\text{-ten Diagonalelements} \end{aligned}$$

Wir können daher alle Elemente der  $j$ -ten Spalte durch das  $j$ -te Diagonalelement teilen und erhalten als Quotienten nur Monome aus  $A$ .

Nun ist gezeigt, dass  $M$  als Produkt zweier Matrizen  $RD$  geschrieben werden kann. Dabei ist  $D$  eine Diagonalmatrix, die aus den Diagonalelementen von  $M$  besteht. Weiterhin ist  $R$  eine obere Dreiecksmatrix, deren Einträge alle aus  $A$  sind und die nur Einsen auf der Diagonale hat. (D. h.  $R \in \mathrm{GL}_n(A)$ .)

Nun haben wir gezeigt, dass  $R^{-1}\Gamma$  ein Gitter des Standardapartments ist. Nach dem oben Bewiesenen gibt es dann eine zweite Matrix, die das Bild von  $\Gamma$  in den obigen Sektor abbildet.

Um nun die Behauptung für ein beliebiges Gitter  $\Gamma$  zu beweisen, benutzen wir die oben eingeführte kombinatorische Metrik. Da diese diskret ist, gibt es im Standardapartment ein Gitter  $\Gamma_0$ , welches von  $\Gamma$  minimalen Abstand hat. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $\Gamma_0 \subset \Gamma \subset t^\ell \Gamma_0$  gilt, wobei  $\ell > 0$  der kombinatorische Abstand ist.

Wir betrachten das Gitter  $\Delta := \Gamma_0 + t^{1-\ell}\Gamma$ . Es gilt:  $\Gamma_0 \subset \Delta \subset t\Gamma_0$  und  $\Delta \subset \Gamma \subset t^{\ell-1}\Delta$ . Das heißt  $\Delta$  ist ein Gitter, welches nach dem oben Bewiesenen mit einem Element  $\varphi \in GL_n(k[t])$  in den Sektor abgebildet werden kann. Wird  $\varphi$  auf das Gitter  $\Gamma$  angewendet, so entsteht ein Gitter, welches vom Sektor höchstens den Abstand  $\ell - 1$  hat, weil  $\Gamma$  und  $\Delta$  den Abstand  $\ell - 1$  haben und die Operation von  $GL_n(k[t]) \subset GL_n(\widehat{K})$  auf dem Gebäude abstandstreu ist.

Eine induktive Wiederholung der obigen Konstruktion mit  $\varphi\Gamma$  statt  $\Gamma$  liefert ein Produkt von Matrizen aus  $GL_n(k[t])$ , welches das Gitter  $\Gamma$  auf ein Gitter im Sektor abbildet.  $\square$

Mit der obigen Methode können wir jede Ecke des Gebäudes in den obigen Sektor bringen. Als nächstes ist zu zeigen, dass die  $GL_n(A)$ -Bahn eines Gitters höchstens einen Punkt des Sektors enthält. Eine Möglichkeit dies zu zeigen besteht darin, die Stabilisatoren der Gitter (bzw. Gitterklassen) in  $GL_n(A)$  auszurechnen. Dann ist zu zeigen, dass diese Stabilisatoren für zwei verschiedene Ecken im Sektor nicht zueinander konjugiert sind.

**Satz.**

Der Stabilisator eines Gitters  $\Gamma = [t^{k_1}e_1, \dots, t^{k_n}e_n]$  in  $GL_n(A)$  ist

$$\{(x_{i,j}) \in GL_n(A) \mid \deg(x_{i,j}) \leq k_i - k_j\},$$

wobei der Grad des Nullpolynoms formal auf  $-\infty$  gesetzt wird.

**Beweis.**

Sei hierzu  $M \in \text{Stab}(\Gamma)$  ein beliebiges Element. Wir untersuchen die Bedingung  $M\Gamma \subset \Gamma$ , die zu  $Mt^{k_j}e_j \in \Gamma$  äquivalent ist. Dieses ist gleichbedeutend mit der obigen Gradbedingung für die Matrizeneinträge.

Da  $\det(M) \in A^* = k^* \subset \mathcal{O}^*$  gilt, liefert eine Betrachtung der Diskriminanten die Äquivalenz von  $M\Gamma \subset \Gamma$  und  $M\Gamma = \Gamma$ .  $\square$

**Satz.**

Der obige Sektor ist ein exakter Fundamentalbereich.

**Beweis.**

Wir haben zu zeigen, dass die obigen Stabilisatoren für verschiedene Punkte des Sektors nicht zueinander konjugiert sind. Dabei benutzen wir systematisch, dass eine Konjugation in einer Matrizengruppe stets einem Basiswechsel entspricht.

Sei  $\Gamma = [e_1, t^{k_2}e_2, \dots, t^{k_n}e_n]$  mit  $0 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$  ein Gitter im obigen Sektor, sowie  $S = \text{Stab}(\Gamma)$  die entsprechende Stabilisatorgruppe.

Wir betrachten zu einem beliebigen Vektor  $0 \neq x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \widehat{K}^n$  den von  $Sx$  erzeugten Unterraum. Hierzu sei  $l$  der größte Index mit  $x_l \neq 0$  und  $d$  der größte Index mit  $k_d \geq k_l$ . Dann ist  $\langle e_1, \dots, e_d \rangle$  der von  $Sx$  erzeugte Unterraum.

Damit haben wir die Flagge aller  $S$ -invarianten Unterräume bestimmt. Der Typ dieser Flagge ist eine Invariante aller zu  $S$  konjugierten Untergruppen.

Falls also zwei der obigen Stabilisatoren zueinander konjugiert sein sollten, so haben ihre Matrizen die gleiche Blockstruktur. Weitere Invarianten der Konjugiertenklasse von  $S$  sind die Ordnungen der Außerdiagonalblöcke.

Dies zeigt, dass die obigen Stabilisatoren nicht zueinander konjugiert sind und der Sektor folglich ein exakter Fundamentalbereich ist.  $\square$

Nachdem wir die Operation von  $GL_n(A)$  auf den Ecken untersucht haben, wenden wir uns der Operation auf den Simplizes zu.

**Satz.**

*Der obige Sektor ist ein exakter Fundamentalbereich für die Operation von  $GL_n(A)$  auf den Simplizes des Gebäudes.*

**Beweis.**

Wir starten also mit einem beliebigen Simplex  $\Sigma$  und betrachten zunächst eine Ecke  $\Gamma$  von  $\Sigma$ . Diese Ecke können wir nach dem oben gezeigten Satz in den Fundamentalbereich bringen.

Es ist also nur noch der Fall zu betrachten, dass  $\Sigma$  mindestens eine Ecke  $\Gamma$  im Fundamentalbereich hat. Hierzu betrachten wir zunächst die Wirkung von  $\text{Stab}(\Gamma)$  auf  $\Sigma$ . Es ist die Operation von  $\text{Stab}(\Gamma)$  auf  $\Gamma/\frac{1}{t}\Gamma$  zu untersuchen. Hier betrachten wir zunächst nur die Wirkung der Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen aus  $GL_n(\mathbb{F}_q)$ . Aus dem nächsten Lemma folgt, dass diese Untergruppe des Stabilisators den gesamten Simplex zumindest in das Standardapartment transportieren kann.

Sei nun  $\Sigma$  ein Simplex im Standardapartment, so können wir durch eine Permutationsmatrix aus  $GL_n(A)$  (dies entspricht einer oder mehrerer Spiegelungen an den Sektorengrenzen) den gesamten Simplex in den Fundamentalbereich bringen.  $\square$

**Lemma.**

*Sei  $k$  ein beliebiger Körper und  $U_1 \subset \dots \subset U_l \subset k^n$  eine Flagge von Unterräumen des  $k^n$ , sowie  $B \subset GL_n(k)$  die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Dann existiert eine Matrix  $M \in B$  so, dass  $MU_i$  eine Flagge von Unterräumen ist, die von Einheitsvektoren aufgespannt werden.*

**Beweis.**

Es sei  $x_1, \dots, x_n \in k^n$  eine Basis des  $k^n$ , die zur Flagge  $U_i$  passt, d. h. jedes  $U_i$  wird von den ersten  $\dim(U_i)$  dieser Vektoren aufgespannt. Diese Vektoren setzen wir spaltenweise zu einer Matrix  $X \in GL_n(k)$  zusammen. Die Behauptung ist dann, dass es  $M_1, M_2 \in B$  so gibt, dass  $w = M_1 X M_2$  eine Matrix ist, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst nur Nullen hat. Dieses ist zu  $X = M_1^{-1} w M_2$  äquivalent. Damit haben wir die Behauptung auf die Tatsache zurückgeführt, dass jedes Element aus  $GL_n(k)$  eine Bruhat-Tits Zerlegung hat.  $\square$

**Bemerkung.**

Der obige Beweis zeigt, dass der obige Sektor ein exakter Fundamentalbereich für die Operation von  $GL_n(A)$  ist. (Wir bezeichnen ihn im Weiteren mit  $F$ .) Dann ist auch jede Verschiebung von  $F$  mit einem Element  $g \in GL_n(A)$  ein exakter Fundamentalbereich. Wählen wir beispielsweise  $g$  als eine Permutationsmatrix, so erhalten wir, dass auch jeder andere Sektor im Standardapartment, dessen Spitze das Standardgitter ist, ein exakter Fundamentalbereich ist. Da es im Standardapartment  $n!$  Sektoren gibt, ist jeder Punkt von  $\mathcal{X}$  zu maximal  $n!$  Punkten des Standardapartments  $GL_n(A)$ -äquivalent. Das Gleiche gilt auch für die Simplizes des Gebäudes.

### 3.3.2 Projektionen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, Projektionen im Gebäude zu untersuchen. Unter Projektion ist hier die Projektion auf das Standardapartment oder auf den oben beschriebenen Sektor gemeint. Dabei ist mit „Projektion“ ein Punkt aus der Zielmenge gemeint, der minimalen Abstand zum Ausgangspunkt hat.

Der oben bewiesene Projektionssatz für konvexe Mengen gibt einen nicht konstruktiven Beweis für die Existenz und die Eindeutigkeit solcher Projektionen, wenn die kontinuierliche Metrik verwendet wird.

An dieser Stelle gehen wir wieder einen Schritt zurück und untersuchen die gleiche Situation unter Verwendung der kombinatorischen Metrik.

**Satz.**

Sei  $\Gamma \in \widehat{K}^n$  ein beliebiges vollständiges Gitter. Dann ist

$$\pi_S(\Gamma) := \bigoplus_{i=1}^n \Gamma \cap \widehat{K}e_i$$

das größte Untergitter von  $\Gamma$ , welches zum Standardapartment gehört. Weiterhin ist

$$\pi_P(\Gamma) := \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i^\vee | \Gamma \rangle e_i$$

das kleinste Gitter des Standardapartments, welches  $\Gamma$  enthält. Dabei bezeichnet  $e_i^\vee$  die duale Basis der Standardbasis.

**Beweis.**

**Zu  $\pi_S(\Gamma)$ :** Da  $\pi_S(\Gamma)$  direkte Summe von Untergittern von  $\Gamma$  ist, ist  $\pi_S(\Gamma)$  auch ein Untergitter von  $\Gamma$ . Die Maximalität folgt sofort daraus, dass alle Gitter des Standardapartments die Form  $[t^{k_1}e_1, \dots, t^{k_n}e_n]$  haben.

Es bleibt zu zeigen, dass es sich um ein vollständiges Gitter handelt, genauer:  $\Gamma \cap \widehat{K}e_i$  enthält mehr als den Nullvektor. Dies folgt aus der Tatsache, dass  $\Gamma$  ein vollständiges Gitter ist und dass  $\widehat{K}$  der Quotientenkörper von  $\mathfrak{o}$  ist.

**Zu  $\pi_P(\Gamma)$ :** Sei  $x = \sum x_i e_i \in \Gamma$ , dann sind  $x_i e_i \in \pi_P(\Gamma)$ . Damit ist gezeigt, dass  $\Gamma \subset \pi_P(\Gamma)$  gilt.

Sei nun  $\Delta$  ein beliebiges Gitter des Standardapartments, welches  $\Gamma$  enthält. Dann folgt aus  $x = \sum x_i e_i \in \Gamma$  sofort, dass alle  $x_i e_i$  Elemente von  $\Delta$  sind. Da  $\pi_P(\Gamma)$  das von diesen Elementen erzeugte Gitter ist, folgt sofort, dass  $\pi_P(\Gamma) \subset \Delta$  gilt. □

**Satz.**

Sei  $\Gamma$  ein beliebiges vollständiges Gitter, dann sind  $\pi_S(\Gamma)$  und  $\pi_P(\Gamma)$  zwei Gitter des Standardapartments, welche zu  $\Gamma$  minimalen (und damit gleichen) kombinatorischen Abstand haben.

**Beweis.**

Sei  $\Delta$  ein weiteres Gitter des Standardapartments. Wir nehmen zunächst an, dass  $\Delta \subset \Gamma \not\subset t\Delta$  gilt. Sei nun  $d = d(\Gamma, \Delta)$ . Dann gilt  $\Gamma \subset t^d \Delta$  und nach dem obigen Satz auch  $\pi_P(\Gamma) \subset t^d \Delta$ , weil mit  $\Delta$  auch  $t^d \Delta$  ein Gitter des Standardapartments ist. Dieses führt zu

$$t^{-d} \pi_P(\Gamma) \subset \Gamma \subset \pi_P(\Gamma).$$

Damit haben  $\Gamma$  und  $\pi_P(\Gamma)$  höchstens den kombinatorischen Abstand  $d$ .

Für die Untersuchung von  $\pi_S(\Gamma)$  nehmen wir  $\Delta \supset \Gamma \not\subset t^{-1} \Delta$  an. Mit  $d = d(\Gamma, \Delta)$  gilt dann  $\Delta \supset \Gamma \supset t^{-d} \Delta$ . Nun folgt mit  $\Gamma \supset \pi_S(\Gamma) \supset t^{-d} \Delta$  sofort  $t^d \pi_S(\Gamma) \supset \Delta \supset \Gamma \supset \pi_S(\Gamma)$ , welches  $d(\Gamma, \pi_S(\Gamma)) \leq d$  liefert. □

Aus den letzten beiden Sätzen folgt der

**Satz.**

Sei  $\Gamma$  ein beliebiges vollständiges Gitter und  $d$  der kombinatorische Abstand von  $\Gamma$  zum Standardapartment. Dann ist

$$\{[\Delta] \mid \pi_P(\Gamma)t^{-d} \subset \Delta \subset \pi_S(\Gamma) \text{ und } \Delta \text{ ist Gitter des Standardapartments}\}$$

die Menge aller Gitterklassen des Standardapartments, welche zu  $\Gamma$  den kleinsten kombinatorischen Abstand haben.

**Bemerkung.**

Die Abbildungen  $\pi_P$  und  $\pi_S$  sind im folgenden Sinn dual zueinander:

$$[\pi_P(\Gamma)] = [\pi_S(\Gamma^\vee)^\vee],$$

wobei  $\pi_S(\Gamma^\vee)$  die mit  $e_1^\vee, \dots, e_n^\vee$  anstelle von  $e_1, \dots, e_n$  gebildete Projektion bezeichnet.

**Satz.**

Es seien  $\Gamma_1 = [t^{k_1}e_1, \dots, t^{k_n}e_n]$  und  $\Gamma_2 = [t^{l_1}e_1, \dots, t^{l_n}e_n]$  zwei beliebige Gitter des Standardapartments. Dann sind äquivalent:

- Es gibt ein Gitter  $\Delta$  mit  $\pi_S(\Delta) = \Gamma_1$  und  $\pi_P(\Delta) = \Gamma_2$ .
- Es gilt  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  und die Differenz  $l_i - k_i$  hat für mindestens 2 verschiedene Indizes  $i$  ihren maximalen Wert.

**Beweis.**

Wir zeigen zunächst, wie aus der zweiten Aussage die erste folgt:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $l_1 - k_1 = l_2 - k_2 = \max(l_i - k_i)$ . Dann betrachten wir das Gitter

$$\Delta = \mathcal{O}(t^{l_1}e_1 + \dots + t^{l_n}e_n) \oplus \mathcal{O}t^{k_2}e_2 \oplus \mathcal{O}t^{k_3}e_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}t^{k_n}e_n.$$

Da  $l_i \geq k_i$  für alle  $i$  gilt, folgt  $\langle e_i^\vee | \Delta \rangle = t^{l_i} \mathcal{O}$  und somit  $\pi_P(\Delta) = \Gamma_2$ . Für  $i \geq 2$  gilt  $\Delta \cap \widehat{K}e_i = \mathcal{O}t^{k_i}e_i$ , da  $t^{k_i}e_i$  ein Element der obigen Gitterbasis ist.

Es bleibt  $\Delta \cap \widehat{K}e_1$  zu berechnen. Dafür ist zunächst  $e_1$  mit der obigen Gitterbasis darzustellen. Es gilt

$$e_1 = t^{-l_1}(t^{l_1}e_1 + \dots + t^{l_n}e_n) - (t^{-l_1+l_2-k_2}t^{k_2}e_2 + \dots + t^{-l_1+l_n-k_n}t^{k_n}e_n).$$

Damit erhalten wir  $\Delta \cap \widehat{K}e_1 = \mathcal{O}t^k e_1$  wobei

$$\begin{aligned} k &= \min\{l_1, l_1 - l_2 + k_2, l_1 - l_3 + k_3, \dots, l_1 - l_n + k_n\} \\ &= l_1 - \max\{0, l_2 - k_2, l_3 - k_3, \dots, l_n - k_n\} \\ &= l_1 - (l_1 - k_1) = k_1 \end{aligned}$$

gilt.

Zum Beweis der Rückrichtung nehmen wir an, dass es ein Gitter  $\Delta$  mit  $\pi_S(\Delta) = \Gamma_1$  und  $\pi_P(\Delta) = \Gamma_2$  gibt und dass die zweite Aussage falsch ist. Da die Inklusionskette  $\pi_S(\Delta) \subset \Delta \subset \pi_P(\Delta)$  immer gilt, kann nur der zweite Teil der zweiten Aussage falsch sein. Wir nehmen also an, dass die Differenz  $l_i - k_i$  ihr Maximum nur für ein  $i$  annimmt. Ohne Einschränkung sei  $i = 1$ .

Aus der Inklusionskette  $\pi_S(\Delta) \subset \Delta \subset \pi_P(\Delta)$  folgt, dass die Differenz  $l_i - k_i$  nie negativ ist. Dies liefert  $l_1 - k_1 \geq 1$ .

Nach Definition von  $\pi_P(\Delta)$  existiert ein Gitterpunkt  $x \in \Delta$  mit  $\langle e_1^\vee | x \rangle = t^{l_1}$ . Es gilt  $\langle e_i^\vee | x \rangle \in \mathcal{O}t^{l_i}$ . Wir betrachten den Punkt

$$y = t^{k_1-l_1+1}x - \sum_{i=2}^n \langle e_i^\vee | x \rangle t^{k_1-l_1+1}e_i = t^{k_1+1}e_1.$$

Wir erhalten einen Widerspruch, wenn wir zeigen, dass  $y$  ein Gitterpunkt von  $\Delta$  ist. Da  $x$  ein Gitterpunkt ist und  $l_1 \geq k_1 + 1$  gilt, ist der erste Summand ein Gitterpunkt. Für  $i \geq 2$  folgt aus

$$\langle e_i^\vee | x \rangle t^{k_1-l_1+1} \in \mathcal{O}t^{l_i} t^{k_1-l_1+1} = \mathcal{O}t^{l_i+k_1-l_1+1} \subset \mathcal{O}t^{k_i},$$

dass die weiteren Summanden auch Gitterpunkte sind. Damit ist gezeigt, dass  $y$  auch ein Gitterpunkt ist.  $\square$

**Bemerkung.**

Die obige Bedingung der Mehrfachheit des Maximums erscheint zunächst etwas überraschend. Sie bedeutet jedoch nichts anderes, als dass die Klassen von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  auf einer gemeinsamen Spiegelebene der affinen Coxeter-Gruppe des Standard-apartments liegen.

### 3.3.3 Projektionen auf den Fundamentalbereich

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, in ähnlicher Weise Projektionen auf den Fundamentalbereich von  $GL_n(A)$ , also den oben beschriebenen Sektor, zu konstruieren.

**Satz.**

Sei  $\Gamma$  ein beliebiges vollständiges Gitter. Dann ist

$$\pi_{P,F}(\Gamma) := \bigoplus_{i=1}^n \max_{j=i}^n \langle e_j^\vee | \Gamma \rangle e_i$$

das kleinste Gitter des Fundamentalbereichs, welches  $\Gamma$  enthält, und

$$\pi_{S,F}(\Gamma) := \bigoplus_{i=1}^n \min_{j=1}^i \{ \lambda \in \widehat{K} \mid \lambda e_j \in \Gamma \} e_i$$

ist das größte Gitter des Fundamentalbereichs, welches in  $\Gamma$  enthalten ist. Dabei bezeichnen „min“ und „max“ das Minimum und Maximum bezüglich der mengentheoretischen Inklusion.

**Beweis.**

Sei  $\Delta$  das kleinste Gitter des Fundamentalbereichs, welches  $\Gamma$  enthält. Aus den obigen Sätzen folgt sofort, dass  $\pi_P(\Gamma) \subset \Delta$  gilt. Somit gilt

$$\pi_P(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i^\vee | \Gamma \rangle e_i \subset \Delta.$$

Da  $\Delta$  ein Gitter des Fundamentalbereichs ist, folgt aus  $\lambda e_i \in \Delta$  sofort  $\lambda e_j \in \Delta$  für alle  $j \leq i$ . Dieses beweist  $\pi_{P,F}(\Gamma) \subset \Delta$ . Da  $\pi_{P,F}(\Gamma)$  ein Gitter des Fundamentalbereichs ist, ist  $\Delta = \pi_{P,F}(\Gamma)$  bewiesen.

Zum Beweis der zweiten Behauptung sei  $\Delta$  das größte Gitter des Fundamentalbereichs, welches in  $\Gamma$  enthalten ist. Dann folgt mit dem oben Bewiesenen

$$\pi_S(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^n \Gamma \cap \widehat{K} e_i = \bigoplus_{i=1}^n \{ \lambda \in \widehat{K} \mid \lambda e_i \in \Gamma \} e_i \supset \Delta.$$

Da  $\Delta$  ein Gitter des Fundamentalbereichs ist, folgt aus  $\lambda e_j \notin \Delta$  sofort  $\lambda e_i \notin \Delta$  für alle  $i > j$ . Dieses zeigt  $\pi_{S,F}(\Gamma) \supset \Delta$ . Da  $\pi_{S,F}(\Gamma)$  ein Gitter des Fundamentalbereichs ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz.**

Sei  $\Gamma$  ein beliebiges vollständiges Gitter und  $d$  der kombinatorische Abstand zwischen  $\Gamma$  und dem Fundamentalbereich. Dann sind  $\pi_{S,F}(\Gamma)$  und  $\pi_{P,F}(\Gamma)$  zwei Gitter des Fundamentalbereichs, die zu  $\Gamma$  minimalen (und damit gleichen) kombinatorischen Abstand haben. Weiterhin erhalten wir alle Gitterklassen mit minimalem kombinatorischem Abstand, indem wir alle Gitter des Fundamentalbereichs betrachten, die zwischen  $t^{-d}\pi_{P,F}(\Gamma)$  und  $\pi_{S,F}(\Gamma)$  liegen.

**Beweis.**

Aus der Minimalitätsaussage bzw. Maximalitätsaussage des letzten Satzes folgt sofort die Minimalität des kombinatorischen Abstandes. Die restlichen Aussagen können genau wie für  $\pi_S(\Gamma)$  und  $\pi_P(\Gamma)$  bewiesen werden.  $\square$

**Bemerkung.**

Die Abbildungen  $\pi_{S,F}$  und  $\pi_{P,F}$  sind dual zueinander. D. h. es gilt

$$[\pi_{S,F}(\Gamma^\vee)^\vee] = [\pi_{P,F}(\Gamma)].$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass im Gebäude der dualen Gitter ein Fundamentalbereich ausgezeichnet ist, der aus den dualen Gittern der Gitter des Fundamentalbereichs besteht.

### 3.4 Kompaktifizierungen affiner Gebäude

Ziel dieses Abschnitts ist es, zunächst eine Übersicht über verschiedene Kompaktifizierungen der affinen Gebäude vom Typ  $\tilde{A}_n$  zu geben. Im weiteren Verlauf soll dann die Borel-Serre-Kompaktifizierung näher betrachtet werden, da sie im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine Anwendung findet.

#### 3.4.1 Topologischer Standpunkt

Allgemein gibt es zwei Methoden zur Konstruktion einer Kompaktifizierung eines nicht kompakten topologischen Raums  $T$ . Eine Methode besteht darin, dass zu  $T$  Punkte hinzugefügt werden und dann eine Umgebungsbasis für diese Punkte angegeben wird. Eine andere Methode besteht darin,  $T$  in einen kompakten Raum einzubetten. Dann ist der Abschluss des Bildes eine Kompaktifizierung. Mit diesen Methoden werden in der allgemeinen Topologie zwei ausgezeichnete Kompaktifizierungen konstruiert: Die Stone-Čech-Kompaktifizierung und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung.

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung eines Raumes  $T$  entsteht, indem zu  $T$  ein Punkt  $\infty$  hinzugefügt wird. Die Komplemente der kompakten Mengen von  $T$  bilden eine Umgebungsbasis von  $\infty$ .

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung wird mit dem anderen oben genannten Prinzip konstruiert. Der Ausgangspunkt der Konstruktion sind alle stetigen Abbildungen von  $T$  in das abgeschlossene Einheitsintervall. Unter der Voraussetzung, dass das kartesische Produkt aller dieser Abbildungen eine Einbettung ist, bildet dieses Produkt eine Einbettung von  $T$  in einen Raum, der nach dem Satz von Tychonov kompakt ist. Den Abschluss des Bildes von  $T$  unter dieser Abbildung ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung von  $T$ .

Sei nun  $K$  eine beliebige Kompaktifizierung von  $T$ . Dann überlagert die Stone-Čech-Kompaktifizierung von  $T$  die Kompaktifizierung  $K$ , und  $K$  überlagert die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von  $T$ . Jede andere Kompaktifizierung liegt also zwischen diesen beiden Kompaktifizierungen.

#### 3.4.2 Bekannte Kompaktifizierungen

Für spätere Anwendungen sind Kompaktifizierungen interessant, die mit der geometrischen und kombinatorischen Struktur der Gebäude verträglich sind.

All diese Kompaktifizierungen haben die Eigenschaft, dass der Abschluss eines geodätischen Strahls des Gebäudes den Strahl um genau einen unendlich fernen Punkt erweitert. Weiterhin gibt es zu jedem bei der Kompaktifizierung ergänzten Punkt einen solchen Strahl.

Daher können wir die Kompaktifizierungen auf Apartmentebene visualisieren, indem wir in ein Apartment Strahlen mit gleichen oder verschiedenen unendlich fernen Punkten einzeichnen.

Eine solche Kompaktifizierung liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Strahlen, deren Äquivalenzklassen aus der Menge aller Strahlen mit gleichem unendlich fernen Punkt bestehen.

### Die Kompaktifizierung mit Seminormen

Die genaue Konstruktion dieser Kompaktifizierung ist in [We1] beschrieben.

Die Idee besteht darin, die Punkte des Gebäudes  $\tilde{A}_n$  mit Äquivalenzklassen von Normen zu identifizieren und aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten zu wählen. Dieser Funktionenraum wird mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ausgestattet und bezüglich dieser vervollständigt. Der vervollständigte Raum ist der Raum aller Äquivalenzklassen von Seminormen. Dabei unterscheidet sich eine Seminorm von einer Norm, indem die Definitheit ( $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$ ) gestrichen wird.

Es entsteht ein kompakter und zusammenziehbarer Raum, in dem das ursprüngliche Gebäude als offene Teilmenge enthalten ist. Die Operation von  $\mathrm{PGL}(\tilde{K}, n)$  setzt sich zu einer Operation auf der Kompaktifizierung fort.

Die Veranschaulichung dieser Kompaktifizierung für ein zweidimensionales Apartment liefert folgendes Bild: Jeweils zwei benachbarte Sektoren werden zusammengefasst. Alle Strahlen, die in einer Richtung dieses „Doppelsektors“, aber nicht parallel zu den äußeren Grenzen dieses „Doppelsektors“, verlaufen, haben als zusätzlichen Punkt in der Kompaktifizierung eine Seminorm, die auf dem gleichen zweidimensionalen Unterraum verschwindet. Da alle Normen bezüglich einer zum Apartment gehörenden Vektorraumbasis diagonalisieren, gehören alle zur gleichen Klasse von Seminormen. Folglich haben alle diese Strahlen den gleichen unendlich fernen Punkt. Strahlen, die parallel zu einer äußeren Kante des „Doppelsektors“ verlaufen, konvergieren gegen Seminormen, die auf dem gleichen eindimensionalen Unterraum verschwinden. Ihre unendlich fernen Punkte können als Normenklassen auf dem komplementären zweidimensionalen Unterraum des Apartments verstanden werden. Jeder der parallelen Strahlen konvergiert dann gegen eine andere Normenklasse auf diesem zweidimensionalen Raum. Dies sind genau die Punkte eines niederdimensionalen affinen Apartments.

Die Menge der bei der Kompaktifizierung des gesamten Gebäudes hinzugenommenen Punkte kann mit den affinen Gebäuden aller Gitterklassen aller echten Unterräume identifiziert werden.

### Die sphärische Kompaktifizierung

Diese Kompaktifizierung wird auch als Borel-Serre-Kompaktifizierung bezeichnet. Sie ist ausführlich in [Bro] oder [Ga] (Abschnitt 16.9) beschrieben, daher geben wir hier nur eine Skizze der wichtigsten Definitionen und Eigenschaften.

Die Idee dieser Kompaktifizierung besteht darin, ähnlich der projektiven Geometrie jeder Äquivalenzklasse in gleicher Richtung verlaufender Strahlen den gleichen unendlich fernen Punkt (oder Grenzwert) zuzuordnen. Hierfür muss jedoch zunächst der Begriff der Parallelität, den wir bisher nur für Strahlen innerhalb eines Apartments kennen, auf beliebige Strahlen im Gebäude erweitert werden:

#### Definition.

Sei  $\mathcal{X}$  ein affines Gebäude.

- Ein Strahl in  $\mathcal{X}$  ist ein Strahl in einem beliebigen Apartment von  $\mathcal{X}$ .
- Als Teilstrahl eines Strahls  $S$  wird  $S$  ohne ein Anfangsstück bezeichnet.

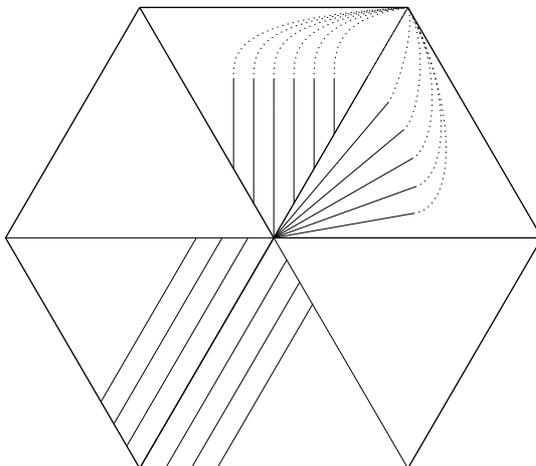


Abbildung 3.2: Strahlen in einem mit Seminormen kompaktifizierten Apartment

- Zwei Strahlen, die im gleichen Apartment verlaufen, heißen parallel, wenn sie in ihrem Apartment (aufgefasst als affiner Raum) parallel sind (genauer: in die gleiche Richtung verlaufen).

Zwei Strahlen, die nicht in einem gemeinsamen Apartment verlaufen, heißen parallel, wenn Teilstrahlen existieren, die in einem gemeinsamen Apartment liegen und in diesem in die gleiche Richtung verlaufen.

- Ein Sektor ist eine Teilmenge eines Apartments, der von Spiegelebenen der Weylgruppe begrenzt ist. Genauer: Durch einen 0-Simplex in einem Apartment verlaufen endlich viele Spiegelebenen der Weylgruppe. Diese Spiegelebenen zerlegen das Apartment in endlich viele Kegel. Ein jeder dieser Kegel ist ein Sektor.
- Ein Untersektor ist ein Sektor, der in einem gegebenen Sektor enthalten ist.

**Satz.**

Sei  $\mathcal{X}$  ein affines Gebäude. Als Apartmentsystem auf  $\mathcal{X}$  wählen wir das maximale System aller Apartments. Dann gilt:

- Zwei Strahlen sind genau dann parallel, wenn sie sich nicht beliebig weit voneinander entfernen, d. h.  $S_1$  und  $S_2$  sind genau dann parallel, wenn es eine Konstante  $C$  mit

$$\begin{aligned} \forall x \in S_1 \exists y \in S_2 : d(x, y) < C \\ \forall y \in S_2 \exists x \in S_1 : d(x, y) < C \end{aligned}$$

gibt.

- Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Strahlen.
- Zu jedem Strahl  $S$  und jedem Punkt  $x$  im Gebäude gibt es genau einen Strahl, der in  $x$  beginnt und zu  $S$  parallel ist. (Siehe [Ga], S. 276)

**Definition.**

Die Sektoren haben eine Einteilung in Äquivalenzklassen. Dabei heißen zwei Sektoren äquivalent, wenn sie einen gemeinsamen Untersektor haben. Die Äquivalenzklassen werden auch als ideale Simplizes bezeichnet.

Die Äquivalenzklassen paralleler Strahlen werden als ideale Punkte bezeichnet. Ein idealer Punkt ist in einem idealen Simplex enthalten, wenn Repräsentanten existieren, die die Inklusionsbeziehung erfüllen.

**Satz.**

Sei  $\mathcal{X}$  das affine Gebäude der vollständigen Gitterklassen in  $\widehat{K}^n$ . Dann bilden die idealen Simplizes von  $\mathcal{X}$  die maximalen Simplizes eines Gebäudes. Dieses wird mit  $\mathcal{X}_\infty$  bezeichnet. Die Punkte in  $\mathcal{X}_\infty$  sind die idealen Punkte.

Das Gebäude  $\mathcal{X}_\infty$  ist zum sphärischen Gebäude aller Unterräume des  $\widehat{K}^n$  isomorph. Die Apartments von  $\mathcal{X}_\infty$  stehen in 1-zu-1-Korrespondenz mit den Apartments von  $\mathcal{X}$ .

**Bemerkung.**

Die Topologie von  $\mathcal{X}$  kann zu einer von  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}_\infty$  so ergänzt werden, dass die Menge  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}_\infty$  kompakt ist und  $\mathcal{X}$  als offenen, dichten Teil enthält.  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}_\infty$  wird als die sphärische Kompaktifizierung von  $\mathcal{X}$  bezeichnet.

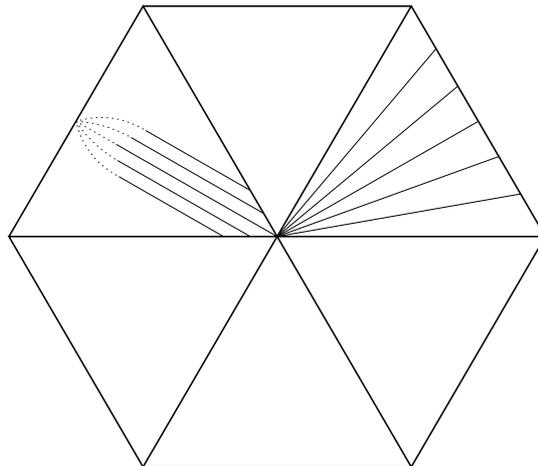


Abbildung 3.3: Strahlen in einem Apartment mit sphärischer Kompaktifizierung

**Ein Koordinatensystem für die sphärische Kompaktifizierung**

Um mit der sphärischen Kompaktifizierung praktisch rechnen zu können, wird nicht nur eine abstrakte Konstruktion benötigt, sondern auch eine Vorschrift, wie die verschiedenen Koordinatensysteme zusammenspielen. Es ist also einem, durch Koordinaten beschriebenen, Strahl im affinen Gebäude ein Punkt im sphärischen Gebäude (d. h. eine Flaggenfunktion) zuzuordnen. Diesem wenden wir uns jetzt zu.

Eine solche Zuordnung kann nicht kanonisch sein, denn sie kann immer um einen Automorphismus des sphärischen Gebäudes modifiziert werden, ohne an der Kompaktifizierung etwas zu ändern. Daher wählen wir hier eine Zuordnung, die sich in Koordinaten besonders leicht hinschreiben lässt.

Sei  $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{X}$  ein Strahl. Dann gibt es ein Apartment  $A$ , in dem der Strahl enthalten ist. Sei  $b_1, \dots, b_n \in \widehat{K}^n$  eine zu  $A$  passende Basis. Dann hat  $\gamma$  die Form

$$\gamma(u) = \left[ t^{\gamma_1(u)} b_1, \dots, t^{\gamma_n(u)} b_n \right],$$

wobei die  $\gamma_i$  stetige Funktionen von  $u$  sind. Weiterhin können wir durch geeignetes Normieren der Repräsentanten von  $\gamma(u)$  sowie Sortieren und Skalieren der Basisvektoren erreichen, dass

$$0 = \gamma_1(u) \leq \gamma_2(u) \leq \dots \leq \gamma_n(u) \longrightarrow \infty \text{ für } u \rightarrow \infty$$

gilt. Nun können wir die zugeordnete Flaggenfunktion ff hinschreiben:

$$\text{ff}(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log(\gamma_k(u))}{\log(\gamma_n(u))} \text{ für } x \in \langle x_k, \dots, x_n \rangle \setminus \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$$

Der Wert dieser Flaggenfunktion ändert sich nicht, wenn die obige Basis  $b_i$  durch eine andere ersetzt wird, die die gleichen Normierungsbedingungen erfüllt.

## Kapitel 4

# Der mehrdimensionale Kettenbruch

Die Idee eines verallgemeinerten Kettenbruchs besteht in der genauen Untersuchung der Operation von  $\mathrm{GL}_n(A)$  auf dem affinen Gebäude  $\mathcal{X}$  aller Klassen vollständiger  $\mathfrak{o}$ -Gitter.

Dabei soll genau betrachtet werden, wie sich eine Geodäte auf dem oben definierten Fundamentalbereich  $F$  „abrollt“.

Genauer: Jeder Punkt einer Geodäte kann auf genau einen Punkt von  $F$  abgebildet werden, da  $F$  ein exakter Fundamentalbereich ist. So formuliert wird jedem Punkt der Geodäte ein Gruppenelement zugeordnet, welches bis auf die Auswahl eines Elementes in einer Stabilisatoruntergruppe eindeutig ist. Das Hauptziel dieses Kapitels ist, diesen Prozess genauer zu verstehen. Insbesondere werden wir zeigen, dass für eine Geodäte endlicher Länge nur endlich viele verschiedene Gruppenelemente erforderlich sind, deren Anzahl wir dann minimieren werden. Soweit diese Gruppenelemente durch diese geometrischen Bedingungen noch nicht eindeutig bestimmt sind, sollen Auswahlkriterien aufgestellt werden, die sich als eine Verallgemeinerung der Auswahl beim klassischen Kettenbruch ergeben.

Wir beginnen mit der genauen Untersuchung der Stabilisatoruntergruppen, deren Verständnis im Weiteren wesentlich ist.

Wie schon im letzten Kapitel wird auch hier die Notation

$$\begin{aligned} k &= \mathbb{F}_q, & A &= k[t], & K &= k(t), & \widehat{K} &= k\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right), & \mathfrak{o} &= k\left[\left[\frac{1}{t}\right]\right], \\ \mathrm{Stab}(x_1, \dots, x_n; A) &= \{g \in \mathrm{GL}_n(A) \mid gx_i = x_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}, \\ \mathrm{Stab}(x_1, \dots, x_n; \widehat{K}) &= \{g \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K}) \mid gx_i = x_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

verwendet. Weiterhin bezeichnen wir mit  $\mathrm{GL}_n(\widehat{K})^0$  die Untergruppe aller Matrizen von  $\mathrm{GL}_n(\widehat{K})$ , deren Determinanten Betrag 1 haben. Mit  $\mathrm{Stab}(x_1, \dots, x_n; \widehat{K})^0$  wird der Durchschnitt von  $\mathrm{Stab}(x_1, \dots, x_n; \widehat{K})$  und  $\mathrm{GL}_n(\widehat{K})^0$  bezeichnet.

### 4.1 Stabilisatorgruppen

Für ein Gitter  $\Gamma = t^{k_1}\mathfrak{o}e_1 \oplus \dots \oplus t^{k_n}\mathfrak{o}e_n$  des Standardapartments wiederholen wir das folgende Resultat:

$$\mathrm{Stab}(\Gamma; A) = \{(m_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(A) \mid \deg(m_{i,j}) \leq k_i - k_j\},$$

hierbei ist  $\deg$  der durch  $\deg(t) = 1$  normierte Grad.

Liegt  $\Gamma$  im Inneren des Fundamentalbereichs, so bilden die  $k_i$  eine absteigende Folge, und der Stabilisator ist eine Gruppe aus Dreiecksmatrizen.

Liegt  $\Gamma$  auf dem Rand des Fundamentalbereichs, so sind einige  $k_i$  gleich, und es gibt im Stabilisator auch die Permutationsmatrizen zu  $i$  und  $j$ , falls  $k_i = k_j$ .

**Satz.**

*Die Stabilisatoren der Gitterklassen im Fundamentalbereich werden von ihren Permutationsmatrizen und von ihren Dreiecksmatrizen erzeugt.*

**Beweis.**

Nach dem oben zitierten Satz bestehen die Stabilisatoren im Inneren des Fundamentalbereichs nur aus Dreiecksmatrizen. Am Rand des Fundamentalbereichs haben die Matrizen eine Blockdreiecksstruktur. Genauer, auf der Hauptdiagonale steht für jeden  $k$ -fach auftretenden Exponenten ein  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_q)$ -Block.

Eine solche Matrix  $M$  können wir in ein Produkt aus einer Blockdiagonalmatrix  $D$  und einer Dreiecksmatrix  $R$  mit Einheitsmatrizen auf der Diagonale zerlegen, wobei die Diagonalblöcke von  $D$  die von  $M$  sind. Damit ist  $D$  ein Element des Stabilisators. Aus der Gruppeneigenschaft folgt dann, dass auch  $R$  im Stabilisator ist.

Aus der Bruhat-Tits-Zerlegung der Diagonalblöcke von  $D$  folgt, dass  $D$  und damit auch  $M$  ein Produkt von Dreiecksmatrizen und Permutationsmatrizen ist, die alle im Stabilisator enthalten sind.  $\square$

Im Weiteren betrachten wir auch Stabilisatoren in  $\mathrm{GL}_n(\widehat{K})^0$ . Es gilt der

**Satz.**

*Sei  $\Gamma = t^{k_1} \circ e_1 \oplus \dots \oplus t^{k_n} \circ e_n$  ein beliebiges Gitter des Standardapartments, dann gilt:*

$$\mathrm{Stab}(\Gamma; \widehat{K})^0 = \left\{ (m_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K})^0 \mid \deg(m_{i,j}) \leq k_i - k_j \right\},$$

wobei der von  $A$  bekannte Gradbegriff durch  $\deg(\sum_{i=-\infty}^l x_i t^i) = l$  für  $x_l \neq 0$  auf  $\widehat{K}$  fortgesetzt wird.

**Beweis.**

Die Methode zur Bestimmung von  $\mathrm{Stab}(\Gamma; \mathrm{GL}_n(A))$  überträgt sich vollständig.  $\square$

**Bemerkung.**

Ist  $x$  ein Punkt, der im Inneren eines Simplexes  $\Sigma$  liegt, so können wir seinen Stabilisator auch als den Durchschnitt der Stabilisatoren der Ecken von  $\Sigma$  erhalten. Dieser Stabilisator hat immer noch die gleiche Form wie der Stabilisator eines Eckpunkts, jedoch sind die  $k_i$  des obigen Satzes keine ganzen Zahlen. Dieses kann in der Sprache der Normenklassen präziser ausgedrückt werden:

Ist  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis, so kann jede Norm  $\gamma$ , deren Klasse zum Standardapartment gehört, in der Form

$$\gamma(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \sup\{|\lambda_1|q^{-k_1}, \dots, |\lambda_n|q^{-k_n}\}$$

geschrieben werden. Falls alle  $k_i$  ganzzahlig sind, so entspricht der Normenklasse von  $\gamma$  die Klasse des Gitters  $t^{k_1} \circ e_1 \oplus \dots \oplus t^{k_n} \circ e_n$ .

Es gilt

$$\mathrm{Stab}(\gamma; \widehat{K})^0 = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K})^0 \mid \deg(m_{i,j}) \leq k_i - k_j \right\}.$$

**Bemerkung.**

Betrachten wir zwei Gitter  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  im Standardapartment, so können wir eine geometrische Bedingung suchen, welche zur Inklusion  $\mathrm{Stab}(\Gamma_1; A) \subset \mathrm{Stab}(\Gamma_2; A)$  äquivalent ist.

Diese Frage wird durch die Sektoren des Standardapartments beantwortet: Alle Spiegelebenen der Weyl-Gruppe, die durch das Standardgitter verlaufen, zerlegen das Standardapartment in endlich viele offene Kegel, die auch als Sektoren bezeichnet werden. Die Inklusionsbeziehung  $\text{Stab}(\Gamma_1; A) \subset \text{Stab}(\Gamma_2; A)$  ist dann dazu äquivalent, dass  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  im gleichen Kegel liegen und dass  $\Gamma_2$  auch noch in diesem Kegel liegt, wenn der Grundpunkt des Kegels auf  $\Gamma_1$  verschoben wird.

Ein interessanter Spezialfall ist der folgende: Liegen die Punkte  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  nicht nur im gleichen Sektor, sondern sogar auf einem vom Standardgitter ausgehenden Strahl, so gilt  $\text{Stab}(\Gamma_1; A) \subset \text{Stab}(\Gamma_2; A)$  genau dann, wenn der Simplex, der  $\Gamma_1$  enthält, höchstens soweit vom Standardgitter entfernt ist wie der Simplex, der  $\Gamma_2$  enthält.

Im Fall eines eindimensionalen Apartments ist die zweite Voraussetzung automatisch erfüllt, wenn  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  im gleichen Sektor liegen.

**Satz.** (3-Punkte-Lemma)

*Es seien  $x_1, x_2$  und  $x_3$  drei Punkte des Standardapartments mit:*

1.  $x_1, x_2, x_3$  liegen auf einer Geodäte.
2.  $x_2$  liegt zwischen  $x_1$  und  $x_3$ .
3.  $x_2$  liegt auf dem Rand des Simplexes, in dessen Inneren  $x_3$  liegt.

*Dann gilt:*

$$\text{Stab}(x_1, x_2; K)^0 x_3 \cap \text{GL}_n(A) x_3 = \text{Stab}(x_1, x_2; A) x_3,$$

wobei  $\text{Stab}(x_1, x_2; K)^0$  den Durchschnitt der Stabilisatoren von  $x_1$  und  $x_2$  bezeichnet.  $\text{Stab}(x_1, x_2; A)$  bezeichnet die entsprechende Stabilisatoruntergruppe in  $\text{GL}_n(A)$ .

**Beweis.**

Die Inklusion „ $\supset$ “ ist offensichtlich. Wir beweisen daher nur die andere Inklusionsrichtung.

Hierzu sei  $\Sigma_3$  der Simplex, in dessen Inneren  $x_3$  liegt.  $\Sigma_2$  sei der Simplex, der  $x_2$  enthält. Dann ist  $\Sigma_2$  eine Seite von  $\Sigma_3$ .

Die Aussagen über  $x_3$  sind äquivalent zu Aussagen über  $\Sigma_3$ , weil der Stabilisator von  $\Sigma_3$  gleich dem Stabilisator eines beliebigen inneren Punktes von  $\Sigma_3$  ist. Damit ist die Behauptung zu

$$\text{Stab}(x_1, x_2; K)^0 \Sigma_3 \cap \text{Stab}(\Sigma_2; A) \Sigma_3 \subset \text{Stab}(x_1, x_2; A) \Sigma_3$$

äquivalent, weil  $x_2$  ein Punkt in  $\Sigma_2$  und  $\Sigma_2$  eine Seite von  $\Sigma_3$  ist.

Identifizieren wir die Elemente einer Bahn mit den Nebenklassen der Stabilisatorgruppe, so ist

$$\begin{aligned} & \text{Stab}(x_1, x_2; K)^0 \text{Stab}(\Sigma_3; K)^0 \cap \text{Stab}(\Sigma_2; A) \text{Stab}(\Sigma_3; K)^0 \\ & \subset \text{Stab}(x_1, x_2; A) \text{Stab}(\Sigma_3; K)^0 \end{aligned}$$

zu zeigen. Da beide Seiten Vereinigungen von Nebenklassen von  $\text{Stab}(\Sigma_3; K)^0$  sind, genügt es, zu zeigen, dass von jeder Nebenklasse auf der linken Seite mindestens ein Repräsentant auch rechts steht. Damit bleibt

$$\text{Stab}(x_1, x_2; K)^0 \text{Stab}(\Sigma_3; K)^0 \cap \text{Stab}(\Sigma_2; A) \subset \text{Stab}(x_1, x_2; A) \text{Stab}(\Sigma_3; K)^0$$

zu zeigen.

Da nun alle auftretenden Gruppen im Stabilisator von  $\Sigma_2$  enthalten sind, und  $\Sigma_2$  eine Seite von  $\Sigma_3$  ist, kann der restliche Beweis auf dem Link von  $\Sigma_2$  geführt werden.

Die Projektion (der Gruppen und der Geometrie) auf den Link wird im Weiteren mit  $\pi$  bezeichnet.

Genauer: Sei  $\Gamma$  eine Ecke von  $\Sigma_2$ , dann läuft alles im sphärischen Gebäude  $\text{lk}(\Gamma)$  ab. Die Ecken der angrenzenden Simplizes können mit Unterräumen von  $\Gamma/t^{-1}\Gamma$  identifiziert werden, und es genügt für die Bahnaussage über  $\Sigma_3$  die Projektion in  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  zu verstehen. Da aber alles sogar im Stabilisator bzw. Link von  $\Sigma_2$  abläuft, reicht es aus, die Projektion in die Levi-Untergruppe  $M$  der parabolischen Gruppe  $\text{Stab}(\pi_\Gamma(\Sigma_2))$  zu verstehen.

Die Levi-Untergruppe besteht aus Blockdiagonalmatrizen, in der sich die Bilder aller obigen Untergruppen durch ein zusätzliches Nullenmuster ergeben. Speziell ist das Bild unter der Projektion in die Levi-Untergruppe aller obigen Stabilisatorgruppen gleich ihrem Durchschnitt mit der Levi-Untergruppe.

Wir wenden uns nun den Diagonalblöcken  $D_i$  in der Levi-Untergruppe zu. Die Levi-Untergruppe besteht aus Blockdiagonalmatrizen, und sie ist ein direktes Produkt dieser Diagonalblöcke. Die gleiche Produktzerlegung besteht auch für die obigen Stabilisatorgruppen, das heißt der Durchschnitt einer der Stabilisatorgruppen  $\text{Stab}(\Sigma_j)$  mit der Untergruppe aller Matrizen, die sich nur im  $i$ -ten Diagonalblock  $D_i$  der Levi-Untergruppe von einer Einheitsmatrix unterscheiden, ist gleich der Projektion der Stabilisatorgruppe auf diese Untergruppe. Daher genügt es, die obige Behauptung in der Form

$$\begin{aligned} & \text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K) \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K) \cap \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_2; A) \\ & \subset \text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; A) \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K) \end{aligned}$$

zu zeigen. Dabei ist  $\text{Stab}_{D_i}(\dots)$  eine abkürzende Bezeichnung für die Projektion  $\pi_{D_i}(\text{Stab}(\dots))$ .

In einem Diagonalblock  $D_i$  ist  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K)$  eine parabolische Untergruppe und  $\text{Stab}_{D_i}(x_2, x_3; K)$  ist genau die entgegengesetzte parabolische Untergruppe, d. h. die zweite Gruppe besteht genau aus den transponierten Matrizen der ersten Gruppe, weil  $x_2$  auf der Verbindungsstrecke zwischen  $x_1$  und  $x_3$  liegt.

Es ist also möglich die Basisvektoren so zu sortieren, dass  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K)$  aus oberen und  $\text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$  aus unteren Blockdreiecksmatrizen besteht. Wir können die Elemente aus  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K)$  in ein Produkt aus einer Blockdiagonalmatrix und einer Matrix aus dem unipotenten Radikal zerlegen. Dabei ist die Blockdiagonalmatrix auch in  $\text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$  enthalten, und wir können diesen Faktor nach rechts verschieben. Deshalb genügt es, in  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K) \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$  nur Produkte von Matrizen zu betrachten, deren erster Faktor als Diagonalblöcke nur Einheitsmatrizen hat.

Die verbliebene Restbehauptung kann in Blockmatrizenschreibweise direkt nachgerechnet werden, wobei die Anzahl der Blöcke mit  $b$  bezeichnet wird. Hierzu seien

$$R = \begin{pmatrix} I & r_{1,2} & \cdots & r_{1,b} \\ & I & & \vdots \\ & & \ddots & r_{b-1,b} \\ & & & I \end{pmatrix} \in \text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K)$$

und

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & & & & \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ l_{b,1} & \cdots & l_{b,b-1} & l_{b,b} & \end{pmatrix} \in \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$$

mit  $R \cdot L \in \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_2, A)$  beliebige Elemente. Wir haben zu zeigen, dass  $R \cdot L$  in  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; A) \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$  enthalten ist.

Zuerst betrachten wir den untersten Diagonalblock des Blockmatrizenprodukts  $R \cdot L$ . Dieser Diagonalblock ist genau der Diagonalblock  $l_{b,b}$  von  $L$ , der auch mit dem Nullenmuster von  $\text{Stab}_{D_i}(x_2; A)$  verträglich ist. Daher ist die von diesem Diagonalblock gebildete Matrix

$$T_1 := \begin{pmatrix} I & & & \\ & \ddots & & \\ & & I & \\ & & & l_{b,b} \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse  $T_1^{-1}$  in  $\text{Stab}_{D_i}(x_2; A)$  und in  $\text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$  enthalten. Es genügt daher,  $RLT_1^{-1} \in \text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; A) \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$  zu zeigen.

Die Matrix  $LT_1^{-1}$  wird mit  $L^{(1)}$  bezeichnet. Sie hat im Wesentlichen die gleiche Struktur wie die Matrix  $L$ , jedoch ist ihr unterster Diagonalblock eine Einheitsmatrix.

Nun betrachten wir die letzte Spalte des Produkts  $RL^{(1)}$ . Die letzte Spalte des Produkts besteht genau aus der letzten Spalte von  $R$ , deren Nullenstruktur mit der Nullenstruktur von  $\text{Stab}_{D_i}(x_2; A)$  verträglich ist. Daher sind

$$R_1 := \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & -r_{1,b} \\ & I & \cdots & 0 & -r_{2,b} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & I & -r_{b-1,b} \\ & & & & I \end{pmatrix}$$

und  $R_1^{-1}$  Matrizen aus

$$\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K) \cap \text{Stab}_{D_i}(x_2; A) = \text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; A).$$

Damit reicht es zu zeigen, dass  $R_1RL^{(1)}$  in  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; A) \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K)$  enthalten ist.

Das Produkt  $R^{(1)} := R_1R$  liegt nach Konstruktion in  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K)$ . Weiterhin ist  $R^{(1)}$  eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalblöcke nur Einheitsmatrizen sind. Die Außerdiagonalblöcke der letzten Spalte sind dabei alle null.

Jetzt können wir die gleiche Argumentation auf die vorletzte (Block-) Spalte des Produkts  $R^{(1)}L^{(1)}$  anwenden. Zunächst stellen wir fest, dass der Diagonalblock dieser Spalte genau  $l_{b-1,b-1}$  ist, und man kann diesen, genau wie zuvor  $l_{b,b}$  mit einer Matrix  $T_2$  zu einer Einheitsmatrix normieren. Wir erhalten so  $L^{(2)} := L^{(1)}T_2^{-1}$ .

Dann erhalten wir, dass die vorletzte Spalte des Produkts  $R^{(1)}L^{(2)}$  die vorletzte Spalte der Matrix  $R^{(1)}$  ist, wenn wir vom untersten Block dieser Spalte absehen. Folglich ist das Nullenmuster der vorletzten Spalte von  $R^{(1)}$  mit dem von  $\text{Stab}_{D_i}(x_2, A)$  verträglich. Daher können wir auch die vorletzte Spalte von  $R$  auf die gleiche Weise multiplikativ abspalten wie zuvor die letzte Spalte. Dabei liegt der entstehende Faktor  $R_2$  in  $\text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; K) \cap \text{Stab}_{D_i}(x_2, A)$ . Dies reduziert die Behauptung auf den Fall, dass die letzten beiden (Block-) Spalten von  $R$  die einer großen Einheitsmatrix sind.

Eine induktive Fortsetzung dieses Arguments führt dazu, dass es reicht, den Fall  $R = I$  zu betrachten. In diesem Fall lautet die Behauptung

$$\text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K) \cap \text{Stab}_{D_i}(x_2; A) \subset \text{Stab}_{D_i}(x_1, x_2; A) \text{Stab}_{D_i}(\Sigma_3; K),$$

welches eine wahre Aussage ist.  $\square$

## 4.2 Die Operation von $GL_n(A)$ auf Geodäten

### Definition.

Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Geodäten im affinen Gebäude und  $\varphi : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$  eine Isometrie. Falls es ein Element  $g \in GL_n(A)$  so gibt, dass  $\varphi(\gamma_1(t)) = g\gamma_1(t)$  für alle  $t$  gilt, so sagen wir, dass sich  $\gamma_1$  mit einem Element aus  $GL_n(A)$  auf  $\gamma_2$  abbilden lässt. Falls jedoch nur

$$\forall t : \exists g_t \in GL_n(A) : \varphi(\gamma_1(t)) = g_t\gamma_1(t)$$

gilt, so sagen wir, dass sich  $\gamma_1$  punktweise mit Elementen aus  $GL_n(A)$  auf  $\gamma_2$  abbilden lässt.

Unser nächstes Ziel ist es, den Zusammenhang zwischen diesen beiden Begriffen zu untersuchen. Falls das Gebäude der Serresche Baum ist, also falls  $n = 2$  ist, so gilt der folgende

### Satz.

*Sei  $\gamma$  eine Geodäte im Serreschen Baum. Falls  $\gamma$  mit Elementen aus  $GL_2(A)$  punktweise auf eine Geodäte im Standardapartment abgebildet werden kann, so gibt es ein Element in  $GL_2(A)$ , welches die gesamte Geodäte auf die Geodäte im Standardapartment abbildet. D. h. die einzige Obstruktion, dass eine Geodäte nicht als Ganzes in das Standardapartment abgebildet werden kann, ist, dass bei keiner punktweisen Abbildung eine Geodäte entsteht.*

### Beweis.

Für den ersten Beweisschritt unterscheiden wir, ob ein Punkt der Geodäte  $\gamma$  auf das Standardgitter abgebildet wird oder nicht.

Falls ein Punkt auf das Standardgitter abgebildet wird, so können wir zunächst diesen Punkt mit einem Gruppenelement  $g_0 \in GL_2(A)$  auf das Standardgitter abbilden. Dieses Gruppenelement  $g_0$  wenden wir auf die Geodäte  $\gamma$  an und erhalten eine Geodäte  $\gamma_1$ , die durch das Standardgitter verläuft. Die beiden Simplizes, die an das Standardgitter angrenzen und in denen  $\gamma_1$  verläuft, werden mit  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  bezeichnet. Falls das Standardgitter ein Endpunkt von  $\gamma_1$  ist, so erhalten wir an dieser Stelle nur einen Simplex, was den Beweis jedoch nur vereinfacht.

Da die beiden 1-Simplizes  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  im Link des Standardgitters liegen, rechnen wir in diesem weiter:

Der Stabilisator des Standardgitters in  $GL_2(A)$  ist  $GL_2(\mathbb{F}_q)$ . Dieser operiert transitiv auf der Menge der Paare verschiedener eindimensionaler Unterräume von  $\mathbb{F}_q^2$ , und daher auch transitiv auf Paaren verschiedener Punkte im Link des Standardgitters. Daher kann in  $GL_2(A)$  ein Element  $g_1$  gefunden werden, welches die beiden Simplizes  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  in der gewünschten Weise in das Standardapartment abbildet. Wir wenden  $g_1$  auf  $\gamma_1$  an und erhalten die Geodäte  $\gamma_2$ .

Falls kein Punkt der Geodäte  $\gamma$  auf das Standardgitter abgebildet wird, so beginnen wir mit einem Punkt der Geodäte, dessen Bild vom Standardgitter minimalen Abstand hat. Dieser Punkt kann mit einem Element  $g_0 \in GL_2(A)$  in das Standardapartment abgebildet werden. Wir wenden  $g_0$  auf die gesamte Geodäte an und erhalten  $\gamma_2$ .

In jedem der beiden Fälle wurde  $\gamma$  auf eine Geodäte  $\gamma_2$  abgebildet, die zumindest teilweise im Standardapartment verläuft.

Nun wird angenommen, dass die Geodäte nicht vollständig im Standardapartment verläuft. Dann gibt es einen Punkt in dem die Geodäte  $\gamma_2$  aus dem Standardapartment ausweigt. Wir bezeichnen ihn mit  $x$ . Nach Konstruktion von  $\gamma_2$  ist  $x$  nicht das Standardgitter.  $x$  liegt also im Inneren eines Sektors  $F$  des Standardapartments, wobei dieser Sektor ein exakter Fundamentalbereich für die Operation von  $GL_2(A)$  ist. Sei  $\Sigma$  der an  $x$  angrenzende Simplex, in dem  $\gamma_2$  verläuft, nachdem es das

Standardapartment in  $x$  verlassen hat.  $\Sigma$  kann mit den Elementen aus  $GL_2(A)$  auf genau einen Simplex in  $F$  abgebildet werden. Da nach Voraussetzung  $\gamma_2$  punktweise auf eine Geodäte im Standardapartment abgebildet werden kann, muss  $\Sigma$  auf den Simplex  $\Sigma'$  abgebildet werden, der an  $x$  angrenzt und vom Standardgitter weiter entfernt ist.

Da  $F$  ein exakter Fundamentalbereich ist, ist diese Abbildung nur mit einem Element aus  $\text{Stab}(x; A)$  möglich. Da aber  $\text{Stab}(x; A) = \text{Stab}(\Sigma'; A)$  gilt, ist  $\Sigma = \Sigma'$ . Dieses ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass die Geodäte nicht vollständig im Standardapartment verläuft.  $\square$

**Bemerkung.**

Dieser Beweis benutzt die relativ übersichtlichen Inklusionsbeziehungen der Stabilisatorgruppen der Simplizes im Standardapartment des Gebäudes  $A_2$ . Der Übertrag dieses Satz auf alle affinen Gebäude vom Typ  $\widetilde{A}_n$  scheitert zunächst an der Tatsache, dass die Stabilisatorgruppen entlang einer Geodäte keinen Inklusionsbeziehungen mehr unterliegen müssen. Eine mögliche Zusatzvoraussetzung, mit der der obige Beweis übertragbar wird, ist, dass das Standardgitter auf einer geeigneten Verlängerung der Geodäte im Fundamentalbereich liegt.

Jedoch gilt immer noch der

**Satz.** (Geodäten-Lemma)

Sei  $\mathcal{X}$  das affine Gebäude  $\widetilde{A}_n$  aller Gitterklassen in  $\widehat{K}^n$ ,  $\gamma$  eine Geodäte in  $\mathcal{X}$  und  $\gamma'$  eine Geodäte im Standardapartment von  $\mathcal{X}$ . Falls sich  $\gamma$  mit Elementen aus  $GL_n(A)$  punktweise auf  $\gamma'$  abbilden lässt, so lässt sich  $\gamma$  auch mit einem Element aus  $GL_n(A)$  auf  $\gamma'$  abbilden.

**Beweis.**

Die simpliziale Struktur des Gebäudes liefert uns eine Zerlegung der Geodäte  $\gamma$ , indem wir die Durchschnitte von  $\gamma$  mit den Simplizes des Gebäudes betrachten. Dabei wird  $\gamma$  lokal endlich in Punkte und in offene Teile zerlegt.

Wir betrachten nun einen Punkt  $x \in \gamma$ , der in einem offenen Teil liegt. Dieser Punkt  $x$  kann mit Elementen aus  $GL_n(A)$  auf endlich viele verschiedene Punkte im Standardapartment abgebildet werden. Diese Punkte entsprechen  $1 : 1$  den Simplizes, auf die der Simplex  $\Sigma$ , in dem  $x$  liegt, abgebildet werden kann. Nach Voraussetzung werden alle Punkte von  $\gamma \cap \Sigma$  mit  $\varphi$  in die Teile der  $GL_n(A)$ -Bahn von  $\Sigma$  abgebildet, die im Standardapartment liegen. Aus Stetigkeitsgründen liegt die Bahn von  $\gamma \cap \Sigma$  dann in einem Simplex  $\Sigma'$ . Da  $GL_n(A)$  höchstens eine Abbildung  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  induziert, ist das Bild von  $\gamma \cap \Sigma$  bereits durch  $\varphi(x)$  eindeutig bestimmt. Damit ist gezeigt, dass  $\varphi|_{\Sigma}$  eine Isometrie ist. Da jedoch  $\gamma$  und  $\varphi(\gamma)$  Geodäten sind, ist sogar  $\varphi$  eine Isometrie.

Weiterhin haben wir gezeigt, dass es zu jedem Simplex  $\Sigma$  von  $\mathcal{X}$  ein Element  $g_{\Sigma}$  mit

$$\forall y \in \gamma \cap \Sigma : \varphi(y) = g_{\Sigma}(y)$$

gibt, wobei die letzte Aussage aus Stetigkeitsgründen auch für  $\overline{\Sigma}$  statt nur für  $\Sigma$  richtig ist.

Mit diesen Vorbereitungen kann die Behauptung für jeden geodätischen Strahl und jede Geodäte endlicher Länge bewiesen werden. Seien hierzu  $x_1, x_2, x_3$  drei Punkte auf  $\gamma$  mit der Eigenschaft, dass  $x_2$  zwischen  $x_1$  und  $x_3$  liegt. Weiterhin sei  $x_1$  ein Endpunkt von  $\Gamma$  und  $x_2$  der Punkt maximalen Abstandes von  $x_1$  mit der Eigenschaft

$$\exists g \in GL_n(A) : \forall x \in [x_1, x_2] : \varphi(x) = gx.$$

Darüber hinaus ist der Abstand von  $x_2$  und  $x_3$  als klein vorausgesetzt. Dieses soll heißen, dass  $x_2$  im Abschluss des Simplex  $\Sigma_3$  liegt, wobei  $\Sigma_3$  der Simplex ist, in dessen Inneren  $x_3$  liegt.  $x_2$  liegt dann auf dem Rand von  $\Sigma_3$ , da sonst nach den obigen Überlegungen auch  $\varphi(x_3) = gx_3$  gelten müsste.

Wir wenden  $g$  auf die gesamte Geodäte  $\gamma$  an, und erhalten eine Geodäte, die von  $y_1 := gx_1$  bis  $y_2 := gx_2$  im Standardapartment verläuft und dann aus dem Standardapartment ausweicht, um durch  $y_3 := gx_3$  weiter zu verlaufen.

Nach Voraussetzung liegt  $y_2$  auf dem Rand von  $\Sigma' := g\Sigma$  und  $y_3$  im Inneren von  $\Sigma'$ . Nach den obigen Überlegungen gibt es daher ein Element  $g_1 \in \mathrm{GL}_n(A)$  mit der Eigenschaft  $g_1gx_2 = \varphi(x_2)$  und  $g_1gx_3 = \varphi(x_3)$ . Aus  $gx_2 = \varphi(x_2)$  folgt dann sofort, dass  $g_1 \in \mathrm{Stab}(x_2; A)$  gilt.

Da  $[gx_1, gx_3] = [y_1, y_3]$  und  $[\varphi(x_1), \varphi(x_3)]$  Geodäten gleicher Länge sind, gibt es ein Element  $h \in \mathrm{GL}_n(K)^0$  mit der Eigenschaft  $hgx_1 = \varphi(x_1)$ ,  $hgx_2 = \varphi(x_2)$  und  $hgx_3 = \varphi(x_3)$ , wobei dann automatisch  $h \in \mathrm{Stab}(x_1, x_2; K)^0$  gilt.

Wir erhalten damit die Situation

$$h^{-1}\varphi(x_3) = y_3 \in \mathrm{Stab}(y_2; A)y_3 \cap \mathrm{Stab}(y_1, y_2; K)^0y_3.$$

Nach dem oben bewiesenen 3-Punkte-Lemma folgt, dass ein  $h' \in \mathrm{Stab}(y_1, y_2; A)$  mit  $h'y_3 = hy_3$  existiert. Es folgt, dass  $h'\gamma$  eine Geodäte ist, auf der  $\varphi(x_1)$  und  $\varphi(x_3)$  liegen. Aus der Eindeutigkeit von Geodäten folgt dann

$$\forall t \in [x_1, x_3] : hgt = \varphi(t).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität der Länge der Strecke  $[x_1, x_2]$ .

Um nun die Behauptung auch für in beide Richtungen unendliche Geodäten zu beweisen, wählen wir einen Punkt  $x_1$  auf  $\gamma$  beliebig. Wir wissen, dass es dann ein  $g \in \mathrm{GL}_n(A)$  mit  $gx_1 = \varphi(x_1)$  gibt. Wenden wir  $g$  auf  $\gamma$  an, so erhalten wir, dass ohne Einschränkung vorausgesetzt werden kann, dass  $\varphi$  auf mindestens einem Punkt von  $\gamma$  die Identität ist.

Damit ist nur noch zu prüfen, ob es ein Element  $h \in \mathrm{Stab}(x_1; A)$  mit  $hx = \varphi(x)$  für alle  $x$  gibt. Wir wissen, dass es zu jedem geodätischen Streckenstück von  $\gamma$ , das  $x_1$  enthält, ein solches  $h$  gibt. Unter der Annahme, dass es das gesuchte  $h$  nicht gibt, können mit dem oben Bewiesenen sukzessive unendlich viele verschiedene Elemente in  $\mathrm{Stab}(x_1, A)$  konstruiert werden, die auf immer größeren Stücken der Geodäte  $hx = \varphi(x)$  erfüllen. Dieses ist ein Widerspruch zur Endlichkeit der Stabilisatorgruppe.  $\square$

### 4.3 Die Kettenbruchentwicklung

Es sei  $\mathcal{X}$  das affine Gebäude aller Klassen vollständiger Gitter in  $\widehat{K}^n$ . Weiterhin sei  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$  eine Geodäte in  $\mathcal{X}$ . Der im zweiten Kapitel ausgezeichnete Fundamentalbereich von  $\mathrm{GL}_n(A)$  in  $\mathcal{X}$  wird wieder mit  $F$  bezeichnet.

Um im Weiteren eine Eindeutigkeit zu erzwingen, fixieren wir eine Totalordnung  $\prec$  auf  $\mathrm{GL}_n(A)$ .

#### Definition.

Der *endliche, verallgemeinerte Kettenbruch* von  $\gamma$  ist eine Folge  $b_i \in \mathrm{GL}_n(A)$  mit  $i = 0, \dots, k$ , für die gilt:

- Es gibt eine Unterteilung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = T$ .
- Jedes Teilstück  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  wird von  $B_i := b_i \circ \dots \circ b_0$  in den Fundamentalbereich  $F$  abgebildet.
- Die Zerlegung  $t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1}$  ist die grösste dieser Art. Das heißt, es gibt kein Element in  $\mathrm{GL}_n(A)$ , welches  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}+\epsilon]}$  oder  $\gamma|_{[t_{i+1}-\epsilon, t_{i+2}]}$  für beliebiges  $\epsilon > 0$  und  $i = 0, \dots, k-1$  in den Fundamentalbereich  $F$  abbildet.

- Falls  $\gamma(t_{i+1})$  auf den Rand des Fundamentalbereichs abgebildet wird, wird ein maximaler Abschnitt  $\gamma|_{[t_{i+1}, t_{i+1}+\delta]}$  von  $B_i$  in das Standardapartment abgebildet.
- Jedes  $b_i$  ist das bezüglich  $\prec$  kleinste Element in  $GL_n(A)$ , welches alle oben genannten Eigenschaften erfüllt.

**Bemerkung.**

Ist  $\gamma$  ein geodätischer Strahl, so liefert das obige Konzept eine, eventuell unendlich lange, Kettenbruchentwicklung. Ist  $\gamma$  eine in beide Richtungen unendliche Geodäte mit ausgezeichnetem Grundpunkt, so erhält man eine, eventuell in beide Richtungen unendliche, Kettenbruchentwicklung.

**Bemerkung.**

Die letzte der obigen Bedingungen erzwingt die Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung. Dabei wird die Auswahl nur innerhalb einer endlichen Menge getroffen, da die verschiedenen möglichen  $b_i$  in der gleichen Nebenklasse einer Stabilisatoruntergruppe liegen. Nach den Rechnungen im letzten Kapitel sind jedoch alle Stabilisatoruntergruppen (und damit auch ihre Nebenklassen) endlich.

Um im Fall  $n = 2$  den klassischen Kettenbruch zu erhalten, ist die Auswahl der Gruppenelemente wie folgt einzuschränken: Es sind neben oberen Dreiecksmatrizen, die in der Hauptdiagonale nur Einsen haben, noch Permutationsmatrizen zulässig. Dieses kann selbstverständlich auch in der Sprache der Relationen formuliert werden, macht die Sache jedoch an dieser Stelle nicht übersichtlicher.

Die sphärische Kompaktifizierung  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}_\infty$  des affinen Gebäudes  $\mathcal{X}$  ist gerade so konstruiert, dass es eine Bijektion zwischen den Punkten aus  $\mathcal{X}_\infty$  und der Menge aller geodätischen Strahlen mit einem gemeinsamen, aber beliebigen Grundpunkt gibt. Daher können wir das obige Konzept auch verwenden, um die Punkte aus  $\mathcal{X}_\infty$  in einen Kettenbruch zu entwickeln. Dieses führt zur folgenden

**Definition.**

Sei  $\text{ff} \in \mathcal{X}_\infty$  ein Randpunkt. Weiterhin sei  $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{X}$  ein geodätischer Strahl in  $\mathcal{X}$ , der das Standardgitter als Grundpunkt hat, und dessen unendlich ferner Punkt  $\text{ff}$  ist. Die *Kettenbruchentwicklung* von  $\text{ff}$  ist die Kettenbruchentwicklung der Geodäte  $\gamma$ .

## 4.4 Rückgewinnung von Information

An dieser Stelle wollen wir untersuchen inwieweit sich Geodäten aus ihrer Kettenbruchentwicklung rekonstruieren lassen. Dieses Problem untersuchen wir zunächst im Fall eines Baums, der wie immer wesentlich einfacher ist.

Sei hierzu  $\mathcal{X}$  der Serresche Baum und  $\mathcal{X}_\infty \cong P^1(\widehat{K})$  der Rand der Kompaktifizierung. Weiterhin sei  $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{X}$  ein geodätischer Strahl, dessen Grundpunkt das Standardgitter ist. Wir bezeichnen mit  $b_0, b_1, \dots \in GL_2(A)$  die Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$ .

Wir wollen nun zeigen, wie  $\gamma$  mit geometrischen Argumenten aus der Kettenbruchentwicklung  $b_0, b_1, \dots$  rekonstruiert werden kann.

Zur Vereinfachung werden die 0-Simplizes im ausgezeichneten Fundamentalbereich  $F$  mit  $\Gamma_i := [e_1, t^{-i}e_2]$ ,  $i \in \mathbb{N}$  bezeichnet. Den unendlich fernen Punkt dieses Fundamentalbereichs in der sphärischen Kompaktifizierung bezeichnen wir mit  $\infty$ .

Ist  $b_0, b_1, \dots$  die Kettenbruchentwicklung zu  $\gamma$ , so bedeutet dies, dass es eine monoton wachsende Folge  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  gibt, sodass  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  von  $b_i \circ \dots \circ b_0$  in den Fundamentalbereich abgebildet wird. Weiterhin ist diese Zerlegung von  $\gamma$  die grösste Zerlegung dieser Art.

Wir bezeichnen mit  $\pi_F : \mathcal{X} \rightarrow F$  die Abbildung, die jedem Punkt im Gebäude seinen eindeutig bestimmten Vertreter im Fundamentalbereich  $F$  zuordnet. Es ist die Kurve  $\pi_F \circ \gamma$  zu verstehen.

**Satz.**

*Der Zerlegungspunkt  $\gamma(t_i)$  kann aus  $b_0, \dots, b_i$  rekonstruiert werden.*

**Beweis.**

Nach den Vorüberlegungen, insbesondere nach dem oben bewiesenen Geodäten-Lemma und der Inklusionsbeziehungen der Stabilisatorgruppen, ergibt sich das Folgende:

Das Bild der Geodäte  $\pi_F \circ \gamma$  ist eine stetige, stückweise geodätische Kurve in  $\gamma$ . Die größte stückweise geodätische Zerlegung von  $\gamma$  wird durch die Unterteilungspunkte  $t_i$  gegeben. Es gilt

$$\pi_F(\gamma(t_i)) = \begin{cases} \Gamma_0 & \text{falls } i \equiv 1 \pmod{2} \\ \Gamma_r & \text{falls } i \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

wobei  $r = \min\{j \mid b_j \in \text{Stab}(\Gamma_j)\}$  ist, also  $\Gamma_r$  der einzige Randpunkt des von  $b_i$  stabilisierten Bereichs in  $F$  ist. Der Zerlegungspunkt  $\gamma(t_i)$  kann nun aus der Gleichung  $\pi_F(\gamma(t_i)) = (b_i \circ \dots \circ b_0)(\gamma(t_i))$  durch Invertierung aller  $b_j$  berechnet werden.  $\square$

**Bemerkung.**

Der letzte Satz ermöglicht es, die gesamte Geodäte  $\gamma$  aus ihrer Kettenbruchentwicklung zu rekonstruieren. Hierzu ist lediglich die konvexe Hülle der Zerlegungspunkte  $\gamma(t_i)$  zu bilden. Ist der Kettenbruch unendlich lang, so ist diese konvexe Hülle die gesamte Geodäte. Ist der Kettenbruch jedoch nur endlich, so liefert diese Methode ein Anfangsstück von  $\gamma$ .

Falls der unendlich ferne Punkt von  $\gamma$  in  $\mathcal{X}_\infty$  rekonstruiert werden soll, so ist der Limes  $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(t_i)$  in  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}_\infty$  zu bilden. Auch dieses setzt voraus, dass die Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$  unendlich lang ist.

**Bemerkung.**

In der klassischen Theorie liefert ein anderes Prinzip den unendlich fernen Punkt von  $\gamma$  aus der Kettenbruchentwicklung  $b_0, b_1, \dots$  zurück. Bezeichnen wir den unendlich fernen Punkt des Fundamentalbereichs wieder mit  $\infty$ , so konvergiert die Folge  $\infty, b_0^{-1}\infty, b_1^{-1}b_0^{-1}\infty, \dots$  in  $\mathcal{X}_\infty$  gegen den unendlich fernen Punkt von  $\gamma$ , falls der Kettenbruch von  $\gamma$  unendlich ist. Ist die Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$  endlich, so ist das letzte Glied dieser Folge der unendlich ferne Punkt von  $\gamma$ .

**Der höherdimensionale Fall**

Im höherdimensionalen Fall gestaltet sich die Situation etwas schwieriger. Ist jedes Apartment ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum, so bilden die unendlich fernen Punkte des Fundamentalbereichs einen  $(n-1)$ -dimensionalen Simplex in  $\mathcal{X}_\infty$ . Der Versuch die klassische Methode auf einen solchen mehrdimensionalen Kettenbruch anzuwenden, führt daher zu einer Folge von  $(n-1)$ -Simplizes in  $\mathcal{X}_\infty$ . Es ist schwierig zu sagen, in welchem Sinn diese Folge gegen einen Punkt aus  $\mathcal{X}_\infty$  konvergiert.

Die andere Rekonstruktionsmethode benutzt die Tatsache, dass sich die Spur von  $\pi_F \circ \gamma$  im Fundamentalbereich leicht mit der Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$  in Verbindung bringen lässt. Genauer: Aus der Kettenbruchentwicklung lassen sich die Punkte  $\pi_F(\gamma(t_i))$  direkt ablesen. Die Zerlegungspunkte  $\gamma(t_i)$  ergeben sich dann aus der Kettenbruchentwicklung.

Im höherdimensionalen Fall ist es nicht möglich den Anfang der Spur von  $\pi_F \circ \gamma$  im Fundamentalbereich aus dem Anfang der Kettenbruchentwicklung exakt zu beschreiben. Jedoch kann die Situation durch die Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$  eingegrenzt werden.

$\pi_F \circ \gamma$  ist eine stetige Kurve und  $\pi_F \circ \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  ist ein geodätisches Streckenstück, weiterhin hat die Kurve  $\pi_F \circ \gamma$  an jedem Zerlegungspunkt  $t_i$  einen Knick. Der Knickpunkt  $\pi_F(\gamma(t_i))$  liegt auf dem Rand des von  $b_i$  stabilisierten Bereichs.

**Definition.**

Wir nennen  $\pi_F(\gamma)$  *chaotisch*, wenn die Abschätzung

$$d(\Gamma_0, \pi_F(\gamma(t))) \ll d(\Gamma_0, \gamma(t)) \text{ für } t \rightarrow \infty$$

erfüllt ist. Hierbei bezeichnet  $\Gamma_0$  wieder das Standardgitter.

**Bemerkung.**

Ist die Spur von  $\pi_F(\gamma(t))$  eine periodische Kurve, so ist  $d(\Gamma_0, \pi_F(\gamma(t)))$  beschränkt und die obige Abschätzung ist erfüllt.

Die Bezeichnung chaotisch rührt daher, dass  $\gamma$  sogar eine wesentlich schärfere Abschätzung erfüllt, falls  $\pi_F(\gamma(t))$  eine Brownsche Bewegung ist. Es besteht also Grund zu der Annahme, dass fast alle Geodäten chaotisch sind.

Mit den Sätzen aus 2.2.3 folgt leicht, dass die obige Abschätzung bei klassischen Kettenbrüchen fast immer erfüllt ist.

**Satz.**

Sei  $f \in \mathcal{X}_\infty$  ein Randpunkt und  $\gamma$  die zugehörige Geodäte und  $b_0, b_1, \dots$  die Kettenbruchentwicklung. Falls  $\pi_F(\gamma)$  chaotisch ist, so konvergiert die Folge

$$\Gamma_0, b_0^{-1}\Gamma_0, b_1^{-1}b_0^{-1}\Gamma_0, b_2^{-1}b_1^{-1}b_0^{-1}\Gamma_0 \dots$$

gegen den Randpunkt  $f$ .

**Beweis.**

Wir bezeichnen die Zerlegungsstellen von  $\gamma$  wieder mit  $t_i$ . Da  $\gamma$  eine Geodäte mit unendlich fernem Punkt  $f$  ist, gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(t_i) = f$ . Weiterhin gilt

$$d(b_i^{-1} \dots b_0^{-1}\Gamma_0, \gamma(t_i)) = d(\Gamma_0, b_0 \dots b_i \gamma(t_i)) = d(\Gamma_0, \pi_F(\gamma(t_i))) \ll d(\Gamma_0, \gamma(t_i)),$$

da der Kettenbruch von  $\gamma$  als chaotisch vorausgesetzt wird. D. h. die Folgen  $\gamma(t_i)$  und  $b_i^{-1} \dots b_0^{-1}\Gamma_0$  laufen nicht zu schnell auseinander und es folgt die behauptete Konvergenzaussage.  $\square$

## 4.5 Beispiele

Wird der Serresche Baum als eindimensionales Gebäude betrachtet, so ist die obige Definition so eingerichtet, dass die klassischen Kettenbrüche genau die verallgemeinerten Kettenbrüche sind.

Wir betrachten nun in ein paar Beispielen, wie verallgemeinerte Kettenbrüche in höherdimensionalen Gebäuden aussehen.

### 4.5.1 Ein trivialer Kettenbruch

Wir betrachten einen beliebigen Strahl  $\gamma$ , der als Ausgangspunkt das Standardgitter hat, und im Standardapartment enthalten ist. In der sphärischen Kompaktifizierung kann ein solcher Strahl gegen einen beliebigen Punkt des Standardapartments des zugehörigen sphärischen Gebäudes konvergieren. Im Fall des eindimensionalen Serreschen Baums besteht dieses Apartment aus genau 2 Punkten.

Um nun die Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$  anzugeben, genügt es zu wissen, in welchem Sektor des Standardapartments dieser Strahl liegt. Die Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$  besteht dann aus nur einem Element der sphärischen Weylgruppe, welches den gesamten Sektor, in dem  $\gamma$  liegt, auf den Fundamentalbereich abbildet.

Im Fall des Serreschen Baums entsteht hier eine Bijektion, weil es genau 2 solche Strahlen gibt und die sphärische Weylgruppe zweielementig ist.

Im höherdimensionalen Fall ist die sphärische Weylgruppe immer noch endlich, während es unendlich viele verschiedene Randpunkte gibt, gegen die der Strahl  $\gamma$  konvergieren kann. Liegt  $\gamma$  sogar auf einer Sektorengrenze, so ist die Kettenbruchentwicklung nicht einmal eindeutig.

Dieses Beispiel zeigt, dass sich die höherdimensionale Situation grundsätzlich vom klassischen Fall unterscheidet. Im klassischen Fall gibt es eine Bijektion zwischen „formalen Kettenbrüchen“ und „Randpunkten“.

### 4.5.2 Ein periodischer Kettenbruch

Die einfachste Möglichkeit einen nicht-trivialen Kettenbruch zu konstruieren, besteht darin, einen geschlossenen Polygonzug im Standardapartment vorzugeben, der von  $\pi_F(\gamma(\cdot))$  periodisch durchlaufen wird. Die zur Kettenbruchentwicklung gehörenden Gruppenelemente können dann ebenfalls periodisch vorgeben werden.

So entsteht ein periodischer Kettenbruch. Die genaue Ausführung des Beispiels wird diesen Sachverhalt verdeutlichen.

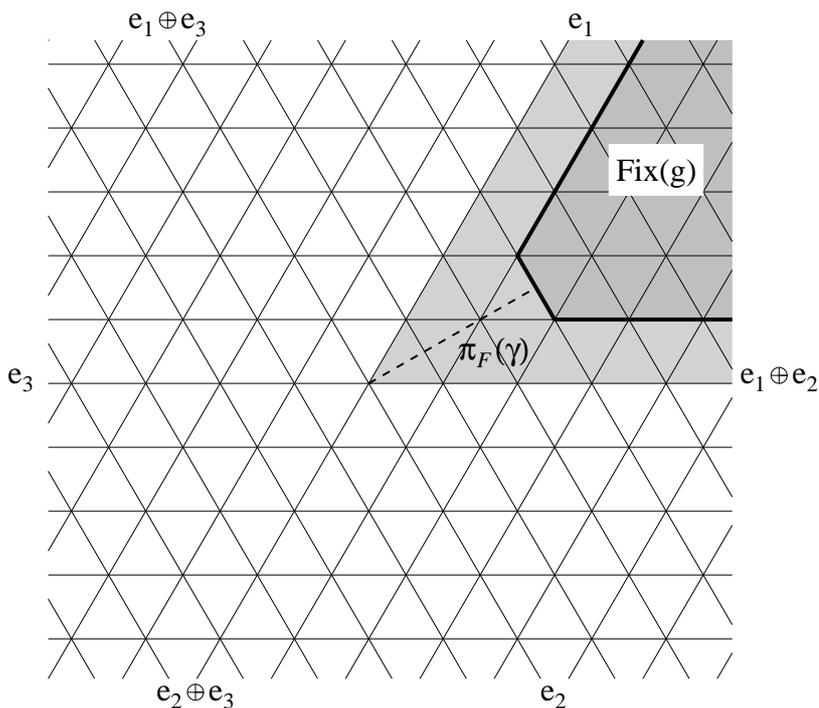


Abbildung 4.1: Spur einer Geodäte  $\gamma$  im Standardapartment

Die zur Kettenbruchentwicklung von  $\gamma$  gehörenden Gruppenelemente sind abwechselnd eine Spiegelung  $w$  in der sphärischen Weylgruppe und ein Element  $g \in GL(3, A)$  so, dass der Zerlegungspunkt von  $\gamma$  auf dem Rand des stabilisierten Bereiches dieser Elemente liegt.

In diesem Beispiel wurde

$$w = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & t & t^3 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

gewählt. D. h. es gilt  $g = b_0 = b_2 = b_4 \dots$  und  $w = b_1 = b_3 = b_5 \dots$ .

Um nun den Grenzwert dieses Kettenbruchs zu bestimmen, nutzen wir die obigen Überlegungen. Die Punkte  $\Gamma_0, b_0^{-1}\Gamma_0, b_1^{-1}b_0^{-1}\Gamma_0, \dots$  bilden eine Folge in  $\mathcal{X}$ , die in  $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}_\infty$  gegen den Grenzwert des Kettenbruchs konvergiert. Wir wählen aus dieser Folge die Teilfolge  $\Gamma_0, w^{-1}g^{-1}\Gamma_0, (w^{-1}g^{-1})^2\Gamma_0, (w^{-1}g^{-1})^3\Gamma_0, \dots$  aus. Zur Vereinfachung setzen wir  $h := w^{-1}g^{-1}$ . Um nun den Grenzwert des Kettenbruchs zu bestimmen müssen wir beliebige Potenzen der Matrix  $h$  verstehen. Die lineare Algebra liefert hierzu als Hilfsmittel die Theorie der Eigenwerte und der Eigenvektoren. Das charakteristische Polynom von  $h$  erweist sich über  $\mathbb{F}_q(t)$  als irreduzibel. Daher ist eine explizite Beschreibung der Nullstellen nur mit der aufwendigen Formel von Cardano möglich.

Der Grenzwert des Kettenbruchs ist eine Flaggenfunktion in  $\mathcal{X}_\infty$ . Ein Apartment, in dem der Grenzwert liegt, ist das Apartment, welches sich aus den drei eindimensionalen Eigenräumen von  $h$  ergibt. Die Werte der Flaggenfunktion ergeben sich aus den Beträgen der Eigenwerte von  $h$  zu  $0, \frac{1}{2}, 1$ .



# Anhang A

## Die Hermite-Normalform

### A.1 Allgemeine Hermite-Normalform

Wir betrachten die folgende Situation: Sei  $R$  ein Hauptidealring mit Quotientenkörper  $K$  und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum.

**Definition.**

Sei  $f_1, \dots, f_n$  eine Basis von  $V$ . Ein vollständiges Gitter in  $V$  ist ein  $R$ -Modul  $\Gamma$  mit der Eigenschaft, dass es zwei Elemente  $a, b \neq 0$  in  $K$  mit  $a \sum Rf_i \subset \Gamma \subset b \sum Rf_i$  gibt.

Diese Eigenschaft ist von der konkreten Wahl der Basis unabhängig. (Siehe [Kn], Abschnitt 13.2)

**Lemma.**

*Ein vollständiges Gitter ist ein freier Modul, dessen Rang die Dimension von  $V$  ist.*

**Beweis.**

Siehe: [Kn], Abschnitt 13.2. □

**Bemerkung.**

Elementarere formuliert besagt das Lemma, dass ein Gitter in  $V$  genau die Menge der  $R$ -Linearkombinationen einer  $K$ -Vektorraumbasis von  $V$  ist.

**Lemma.**

*Sei  $\Gamma$  ein vollständiges Gitter in  $V$  und  $U \subset V$  ein Unterraum. Dann ist  $\Gamma \cap U$  ein vollständiges Gitter in  $U$  und ein direkter Summand von  $\Gamma$ .*

**Beweis.**

Wir zeigen zunächst, dass  $U \cap \Gamma$  ein Gitter ist. Dazu wählen wir eine Basis  $f_1, \dots, f_l$  von  $U$  und ergänzen diese durch  $f_{l+1}, \dots, f_n$  zu einer Basis von  $V$ . Nach Definition gibt es dann  $a, b \neq 0$  in  $K$  mit  $a \sum_{i=1}^n Rf_i \subset \Gamma \subset b \sum_{i=1}^n Rf_i$ . Wir bilden den Durchschnitt mit  $U$  und erhalten:  $a \sum_{i=1}^l Rf_i \subset \Gamma \cap U \subset b \sum_{i=1}^l Rf_i$ . Damit ist gezeigt, dass  $\Gamma \cap U$  ein vollständiges Gitter in  $U$  ist.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\Gamma \cap U$  ein direkter Summand von  $\Gamma$  ist. Hierzu wenden wir den Elementarteilersatz an und erhalten eine Gitterbasis  $b_1, \dots, b_n$  von  $\Gamma$  und  $c_1, \dots, c_l \in R \setminus \{0\}$  so, dass  $c_1 b_1, \dots, c_l b_l$  eine Gitterbasis von  $\Gamma \cap U$  ist. Wir haben zu zeigen, dass die  $c_i$  Einheiten in  $R$  sind. Da  $c_i b_i$  in  $U$  enthalten ist, ist auch  $b_i$  in  $U$ , und es ist  $b_i$  in  $\Gamma$ . Folglich ist  $b_i$  in  $U \cap \Gamma$  enthalten. Daher lässt sich  $b_i$  als  $R$ -Linearkombination der  $c_j b_j$  schreiben. Da die  $b_j$  über  $K$  linear unabhängig sind, folgt, dass die  $c_i$  Einheiten in  $R$  sind. □

**Definition.**

Sei  $(0) \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_{n-1} \subsetneq U_n = V$  eine Flagge maximaler Länge in  $V$  und  $\Gamma \subset V$  ein Gitter. Die Hermite-Normalform von  $\Gamma$  bezüglich der Flagge  $U_i$  ist eine Folge von Vektoren  $b_i \in V$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit der Eigenschaft: Jedes  $b_i$  ist ein kleinstes Element bezüglich einer auf  $V$  gegebenen Totalordnung so, dass  $b_1, \dots, b_i$  eine Basis von  $\Gamma \cap U_i$  ist.

**Bemerkung.**

Die obigen Lemmata sichern die Existenz der Hermite-Normalform für ein beliebiges Gitter.

Die Normierung durch eine Totalordnung erscheint zunächst etwas ungewöhnlich. Wir werden weiter unten für die Spezialfälle  $R = \mathbb{Z}$  und  $R = \mathbb{F}_q((\frac{1}{t}))$  konkrete Auswahlvorschriften angeben. Die Normierung bewirkt, dass die Hermite-Normalform eindeutig wird.

Die Eindeutigkeit der Hermite-Normalform liefert sofort eine erste Anwendung: Zwei Gitter sind genau dann gleich, wenn ihre Hermite-Normalformen identisch sind.

**Bemerkung.**

Eine weitere Verallgemeinerung der Hermite-Normalform für endlich erzeugte Moduln über Dedekind-Ringen ist z. B. im ersten Kapitel von [Co2] ausgearbeitet.

## A.2 Die Hermite-Normalform eines $\mathbb{Z}$ -Gitters

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass  $\Gamma$  ein vollständiges  $\mathbb{Z}$ -Gitter im  $\mathbb{Q}^n$  ist. Das heißt:  $\Gamma$  ist der  $\mathbb{Z}$ -Untermodul, der von einer Vektorraumbasis des  $\mathbb{Q}^n$  erzeugt wird.

**Definition.**

Eine Gitterbasis  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}^n$  des Gitters  $\Gamma$  wird als Hermite-Normalform von  $\Gamma$  bezeichnet, wenn die Matrix  $B = [b_1, \dots, b_n]$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $B$  ist eine obere Dreiecksmatrix.
- Die Diagonalelemente sind positiv.
- Jedes Außerdiagonalelement  $b_{i,j}$  erfüllt  $0 \leq b_{i,j} < b_{i,i}$ .

**Bemerkung.**

Diese Definition der Hermite-Normalform stimmt mit der aus A.1 überein, wenn als Flagge die Standardflagge  $\langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \dots$  gewählt wird und die Ordnungsrelation so eingerichtet wird, dass sie Vektoren mit kleinen positiven Einträgen auswählt.

**Bemerkung.**

Um die Hermite-Normalform konstruktiv umzusetzen, sind zwei Aspekte zu diskutieren:

1. Wir benötigen die Darstellbarkeit der Elemente des Grundkörpers und die algorithmische Berechenbarkeit der Verknüpfungen des Grundkörpers.
2. Wir müssen einen konstruktiven Beweis des Elementarteilersatzes angeben.

Das erste Problem ist für den Grundkörper  $\mathbb{Q}$  leicht gelöst, für den Grundkörper  $\mathbb{R}$  würden an dieser Stelle große Schwierigkeiten entstehen.

Ein konstruktiver Beweis des Elementarteilersatzes reduziert sich auf die Frage, wie in einem durch mehrere Erzeuger gegebenen Hauptideal ein Element berechnet

werden kann, welches das Ideal alleine erzeugt, und wie dieses Element als Linearkombination der ursprünglichen Erzeuger dargestellt werden kann. Im Fall eines euklidischen Ringes ist dieses immer mit dem euklidischen Algorithmus möglich.

**Satz.**

Die Hermite-Normalform eines Gitters im  $\mathbb{Q}^n$  kann in endlich vielen Schritten berechnet werden.

**Beweis.**

Siehe [Co], Abschnitt 2.4.2, insbesondere Algorithmus 2.4.4, oder [Po], Kapitel 3, insbesondere Algorithmus 2.7.  $\square$

**Bemerkung.**

Bei praktischen Anwendungen zeigt sich, dass ein naiver Algorithmus, wie ihn der Beweis des Elementarteilersatzes nahelegt, schnell zu sehr großen Zwischenergebnissen führt (siehe [Co], S. 68) und dadurch bedingt langsam wird. Es besteht daher weiterer Verbesserungsbedarf.

Eine Idee hierzu ist die Folgende: Wir skalieren  $\Gamma$  so, dass  $\Gamma$  ein Untergitter von  $\mathbb{Z}^n$  ist. Dann besteht die Inklusionskette  $\mathbb{Z}^n \supset \Gamma \supset \det(\Gamma)\mathbb{Z}^n$ . Es genügt jetzt, eine Normalform von  $\Gamma/\det(\Gamma)\mathbb{Z}^n$  als Untermodul von  $\mathbb{Z}^n/\det(\Gamma)\mathbb{Z}^n$  zu berechnen. Als Repräsentanten der Restklassen entstehen dann nur noch natürliche Zahlen  $\leq \det(\Gamma)$ , was eine wesentliche Beschleunigung liefert.

Für weitere Details verweisen wir an dieser Stelle wieder auf [Co], Abschnitt 2.4.2, insbesondere Algorithmus 2.4.8.

**Bemerkung.**

Die obige Einschränkung auf Gitter im  $\mathbb{Q}^n$  ist für die Hermite-Normalform zwingend erforderlich. Eine Verallgemeinerung auf diskrete  $\mathbb{Z}$ -Untermoduln des  $\mathbb{R}^n$  ist nicht möglich. So hat das Gitter

$$\Gamma = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$$

keine Gitterbasis in Dreiecksform, denn im Gegensatz zu jedem vollständigen Gitter im  $\mathbb{Q}^n$  hat es keine nicht-trivialen Gitterpunkte auf den Achsen des Koordinatensystems.

### A.3 Die Hermite-Normalform eines $\mathbb{F}_q[[\frac{1}{t}]]$ -Gitters

In diesem Abschnitt soll die Hermite-Normalform für  $\mathbb{F}_q[[\frac{1}{t}]]$ -Gitter im Detail betrachtet werden. Wir verwenden wieder die Notation

$$k = \mathbb{F}_q \quad A = k[t], \quad K = k(t), \quad \widehat{K} = k\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad \mathfrak{o} = k\left[\left[\frac{1}{t}\right]\right].$$

Die Exponentialbewertung von  $\widehat{K}$  wird wieder mit  $v_\infty(\cdot)$  bezeichnet, die zugehörige Norm  $|\cdot|_\infty$  ist auf  $|t|_\infty = q$  normiert.

**Bemerkung.**

Um die Hermite-Normalform konstruktiv umsetzen zu können, müssen wir wieder diese beiden Fragen diskutieren:

1. Konstruktive Realisierung des Grundkörpers und seiner Verknüpfungen.
2. Konstruktive Umsetzung des Elementarteilersatzes.

Die erste Frage erweist sich als nicht-trivial, da  $\widehat{K}$  und  $\mathcal{O}$  überabzählbare Mengen sind und es nur möglich ist, in einem abzählbaren Unterring praktisch zu rechnen. Alle Algorithmen für  $\widehat{K}$  haben also ähnliche Schwierigkeiten, wie sie bei der Verarbeitung von Gleitkommazahlen auftreten.

Die konstruktive Umsetzung des Elementarteilersatzes reduziert sich wieder auf die Frage der Berechnung eines Erzeugers für ein durch mehrere Elemente erzeugtes Ideal in  $\mathcal{O}$ . Dieser ist durch das größte Element des Erzeugendensystems gegeben.

Das erste Problem der Darstellbarkeit löst der folgende

**Satz.** (Approximationssatz)

Sei  $\Gamma \subset \mathcal{O}^n$  ein vollständiges Gitter und  $M$  eine Matrix, deren Spaltenvektoren eine Gitterbasis von  $\Gamma$  bilden, sowie  $d = v_\infty(\det(M))$  die Bewertung der Determinante. Dann bilden die Spaltenvektoren jeder Matrix aus  $M + t^{-d-1} \text{Mat}(n \times n, \mathcal{O})$  eine Gitterbasis von  $\Gamma$ .

**Beweis.**

Sei  $M' \in M + t^{-d-1} \text{Mat}(n \times n, \mathcal{O})$  ein beliebiges Element. Um zu beweisen, dass die Spalten von  $M'$  eine Gitterbasis von  $M$  sind, ist zu zeigen, dass es eine Matrix  $T \in \text{GL}_n(\mathcal{O})$  gibt so, dass  $M' = MT$  erfüllt ist.

Wir betrachten die Cramersche Regel zur Berechnung der Inversen einer Matrix aus  $\text{GL}_n(\widehat{K})$ . Es gilt

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\det(M^{(j,i)}))_{i,j},$$

wobei  $M^{(j,i)}$  der Minor von  $M$  ist, der durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte aus  $M$  entsteht. Diese Formel zeigt  $M^{-1} \in \frac{1}{\det(M)} \text{GL}_n(\mathcal{O}) \subset \text{Mat}(n \times n, t^d \mathcal{O})$ .

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} M' = MM^{-1}M' &\in M(I + M^{-1}t^{-d-1} \text{Mat}(n \times n, \mathcal{O})) \\ &\subset M(I + \text{Mat}(n \times n, t^d \mathcal{O})t^{-d-1} \text{Mat}(n \times n, \mathcal{O})) \\ &= M(I + t^{-1} \text{Mat}(n \times n, \mathcal{O})) \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass  $I + t^{-1} \text{Mat}(n \times n, \mathcal{O}) \subset \text{GL}_n(\mathcal{O})$  gilt. Eine Möglichkeit diese Restbehauptung zu beweisen, besteht darin, die inverse Matrix mit der geometrischen Reihe explizit anzugeben. Eine andere Möglichkeit besteht darin, festzustellen, dass die Matrix aus  $\text{Mat}(n \times n, \mathcal{O})$  ist und ihre Determinante in  $\mathcal{O}^*$  liegt. Letzteres folgt aus der Kongruenz  $\det(\dots) \equiv 1 \pmod{t^{-1}}$ .  $\square$

**Bemerkung.**

Da jedes vollständige  $\mathcal{O}$ -Gitter in  $\widehat{K}^n$  durch Skalieren mit  $t$ -Potenzen zu einem Untergitter von  $\mathcal{O}^n$  umgewandelt werden kann, ist der Satz auf jedes Gitter anwendbar. Daher kann jedes vollständige Gitter exakt durch einen endlichen Teil der Laurent-Entwicklung einer Gitterbasis dargestellt werden.

**Definition.**

Die Gitterbasis  $b_1, \dots, b_n$  wird als Hermite-Normalform des Gitters  $\Gamma$  bezeichnet, wenn die Matrix  $B = [b_1, \dots, b_n]$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $B$  ist eine obere Dreiecksmatrix.
- Die Diagonalelemente von  $B$  sind Monome mit Leitkoeffizient 1.
- Ist  $b_{i,j}$  ein Außerdiagonalelement, so gilt  $b_{i,j} \in b_{i,i} t \mathbb{F}_q[t]$ .

**Bemerkung.**

Diese Definition der Hermite-Normalform stimmt mit der aus A.1 überein, wenn als Flagge die Standardflagge  $\langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \dots$  gewählt wird und die Ordnungsrelation

so einrichtet wird, dass sie Vektoren auswählt, deren Einträge kleine Bewertung und Leitkoeffizient 1 haben.

**Satz.**

Sei  $\Gamma \subset \widehat{K}^n$  ein vollständiges  $\mathcal{O}$ -Gitter, dann kann die Hermite-Normalform von  $\Gamma$  in endlich vielen Schritten berechnet werden.

**Beweis.**

Wir beweisen die Behauptung durch Angabe eines expliziten Algorithmus. Dazu beginnen wir mit einer Matrix  $M \in \text{GL}_n(\widehat{K})$ , deren Spaltenvektoren eine Basis von  $\Gamma$  bilden.

1. Sortiere die Spalten von  $M$  nach der letzten Zeile. D. h. vertausche die Spalten so, dass  $|m_{n,1}|_\infty \leq |m_{n,2}|_\infty \leq \dots \leq |m_{n,n}|_\infty$  gilt.
2. Verändere nun jede der ersten  $n - 1$  Spalten von  $M$  nach dem folgenden Schema:  
Subtrahiere von der  $k$ -ten Spalte das  $\frac{m_{n,k}}{m_{n,n}}$ -fache der  $n$ -ten Spalte.  
Nun hat die letzte Zeile nur noch einen Eintrag.
3. Um  $M$  auf Dreiecksform zu bringen, wiederholen wir die letzten beiden Schritte nach dem folgenden Schema:  
Lasse  $j$  von 1 bis  $n - 1$  laufen.  
Wiederhole die Schritte 1 und 2 mit der Untermatrix von  $M$ , die aus den ersten  $n - j$  Zeilen und  $n - j$  Spalten gebildet wird.
4. Um die Diagonaleinträge von  $M$  auf die geforderte Form zu bringen, skalieren wir die Spalten wie folgt:  
Multipliziere die  $k$ -te Spalte mit  $\frac{t^{-v(m_{k,k})}}{m_{k,k}} \in \mathcal{O}^*$ .
5. Um die Normierungsbedingungen für die Außerdiagonalelemente zu erfüllen, machen wir Folgendes:  
Lasse  $i$  von  $n - 1$  bis 1 laufen:  
Lasse  $j$  von  $i + 1$  bis  $n$  laufen:  
Berechne den Hilfswert  $u$  wie folgt:  
Spalte von der Laurentreihenentwicklung von  $m_{i,j}$  alle Monome ab, deren  $t$ -Grad kleiner oder gleich dem  $t$ -Grad von  $m_{i,i}$  ist.  $u$  ergibt sich als der Quotient der abgespaltenen Monome und  $m_{i,i}$ .  
Subtrahiere von der  $j$ -ten Spalte das  $u$ -fache der  $i$ -ten Spalte. □

**Bemerkung.**

Der obige Algorithmus kann zur Berechnung der Hermite-Normalform eines Gitters  $\Gamma$  verwendet werden, vorausgesetzt, dass  $\Gamma$  durch eine Gitterbasis gegeben ist und die Einträge in dieser Basis in einem algorithmisch berechenbaren Unterring von  $\widehat{K}$  liegen. Nach dem obigen Approximationssatz ist dies jedoch für jedes Gitter möglich.

Der Approximationssatz kann zur weiteren Optimierung der Berechnung verwendet werden, denn er erlaubt auch, alle bei der Berechnung auftretenden Zwischenergebnisse zu approximieren, ohne das Gitter zu verfälschen.



# Anhang B

## Vektorbündel über $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$

Wir haben im Abschnitt 3.3.1 den Fundamentalbereich von  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t])$  auf dem affinen Gebäude aller Gitterklassen unter systematischer Verwendung der kombinatorischen Metrik direkt bestimmt. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass diese Rechnung zur Klassifikation der Vektorbündel über  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$  äquivalent ist. Hierfür verschaffen wir uns zunächst eine Übersicht über die Vektorbündel auf  $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_q)$ . Es gilt der

**Satz.**

*Alle Vektorbündel vom Rang  $n$  über  $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_q)$  sind trivial. Zwei Vektorbündel sind isomorph, wenn sie gleichen Rang haben.*

Ein Vektorbündel über  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$  kann durch affine Teile und zugehörige Verklebeabbildungen beschrieben werden. Nach dem letzten Satz genügt es dabei, die Verklebungsmöglichkeiten zweier trivialer Vektorbündel vom Rang  $n$  über  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$  bzw.  $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$  zu studieren. Folglich werden die Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang  $n$  durch die Klassen des Doppelquotienten

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t]) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}]) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t^{-1}])$$

beschrieben.

**Satz.** (Grothendieckscher Struktursatz für Vektorbündel)

*Jedes Vektorbündel über  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$  zerfällt in eine direkte Summe von Geradenbündeln. D. h. jede Doppelnebenklasse des obigen Quotienten wird durch eine Diagonalmatrix der Form*

$$\begin{pmatrix} t^{e_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & t^{e_n} \end{pmatrix}$$

*mit einer monoton fallenden Folge  $e_i$  ganzer Zahlen repräsentiert.*

**Beweis.**

Wir haben in 3.3.1 den Fundamentalbereich von  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t])$  im Gebäude der  $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Gitter-Klassen bestimmt. Mit der Sprache der Doppelquotienten können wir dieses Resultat auch wie folgt formulieren: Jede Doppelnebenklasse von

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t]) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q((t^{-1}))) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]])$$

enthält eine Diagonalmatrix der obigen Form.

Sei nun  $M$  eine beliebige Matrix aus  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}]) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q((t^{-1})))$ . Nach dem obigen Zitat erhalten wir die Existenz einer Matrix  $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t])$  und einer Matrix  $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]])$  mit der Eigenschaft, dass  $LMR$  eine Diagonalmatrix der

gesuchten Form ist. Wir müssen nur noch zeigen, dass  $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t^{-1}])$  gilt. Da  $M$ ,  $L$  und das Produkt  $LMR$  alle in  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}])$  enthalten sind, folgt, dass  $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}])$  ist. Da  $R$  nach Konstruktion aus  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]])$  ist, liegt es im Durchschnitt  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}]) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]]) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t^{-1}])$ .  $\square$

**Bemerkung.**

Andererseits folgt aus dem Grothendieckschen Satz auch unser Resultat aus 3.3.1. Der Beweis benutzt wieder die Hermite-Normalform aus A.3. Danach hat jedes  $\mathbb{F}_q[[t]]$ -Gitter eine Gitterbasis  $b_1, \dots, b_n$  mit der Eigenschaft, dass die Matrix  $B = [b_1, \dots, b_n]$  in  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}])$  liegt.

Die verbleibende Restbehauptung folgt unmittelbar, wenn wir den Grothendieckschen Satz auf die Doppelnebenklasse  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t])B\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q[t^{-1}])$  anwenden.

# Literaturverzeichnis

- [Ar] Artin, Emil: Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. Math. Z. 19 (1924) S. 153–246.
- [Ba] Baker, Alan: Transcendental number theory. Cambridge University Press 1975
- [Bed] Tim Bedford, Michael Keane and Caroline Series: Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces, Oxford University Press 1991
- [Be] Leon Bernstein: The Jacobi-Perron algorithm; its theory and application. Springer 1971
- [Ber] V. Berthé, H. Nakada: On continued fraction expansions in positive characteristic. Expo. Math. 18 (2000) S. 257–284.
- [Bo] Borel, Armand: Linear algebraic groups. Springer 1991
- [Bri] Martin R. Bridson, André Haefliger: Metric spaces of non-positive curvature. Springer 1999
- [Bro] Brown, Kenneth S.: Buildings. Springer-Verlag, 1989
- [Bu] Johannes Buchmann: Zahlentheoretische Kettenbruchalgorithmen zur Einheitsberechnung, Köln 1982
- [Co] Henri Cohen: A course in computational algebraic number theory. Springer 1993
- [Co2] Henri Cohen: Advanced topics in computational number theory. Springer 2000
- [Fo] Otto Forster: Algorithmische Zahlentheorie. Vieweg Verlagsgesellschaft 1996
- [Ga] Paul Garrett: Buildings and classical groups. Chapman & Hall 1997
- [Ge] Paul Gerardin: Immeubles des groupes lineaires generaux. Lect. Notes in Math. 880, S. 138–178, Springer 1981
- [Go] O. Goldman, N. Iwahori: The space of p-adic norms. Acta Mathematica 109, S. 137–177
- [Ha] G. H. Hardy, E. M. Wright: An introduction to the theory of numbers. Oxford at the Clarendon Press 1954
- [Iw] Nagayoshi Iwahori: Generalized Tits system (Bruhat decomposition) on p-adic semisimple groups, Proc. Symp. Pure Math. no. 9, S. 71–83
- [Kh] A. Khintchine: Kettenbrüche. Teubner Verlagsgesellschaft 1956

- [Kn] Martin Kneser: Quadratische Formen. Springer 2002
- [Ko] Dr. H. Koenen: Geschichte der Gleichung  $t^2 - Du^2 = 1$ . Leipzig 1901
- [La] Alain Lasjaunias, Bernard de Mathan: Thue's theorem in positive characteristic, *J. reine angew. Math* 473 (1996), S. 195–206
- [Pa1] Frederic Paulin: Groupe modulaire, fractions continues et approximation diophantienne en caractéristique  $p$ , Preprint
- [Pa2] Anne Broise, Frederic Paulin: Dynamique sur le rayon modulaire et fractions continues en finie, Preprint
- [Pe1] Oskar Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner Verlagsgesellschaft 1954
- [Pe2] Oskar Perron: Irrationalzahlen. de Gruyter 1921
- [Po] M. Pohst, H. Zassenhaus: Algorithmic algebraic number theory. Cambridge University Press 1989
- [Ro] Andrew Rockett, Peter Szűsz: Continued fractions, World Scientific 1992
- [Sch] Wolfgang Schmidt: On continued fractions and diophantine approximation in power series fields, *Acta Arithmetica* XCV (2000)
- [We] André Weil: Zahlentheorie: ein Gang durch die Geschichte; von Hammurapi bis Legendre. Birkhäuser 1992
- [We1] Annette Werner: Compactification of the Bruhat-Tits building of PGL by seminorms. Preprint
- [We2] Annette Werner: Compactification of the Bruhat-Tits building of PGL by lattices of smaller rank. *Documenta Mathematica* 2001

## Lebenslauf

22. 09. 1975	Geboren in Clausthal-Zellerfeld
1982–1986	Grundschule in Clausthal-Zellerfeld
1986–1988	Orientierungsstufe in Clausthal-Zellerfeld
1988–1995	Robert-Koch-Gymnasium in Clausthal-Zellerfeld
1995–1996	Grundwehrdienst in Braunschweig und Munster
Oktober 1996	Beginn der Studiums an der TU Clausthal
September 1998	Vordiplom in Mathematik und in Technomathematik
Oktober 1998	Fortsetzung des Studiums an der Georg-August-Universität in Göttingen
Februar 2002	Diplom in Mathematik
seit April 2002	Promotionsstudium bei Prof. U. Stuhler am Institut für Mathematik der Universität Göttingen
2002–2005	Stipendiat am Graduiertenkolleg „Gruppen und Geometrie“ an der Georg-August-Universität zu Göttingen
seit April 2005	Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Georg-August-Universität zu Göttingen